DEUX ESSAIS SUR LA GÉOMÉTRIE AFFINE

MIKHAIL ZAIDENBERG

Table des matières

2000 Mathematics Subject Classification: 14H50, 14J50, 14R05, 14R20.
Key words: courbe affine, surface affine, action de $\mathbb{C}^*$.

Introduction

Les variétés algébriques affines sont considérées dans plusieurs leçons antérieures, par exemple dans les leçons 7–9 de Bernard Teissier, Dominique Cerveau et Fabien Morel. Pour différents sujets de la géométrie affine voir e.g., les cours [Na_1], [Na_2], [Miy_2], [vdE], et [Fr_1]. Il existe des résumés sur la géométrie des variétés affines, par exemple celui de Hanspeter Kraft dans le séminaire Bourbaki [Kr] et (plus récent) celui de Masayoshi Miyanishi [Miy_3] ; voir aussi e.g., [Ba], [Ka_6], [Ru], [Za_3].

La géométrie algébrique affine est distinguée par la multitude de ses idées et des approches, venues souvent de domaines voisins ou encore éloignés. Le souci d'illustrer cette diversité des techniques explique notre choix des deux sujets suivants : le théorème d'unicité de Pakovich pour des couples de polynômes d'une variable, et le théorème (de Lin-Zaidenberg) qui dit que toute courbe plane affine rationnelle cuspidale, ayant une seule place à l'infini, s'écrit comme $x^k - y^l = 0$ dans des coordonnées appropriées. La preuve du premier théorème repose sur un (nouveau) résultat dans la théorie de l'approximation, tandis que celle du second fait appelle à la théorie analytique des espaces de Teichmüller due à Ahlfors et Bers, et à la théorie de Milnor de singularités, entre autres choses.

1. Variétés algébriques affines

Cette section contient une brève introduction 'amicale' dans le sujet. Pour le lecteur qui connaît déjà les définitions de base, elle est inutile.

L'objet d'étude. En géométrie algébrique affine, on classifie les variétés algébriques affines à isomorphisme près (il s'agit donc de la classification birégulière). On classifie aussi leurs plongements fermés dans les espaces affines $X \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ modulo les actions des groupes $\mathrm{Aut}(X)$ sur X resp., $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ sur $\mathbb{A}^n$. On s'intéresse également à la structure de leur groupes d'automorphismes $\mathrm{Aut}(X)$.

Dans cette section nous précisons la terminologie puis nous comparons la géométrie affine à la géométrie algébrique projective. Pour simplifier l'exposition, nous ne faisons pas ici de distinction entre les *ensembles algébriques* et les *variétés algébriques.* Donc, sans précision contraire, les variétés algébriques considérées sont supposées réduites.

1.1. **Premières définitions.**

Toute variété algébrique affine X définie sur un corps k est située dans un espace affine $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_k$. Par définition, X est le lieu des zéros communs d'une famille $\mathcal{F}$ (finie ou infinie) de polynômes à n variables définis sur k :

$$X = \{x \in \mathbb{A}^n \,|\, p(x) = 0 \ \forall p \in \mathcal{F}\} \,.$$

L'ideal I engendré par les éléments de $\mathcal{F}$:

$$I = \{p \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid p = \sum_{i=1}^{m} a_i p_i \text{ où } a_i \in k[x_1, \ldots, x_n],\ p_i \in \mathcal{F}\}$$

définit la même variété X. D'après le Théorème des zéros de Hilbert (Nullstellensatz) le *radical* de I,

$$\sqrt{I} = \{q \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid \exists k \in \mathbb{N}, q^k \in I\},$$

coïncide avec l'ensemble des polynômes qui s'annulent sur X. C'est donc le plus grand idéal qui définit X. Le Théorème de la base de Hilbert dit qu'il existe une sous-famille finie $\mathcal{F}'$ de la famille $\mathcal{F}$ qui engendre I et donc définit la même variété X.

La variété X est dite *irréductible* si $\sqrt{I}$ est un ideal *premier* i.e., $uv \in \sqrt{I} \Rightarrow u \in \sqrt{I}$ ou bien $v \in \sqrt{I}$. Dans ce cas l'algèbre quotient

$$\mathcal{O}(X) = k[x_1, \ldots, x_n]/\sqrt{I}$$

(constituée des traces $q|X$ de polynômes $q \in k[x_1, \ldots, x_n]$) est un domaine intègre dit *l'algèbre structurale* ou bien *l'anneau de coordonnées* de X. C'est une algèbre de type fini : un système fini de générateurs de $\mathcal{O}(X)$ est donné par les restrictions $x_1|X, \ldots, x_n|X$.

Soit désormais $k = \mathbb{C}$. On dit qu'un point $x \in X$ est *lisse* si le rang r de la matrice Jacobienne de la famille $\mathcal{F}'$ en x est maximal et *singulier* sinon. D'après le théorème des fonctions implicites, dans un voisinage d'un point lisse $x \in X$, X constitue une sous-variété complexe de $\mathbb{A}^n$ de dimension complexe

$$\dim_{\mathbb{C}} X = n - r\,.$$

Le lieu $\operatorname{sing} X$ des points singuliers de X est une sous-variété algébrique propre de X.

1.2. **Exemples.** Pour donner un exemple, toute partie finie de $\mathbb{A}^n$ est une variété affine. Une telle variété est compacte et de dimension zéro. Par contre, une variété affine de dimension (strictement) positive n'est jamais compacte et ne contient aucune sous-variété algébrique compacte de dimension (strictement) positive.

Une *courbe algébrique plane affine* $C \subseteq \mathbb{A}^2$ est le lieu des zéros d'un polynôme p à deux variables. Si ce polynôme est irréductible alors la courbe C l'est encore. Dans ce cas le degré de la courbe C est par définition le degré du polynôme p. C'est un tout premier invariant numérique de la courbe plongée. Le degré change, en général, quand on change le plongement $C \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ en appliquant un automorphisme non-linéaire du plan. Le lieu des zéros d'un polynôme à trois variables dans l'espace affine $\mathbb{A}^3$ est une surface algébrique affine, et ainsi de suite.

Toute droite du plan affine $\mathbb{A}^2$ est une courbe affine irréductible lisse. Les couples de droites sécantes correspondent aux coniques planes singulières, et les couples de droites parallèles correspondent aux coniques planes lisses réductibles. Une parabole et une hyperbole sont des coniques planes lisses irréductibles.

Une cubique irréductible $C \subseteq \mathbb{A}^2$ peut être singulière de deux manières, soit comme la *cubique cuspidale* d'équation $x^2 - y^3 = 0$, soit comme la *cubique nodale* $x^2 - y^2(y-1) = 0$. Dans les deux cas, la courbe C est irréductible et possède un seul point singulier, à l'origine $a = 0$ dans nos exemples. Pour distinguer les cas, il faut considérer le polynôme correspondant p comme étant élément de l'anneau local $\mathbb{C}\{x, y\}$ des séries convergentes aux voisinages de $0 \in \mathbb{A}^2$. Dans le premier cas, p est irréductible dans cet anneau, le point singulier $0 \in C$ est donc *unibranche* et présente un *cusp*. Dans le second cas, les deux *branches locales* lisses de C en 0 correspondent aux deux facteurs irréductibles de p dans l'anneau $\mathbb{C}\{x, y\}$.

1.3. **Morphismes et automorphismes.** Soient maintenant $X \subseteq \mathbb{A}^n$ et $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ deux variétés affines. Un *morphisme* (ou bien une *application régulière*) $f : X \to Y$ est la restriction à X d'une application polynomiale $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ telle que $f(X) \subseteq Y$, où $f_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $i = 1, \ldots, m$. Un *isomorphisme* (ou bien une *application birégulière*) $f : X \to Y$ est un morphisme qui possède un morphisme inverse $g : Y \to X$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ et $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Un isomorphisme $X \to X$ est dit *automorphisme*. Les automorphismes de X forment un groupe noté $\mathrm{Aut}(X)$ et appelé le *groupe d'automorphismes* de X.

Par exemple, un automorphisme de l'espace affine $\mathbb{A}^n$ est une application polynomiale $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ possédant un inverse polynomial. En effet, toute bijection polynomiale $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ est un automorphisme. Le déterminant jacobien $\mathrm{Jac}(f)$ d'un tel automorphisme f étant un polynôme qui ne s'annule nulle part, il est constant. La fameuse Conjecture Jacobienne dit que, réciproquement, toute application polynomiale $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ dont le jacobien $\mathrm{Jac}(f)$ est une constante non-nulle, est un automorphisme. Cette conjecture reste ouverte même pour $n = 2$; voir e.g., les résumés [BCW, Wr].

1.4. **L'adhérence projective d'une variété affine.** En géométrie algébrique projective, l'objet principal d'études est une variété projective $V \subseteq \mathbb{P}^n_k$, où $\mathbb{P}^n_k$ est un espace projectif sur un corps k donné. Une telle variété est définie comme le lieu des zéros communs d'une famille de polynômes homogènes à $n + 1$ variables. Les théorèmes de Hilbert cités plus haut ont des analogues homogènes. Toute variété projective s'obtient par recollement de cartes affines, donc de variétés affines. Cependant, pour $k = \mathbb{C}$ les variétés projectives dans $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ sont des parties fermées donc compactes. On se restreint dans la suite au cas $k = \mathbb{C}$.

L'adhérence dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n \supseteq \mathbb{A}^n$ d'une variété algébrique affine $X \subseteq \mathbb{A}^n$ est une variété projective $\bar{X} \subseteq \mathbb{P}^n$. En fait on a $X = \bar{X} \setminus \partial X$ où le bord $\partial X = \bar{X} \cap \mathbb{P}^{n-1}$ est l'intersection de $\bar{X}$ avec l'hyperplan 'à l'infini'. Ce bord ∂X est une sous-variété projective de $\bar{X}$ de codimension 1, donc une *hypersurface* (ou encore un *diviseur de Cartier effectif*). D'après le Théorème de Lefschetz de section hyperplane, si X est irréductible de dimension complexe $\dim(X) \geq 2$ alors son bord ∂X est connexe. Par conséquent, $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$ n'est pas isomorphe à aucune variété affine, tandis que $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ l'est.

Par contre, pour toute courbe projective irréductible lisse C et pour tout point $x \in C$, $X = C \setminus \{x\}$ est une courbe affine. Pour une courbe affine $X \subseteq \mathbb{A}^n$ quelconque, le bord ∂X consiste en un nombre fini de points. Un tel point $x \in \partial X$ pourrait être le centre commun de plusieurs branches locales de $\bar{X}$ en x. Toute branche locale définit une *place* de X à l'infini. La courbe X a une seule place à l'infini si $\partial X = \{x\}$ est constitué d'un seul point et $\bar{X}$ a une seule branche locale en x. Dans ce cas X est évidemment irréductible.

Par exemple, une parabole a une seule place à l'infini, et une hyperbole a deux places à l'infini. De plus, une parabole est isomorphe à la droite affine $\mathbb{A}^1$ tandis qu'une hyperbole est isomorphe à la droite privée de l'origine $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ [1].

Parmi les hypersurfaces D d'une variété projective Y il y a celles qui portent un *diviseur ample*, c'est à dire celles qui sont des sections hyperplanes pour un plongement $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, et donc pour lesquelles le complémentaire $X = Y \setminus D$ est une variété affine. Pour les courbes lisses et les surfaces projectives lisses la réciproque est aussi valable : si $X = Y \setminus D$ est affine alors D porte un diviseur ample.

1.5. **La géométrie affine et la géométrie projective : une comparaison naïve.** Dans la géométrie algébrique projective, on utilise deux genres de classification, à savoir la classification birégulière des variétés projectives à isomorphisme près, et la classification birationnelle des mêmes variétés à isomorphisme birationnel près. Par rapport à ces deux classifications, la géométrie affine occupe une place intermédiaire assez spéciale. Pour donner une idée, pour une variété projective Y, on considère le groupe d'automorphismes biréguliers $\mathrm{Aut}(Y)$ et le groupe d'automorphismes birationnels $\mathrm{Bir}(Y) \supseteq \mathrm{Aut}(Y)$. Soit maintenant $X = Y \setminus D$ une variété affine où $D \subseteq Y$ est un diviseur. Alors on a

$$\mathrm{Bir}(Y) \supseteq \mathrm{Aut}(X) \supseteq \mathrm{Aut}(Y, D)\,.$$

En effet, tout automorphisme de X s'étend en une transformation birationnelle de Y. En outre, tout automorphisme de Y qui préserve D se restreint en un automorphisme de X.

En général, les inclusions ci-dessus sont strictes :

$$\mathrm{Bir}(Y) \neq \mathrm{Aut}(X) \neq \mathrm{Aut}(Y, D)\,.$$

En effet, une transformation birationnelle de Y n'est pas forcément birégulière sur X. En outre, le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(Y)$ d'une variété projective Y n'est pas forcement un groupe algébrique car il peut avoir un nombre infini de composantes connexes ; voir e.g., [ZL$_2$] pour un exemple classique d'une telle surface algébrique. Cependant, d'après le Théorème de Matsusaka [Ma] (voir aussi [Ra$_2$]) la composante

1. Même si $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ n'est pas une sous-variété affine de $\mathbb{A}^1$, c'est une variété quasi-projective isomorphe à une sous-variété affine de $\mathbb{A}^2$, à savoir à une hyperbole.

neutre du groupe $\mathrm{Aut}(Y)$ (et donc, aussi celle du groupe $\mathrm{Aut}(Y,D)$) est un groupe algébrique, c'est à dire un groupe qui est en même temps une variété algébrique et dont la multiplication et l'inversion sont des morphismes. Tandis que la composante neutre du groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(X)$ d'une variété affine X pourrait être un groupe topologique de dimension infinie, qui alors n'est pas un groupe algébrique.

2. Un problème élémentaire sur des couples de polynômes d'une variable

2.1. Le problème. Voici le problème :

Existe-t-il un couple de polynômes $(p,q) \in (\mathbb{C}[z])^2$ différent des couples (p,p) et $(p,-p)$ tel que :

(1) $\deg(p) = \deg(q)$;
(2) $p^{-1}(\{1,-1\}) = q^{-1}(\{1,-1\})$?

J'ignore l'origine de ce problème. Il est probable que George Polya le connaissait. Le problème figure dans quelques listes de problèmes ouverts, par exemple dans [Ya].

La réponse est 'Non'; la première preuve a été trouvée en 1995 par F. Pakovitch dans [Pa$_1$], voir aussi [Pa$_2$]. On présente ici une autre démonstration suivant [OPZ].

2.2. Polynômes de meilleure approximation. D'après l'idée originale de Pakovitch, la preuve fait appel à la notion de polynôme de meilleure approximation au sens de Chebyshev (Tchebychev). Étant donnée une partie compacte $K \subseteq \mathbb{C}$ et un polynôme unitaire

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 = z^n - p_1 \in \mathbb{C}[z]\,,$$

on dit que p est un polynôme de meilleure approximation sur K de degré n, ou encore un polynôme de degré n de *moindre écart par rapport à zéro* sur K, si, parmi tous les polynômes unitaires de degré n, la norme

$$||p|K|| = \sup_{z\in K}\{|p(z)|\} = ||z^n - p_1||_K$$

est minimale. Donc p_1 représente une des meilleures approximations de z^n sur K parmi les polynômes de degré au plus $n-1$. En 1908 Vallée-Poussin [VP] a montré que, lorsque $\mathrm{card}(K) \geq n$, il existe un unique polynôme de meilleure approximation sur K de degré n.

Par définition, le *disque de Chebyshev* $\Delta(K)$ de K est l'unique disque de rayon minimal qui contient K. Son centre est dit le *centre de Chebyshev* de K.[2] Nous allons déduire le résultat de Pakovitch du théorème suivant.

2. Voici un exemple, provenant des activités de l'IREM de Grenoble. Supposons qu'on cherche à placer un centre de secours en montagne, de sorte que la distance maximale entre les stations de ski voisines et ce centre soit minimale. Alors le meilleur emplacement est au centre de Chebyshev de l'ensemble des stations.

Théorème 2.1. *Soit K une partie compacte de $\mathbb{C}$ de cardinal* $\mathrm{card}(K) \geq 2$ *ayant son centre de Chebyshev à l'origine. Alors pour tout polynôme unitaire $p \in \mathbb{C}[z]$ de degré n, p est un polynôme de meilleure approximation de degré n sur le compact $p^{-1}(K) \subseteq \mathbb{C}$, et il est unique.*

Preuve. Soient $p, q \in \mathbb{C}[z]$ deux polynômes unitaires de degré n. On considère la moyenne $\widehat{q}_p$ de q selon p :

$$\widehat{q}_p(z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q(\zeta_i) \quad \text{où} \quad p^{-1}(\{z\}) = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\},$$

où les ζ_i sont écrits autant de fois que leur multiplicité. Alors $\widehat{q}_p(z) = z+c$ où $c \in \mathbb{C}$. En effet, pout tout $k = 1, \ldots, n-1$ la moyenne $\widehat{(z^k)}_p = 1/n \sum_{i=1}^n \zeta_i^k$ est une constante qui s'exprime en fonction des coefficients $a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}$ de $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$. En outre, $\widehat{p}_p(z) = z$ et $\widehat{1}_p(z) = 1$, donc $\widehat{q}_p = \widehat{p}_p + \widehat{(q-p)}_p = z + c$ où $c \in \mathbb{C}$, d'où le résultat.

Soit $\widehat{K} = p^{-1}(K)$. Alors on a :

$$||p||_{\widehat{K}} = ||z||_K = r$$

où r est le rayon du disque de Chebyshev de K. D'après notre hypothèse, ce disque est centré à l'origine. En utilisant les résultats précédents on obtient les inégalités

$$||p||_{\widehat{K}} = r = ||z||_K \leq ||z+c||_K = ||\widehat{q}_p||_K \leq ||q||_{\widehat{K}}\,. \tag{1}$$

Ainsi p est un polynôme de meilleure approximation de degré n sur le compact $\widehat{K} = p^{-1}(K)$. □

Dans la situation du théorème, l'unicité est aussi facile à établir.

Preuve du théorème de Vallée-Poussin dans notre cas particulier. Supposons maintenant que $q \in \mathbb{C}[z]$ est un polynôme unitaire de degré n de meilleure approximation sur le compact $\widehat{K}$. Alors dans (1) on a des égalités. Ainsi $c = 0$ et alors $\widehat{q}_p(z) = z$. Puisque $\mathrm{card}(K) \geq 2$, le cercle $|z| = r$ contient au moins deux points distincts a_1 et a_2 de K. Soit $p^{-1}(a_i) = \{\zeta_{i1}, \ldots, \zeta_{in}\}$, $i = 1, 2$. Comme

$$\widehat{q}_p(a_i) = 1/n \sum_{j=1}^{n} q(\zeta_{ij}) = a_i \tag{2}$$

où $|q(\zeta_{ij})| \leq r = ||q||_{\widehat{K}} = |a_i|$ $\forall j = 1, \ldots, n$, $i = 1, 2$, (2) impliquent les égalités

$$q(\zeta_{ij}) = a_i = p(\zeta_{ij}) \quad \forall j = 1, \ldots, n,\ i = 1, 2.$$

Puisque $\deg(p) = \deg(q) = n$ et que la réunion $p^{-1}(a_1) \cup p^{-1}(a_2)$ contient au moins $n+1$ points deux à deux distincts [3], cela implique que $q = p$. □

3. La vérification de cette dernière assertion est laissée au lecteur.

2.3. **Retour au problème.** Le théorème 2.1 a pour corollaire le résultat suivant, qui généralise le résultat de Pakovitch.

Théorème 2.2. *Soit K une partie compacte de $\mathbb{C}$ qui contient deux points distincts au moins, et soient $p, q \in \mathbb{C}[z]$ deux polynômes de même degré $n \geq 1$ pour lesquels $p^{-1}(K) = q^{-1}(K)$. Alors on a : $q = \alpha \circ p$ où α est une rotation de $\mathbb{C}$ telle que $\alpha(K) = K$.*

En particulier, si $K = \{1, -1\}$ alors $\alpha = \pm\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ et donc $q = \pm p$.

Preuve. Soit $\Delta(K)$ le disque de Chebyshev de K de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$. En remplaçant K, p, q resp. par $K - z_0, p - z_0$, et $q - z_0$, nous pouvons supposer que $z_0 = 0$ et donc $\Delta(K) = \Delta_{0,r}$. Soient $p = a\tilde{p}$ et $q = b\tilde{q}$ où $\tilde{p}$ resp. $\tilde{q}$ sont les polynômes unitaires associés. Alors on a

$$p^{-1}(K) = \tilde{p}^{-1}(K/a) \quad \text{resp.} \quad q^{-1}(K) = \tilde{q}^{-1}(K/b)\,.$$

D'après le théorème 2.1, $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$ sont tous deux des polynômes de degré n de meilleure approximation sur le compact $p^{-1}(K) = q^{-1}(K)$. D'après le théorème classique de Vallée-Poussin, un tel polynôme est unique. Ainsi l'on a $\tilde{p} = \tilde{q}$. Donc $\tilde{p}(\tilde{p}^{-1}(K/a)) = \tilde{q}(\tilde{q}^{-1}(K/b))$, d'où $aK = bK$. Par conséquent $|a/b| = 1$ i.e., $a/b = e^{i\phi}$ et donc $p = e^{i\phi}q$ où $\phi \in \mathbb{R}$ est tel que $e^{i\phi}K = K$. □

2.4. **Interprétation géométrique.** Un couple des polynômes non-constants $(p, q) \in (\mathbb{C}[z])^2$ définit un morphisme $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$, $t \longmapsto (p(t), q(t))$. Son image Γ est une courbe plane algébrique affine unicursale ayant une seule place à l'infini. En fait elle est rationnelle, c'est à dire birationnelle à la droite affine $\mathbb{A}^1$.

Soit encore T la configuration de quatre droites $x = \pm 1, y = \pm 1$ du plan affine $\mathbb{A}^2$. Ces droites s'intersectent deux à deux aux quatre points $(\pm 1, \pm 1) \in \mathbb{A}^2$. Le couple (p, q) vérifie la condition (2) $p^{-1}(\{1, -1\}) = q^{-1}(\{1, -1\})$ du problème initial si et seulement si les courbes Γ et T ne se croisent nulle part en dehors de ces quatre points :

$$\Gamma \cap T \subseteq \{(\pm 1, \pm 1)\}\,.$$

La représentation $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ induit un plongement naturel du plan affine $\mathbb{A}^2$ dans le produit $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (vue comme une complété de $\mathbb{A}^2$). Le complémentaire $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{A}^2$ est la réunion de deux droites projectives

$$D_1 = (\mathbb{P}^1 \times \{\infty\}) \quad \text{et} \quad D_2 = (\{\infty\} \times \mathbb{P}^1)\,,$$

qui se croisent en un seul point $P = \{\infty\} \times \{\infty\}$. On peut réaliser le produit $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ comme la quadrique lisse $Q \subseteq \mathbb{P}^3$ d'équation $xy = uv$, et la réunion de ces deux droites comme la section de Q par le plan $y = 0$, D_1 étant donnée par les équations $y = u = 0$ et D_2 par $y = v = 0$.

Si $\deg(p) = \deg(q)$ alors le seul point de la courbe Γ à l'infini s'identifie avec le point $P \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Donc P est le seul point de $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$, où $\bar{\Gamma}$ est l'adhérence de Γ dans

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. De plus, les indices d'intersection en P de Γ et de chacune des droites D_1 et D_2 sont égaux. Réciproquement, si ces deux indices sont égaux alors $\deg(p) = \deg(q)$.

Notons

$$S = \bar{T} \cup (\mathbb{P}^1 \times \{\infty\}) \cup (\{\infty\} \times \mathbb{P}^1)$$

la réunion de deux triplets de droites projectives parallèles sur la surface $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, et notons par M l'ensemble des cinq points doubles $\{(\pm 1, \pm 1), (\infty, \infty)\}$ de S. On déduit du théorème 2.2 le fait géométrique suivant.

Corollaire 2.3. *Soit $\Gamma \subseteq \mathbb{A}^2$ une courbe irréductible rationnelle ayant une seule place à l'infini. Supposons que l'adhérence $\bar{\Gamma} \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de Γ vérifie les conditions suivantes :*

(i) $\bar{\Gamma} \cap S \subseteq M$, *et*

(ii) $\mathrm{ind}_P(\bar{\Gamma}, \mathbb{P}^1 \times \{\infty\}) = \mathrm{ind}_P(\bar{\Gamma}, \{\infty\} \times \mathbb{P}^1)$.

Alors Γ est l'une des deux diagonales $\Delta_1 = \{x - y = 0\}$ ou $\Delta_2 = \{x + y = 0\}$.

Il manque toujours une démonstration géométrique directe de ce corollaire. On termine cette section par une question ouverte.

Problème. Décrire tous les couples de polynômes $(p, q) \in (\mathbb{C}[z])^2$ où $p \neq \pm q$ pour lesquels $p^{-1}(\{1, -1\}) = q^{-1}(\{1, -1\})$.

3. Courbes planes affines simplement connexes

Cette section est consacrée à la classification des courbes planes affines dans $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ qui sont homéomorphes à la droite affine $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$. Une telle courbe Γ est rationnelle avec une seule place à l'infinie.

3.1. Plongements de la droite dans le plan : le théorème d'épimorphisme.

On a les critères suivants pour qu'une courbe plane affine soit isomorphe à la droite affine $\mathbb{A}^1$.

Proposition 3.1. *Soit un morphisme $\varphi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$, $z \longmapsto (p(z), q(z))$, où $p, q \in \mathbb{C}[z]$, et soit $\Gamma = \varphi(\mathbb{A}^1) \subseteq \mathbb{A}^2$ son image. Alors les condition suivantes sont deux à deux équivalentes.*

(1) *φ est un plongement i.e., un isomorphisme entre $\mathbb{A}^1$ et Γ ;*

(2) *Les polynômes p et q séparent les points de la droite $\mathbb{A}^1$. De plus, en tout point $z \in \mathbb{A}^1$ leur dérivées ne s'annulent pas simultanément : $(p'(z), q'(z)) \neq (0, 0)$;*

(3) *L'algèbre $\mathbb{C}[z]$ est engendrée par p et par q : $\mathbb{C}[z] = \mathbb{C}[p, q]$;*

(4) *Il existe un polynôme $f \in \mathbb{C}[x, y]$ tel que $f(p(z), q(z)) = z$.*

Nous laissons la preuve en exercice.

Abhyankar et Moh [AM$_1$], [AM$_2$] et, indépendamment, Suzuki [Su$_1$] ont établi le fait remarquable suivant, dit théorème d'épimorphisme.

Théorème 3.2. *Soit un plongement* $\varphi = (p(z), q(z)) : \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^2$*, où* $p, q \in \mathbb{C}[z]$ *et* $\deg(p) \leq \deg(q)$*. Alors* $\deg(p) | \deg(q)$*. En conséquence, il existe un automorphisme polynomial* $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ *tel que* $\alpha \circ \varphi : \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^2$*,* $z \longmapsto (0, z)$ *est un plongement linéaire sur l'axe vertical.*

Il est facile de déduire la seconde assertion de la première. En effet, l'action usuelle du tore $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^2$ sur le plan affine $\mathbb{A}^2$:

$$(\lambda, \mu) : (x, y) \longmapsto (\lambda x, \mu y) \tag{3}$$

permet de réduire le couple (p, q) à un couple de polynômes unitaires de mêmes degrés. D'après la première partie, quitte à permuter p et q, on a $\deg(p) = a$ resp. $\deg(q) = da$, où $a, d \in \mathbb{N}^*$. Ensuite on baisse le bi-degré (a, ad) en remplaçant le couple (p, q) par $(p_1, q_1) = (p, q - p^d)$. Après quelques iterations on arrive de cette manière à un couple de polynômes (p_n, q_n) de bi-degré $(0, 1)$ (quitte à permuter p_n et q_n). Finalement, à partir d'un tel couple (p_n, q_n) on obtient le couple $(0, z)$ par une transformation linéaire.

Voici un corollaire immédiat du théorème d'épimorphisme 3.2.

Corollaire 3.3. *Soit* $\Gamma \subseteq \mathbb{A}^2$ *une courbe plane affine donnée par une équation polynomiale* $f(x, y) = 0$*, où le polynôme* $f \in \mathbb{C}[x, y]$ *est irréductible. Si* $\Gamma \cong \mathbb{A}^1$ *alors il existe un automorphisme* $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ *tel que* $f \circ \alpha^{-1}(x, y) = x$ *et donc* $\alpha(\Gamma) = (OY)$*.*

En fait, l'automorphisme α du théorème est le même que celui du corollaire. Par la construction ci-dessus, cet automorphisme est composé des transformations linéaires du plan $\mathbb{A}^2$, de translations, des permutations $(x, y) \longmapsto (y, x)$, et des transformations dites de Jonquières, ou bien triangulaires, de la forme $(x, y) \longmapsto (x, y - x^d)$. D'après le fameux théorème de Jung [Ju], le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ est engendré par le sous groupe affine et le sous groupe de Jonquières (comme produit amalgamé). Ce théorème montre que les deux assertions du théorème d'épimorphisme ci-haut sont équivalentes. Notons que, d'après van der Kulk [VDK], le théorème de Jung est également valable pour n'importe quel corps k ; voir aussi une demonstration élémentaire dans [MKW].

Il existe plusieurs démonstrations alternatives du théorème d'épimorphisme 3.2 d'Abhyankar-Moh-Suzuki, basées sur diverses idées. Une liste de références se trouve dans [Miy_3] (voir e.g., [AB], [ACO], [Sat], [SatSt], [Wi_1], e.a.).

Le théorème suivant (en dimension supérieure) est dû à Jelonek [Je], Kaliman [Ka_2], Nori et Srinivas [Sr].

Théorème 3.4. *Soit* X *une variété affine lisse irréductible. Alors* $\forall n \geq 2 \dim X + 2$ *tous les plongements* $X \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ *sont équivalents sous l'action du groupe* $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$*. En particulier, tout plongement* $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ *est rectifiable si* $n \geq 4$*.*

Cependant, on a le problème suivant.

Problème (Abhyankar-Sathaye). *Est-ce que tout plongement* $\mathbb{A}^k \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ *peut être rectifié à l'aide d'un automorphisme de* $\mathbb{A}^n$ *?*

La réponse reste inconnue même pour les plongements $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^3$ et $\mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{A}^3$. Pour certaines classes de plongements, il y a quelques résultats positifs, voir e.g. Russell-Sathaye [RS], Russell [Ru], Kaliman-Vénéreau-Zaidenberg [KVZ], Vénéreau [Ve_2], Freudenburg [Fr_2], e.a.

3.2. **Courbes planes affines simplement connexes.** Cette classe des courbes admet les caractérisations suivantes.

Lemme 3.5. *Soit* $\Gamma \subseteq \mathbb{A}^2$ *une courbe plane affine irréductible. Alors les conditions suivantes sont deux à deux équivalentes :*

(i) Γ *est simplement connexe i.e., le groupe fondamental* $\pi_1(\Gamma)$ *est trivial ;*

(ii) Γ *est homéomorphe à la droite affine* $\mathbb{A}^1$ *;*

(iii) $e(\Gamma) = 1$*, où* e *est le caractéristique d'Euler ;*

(iv) Γ *est une courbe rationnelle cuspidale*[4] *ayant une seule place à l'infinie ;*

(v) Γ *admet une paramétrisation polynomiale* $t \longmapsto (p(t), q(t))$ *où les polynômes* $p, q \in \mathbb{C}[t]$ *séparent les points de la droite* $\mathbb{A}^1$.

On dit qu'un polynôme $p(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ est *quasihomogène de poids* (l, k) *et de degré* n si pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$, $(x, y) \in \mathbb{A}^2$, on a $p(\lambda^l x, \lambda^k y) = \lambda^n p(x, y)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Si p est quasihomogène alors la courbe plane $p(x, y) = 0$ est aussi dite quasihomogène. Toute courbe quasihomogène est simplement connexe. Par exemple, la courbe $\Gamma_{k,l} = \{x^k - y^l = 0\}$ où $k, l \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux, est irréductible et simplement connexe. Elle est lisse (et donc isomorphe à la droite affine $\mathbb{A}^1$) si et seulement si $\min\{k, l\} = 1$. Si $k, l \geq 2$ alors $\Gamma_{k,l}$ a un seul point singulier à l'origine. Le théorème suivant [ZL_1] généralise le théorème d'épimorphisme 3.2.

Théorème 3.6. *Soit* $\Gamma = \{f = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2$ *une courbe simplement connexe, où* $f \in \mathbb{C}[x, y]$ *est un polynôme irréductible. Alors il existe un automorphisme* $\alpha \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{A}^2)$ *tel que* $f \circ \alpha^{-1}(x, y) = x^k - y^l$ *où* $k, l \in \mathbb{N}^*$ *sont premiers entre eux. En particulier* $\alpha(\Gamma) = \Gamma_{k,l}$.

Corollaire 3.7. *Toute courbe irréductible plane affine singulière simplement connexe a un unique point singulier.*

Plus précisément, on a le résultat suivant.

Corollaire 3.8. *Soit* Γ *une courbe plane affine simplement connexe paramétrée par un couple de polynômes* $(p, q) \in \mathbb{C}[t]$*. Alors on a* $\mathbb{C}[p, q] = \mathbb{C}[(t - c)^k, (t - c)^l]$ *pour un certain* $c \in \mathbb{C}$ *et pour un certain couple* (k, l) *d'entiers naturels premiers entre eux.*

4. Cela veut dire que les points singuliers de Γ sont localement irréductibles.

Par conséquent, on a le corollaire suivant.

Corollaire 3.9. *Soit* $(p, q) \in \mathbb{C}[t]$ *un couple de polynômes. Si il existe deux points distincts* $t_1, t_2 \in \mathbb{A}^1$ *pour lesquels* $p'(t_i) = q'(t_i) = 0$, $i = 1, 2$, *alors il existe deux points distincts* $t_3, t_4 \in \mathbb{A}^1$ *pour lesquels*

$$(p(t_3), q(t_3)) = (p(t_4), q(t_4)) .$$

En outre, ce dernier corollaire appliqué à la projection plane d'une courbe gauche, donne le résultat suivant.

Corollaire 3.10. *(V. Lin) Soit* $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^3$ *un plongement dont l'image est notée* Γ. *Si les droites tangentes* $\mathbb{T}_A\Gamma, \mathbb{T}_B\Gamma$ *en deux points distincts* $A, B \in \Gamma$ *sont parallèles alors il existe une droite sécante* (CD), *où* $C, D \in \Gamma$, $C \neq D$, *parallèle aux tangentes* $\mathbb{T}_A\Gamma, \mathbb{T}_B\Gamma$.

Il existe plusieurs démonstrations alternatives du théorème 3.6, voir e.g., [NR], [Ne], [GM], [Ko], [ASa], [AsSa], [Za$_1$]. Pour des analogues locaux voir [Zar], [Sai], et [LJM].

La preuve du théorème 3.6 dans [ZL$_1$] comprend plusieurs ingrédients, dont les suivants :

- Le théorème de Gutwirth sur la linéarisation d'action du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ sur le plan affine $\mathbb{A}^2$;
- La relation entre les caractéristiques d'Euler des membres d'un pinceau de courbes ;
- La fibre de Milnor d'un point singulier d'une courbe plane ;
- Les modèles minimaux de surfaces projectives rationnelles ;
- La structure complexe analytique des espaces de Teichmüller (d'après Ahlfors et Bers) ;
- Le fibré universel au dessus de l'espace de Teichmüller (d'après Grothendieck, Earle, et Engber).

Si la courbe Γ_0 est lisse alors $\Gamma_0 \cong \mathbb{A}^1$ et donc l'assertion du théorème 3.6 provient du théorème d'épimorphisme 3.2. Donc on suppose désormais que la courbe Γ_0 est singulière. Les étapes principales de la preuve donnée dans [ZL$_1$] sont décrites plus bas. Nous donnons tout d'abord quelques rappels, définitions et énoncés nécessaires.

3.3. **Linéarisation d'une action de $\mathbb{C}^*$ sur le plan affine.** Grâce au théorème de Gutwirth [Gut], toute action de $\mathbb{C}^*$ régulière sur le plan affine est équivalente à une action de $\mathbb{C}^*$ linéaire.

Quel est le rapport avec le théorème 3.6 ?

Soit $\Gamma = \{f = 0\}$ une courbe plane affine irréductible équivalente à une courbe $\Gamma_{k,l}$, c'est-à-dire

$$f \circ \alpha^{-1}(x, y) = x^k - y^l \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{A}^2) .$$

Alors le polynôme quasihomogène $g = f \circ \alpha^{-1}$ est quasi-invariant sous l'action linéaire θ de $\mathbb{C}^*$ sur le plan $\mathbb{A}^2$ donnée par

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^l x, \lambda^k y)\,,$$

i.e.,

$$g \circ \theta = \lambda^n \cdot g \quad \text{où} \quad n = kl\,.$$

En conséquence, le polynôme f est quasi-invariant sous l'action conjuguée (non-linéaire, en général)

$$\delta = \alpha^{-1}\theta\alpha\,.$$

Réciproquement, si f est quasi-invariant sous une action régulière $\mathbb{C}^* \to \mathrm{Aut}\,(\mathbb{A}^2)$ non-triviale alors $\Gamma = \{f = 0\}$ est équivalente à une courbe $\Gamma_{k,l}$. En effet, d'après le théorème de Gutwirth sur la linéarisation, f est équivalent à un polynôme quasihomogène g. De plus, étant irréductible, f est équivalent à un polynôme $x^k - y^l$, d'où l'assertion.

Il reste donc à construire une action régulière $\mathbb{C}^* \to \mathrm{Aut}\,(\mathbb{A}^2)$ sous laquelle f est quasi-invariant. La construction procède en plusieurs étapes.

3.4. **Factorisation de Stein.** Soient S une surface affine lisse, C une courbe lisse, et $f : S \to C$ un morphisme surjectif. Alors S et C admettent des complétés projectifs lisses $\bar{S}$ resp. $\bar{C}$ tels que f s'étend en un morphisme $\bar{f} : \bar{S} \to \bar{C}$. Il suffit de prendre pour $\bar{S}$ la résolution minimale de singularités du graphe de f. L'existence d'une telle résolution remonte aux travaux de Jung au début du XX$^\text{e}$ siècle.

D'après le théorème d'Ehresmann, en dehors d'une certaine partie finie Δ de la base $\bar{C}$, les deux familles f et $\bar{f}$ vues comme des familles de variétés lisses, sont localement triviales. Les fibres générales de ces familles ne sont pas forcement connexes. Cependant, il y a un diagramme commutatif de morphismes dit factorisation de Stein [Ha] :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\pi'"] \arrow[dr, "\pi"'] & & C' \arrow[dl, "\varphi"] \\ & C & \end{tikzcd} \tag{4}$$

où C' est une courbe lisse, tel que les fibres générales de la famille π' soient irréductibles. On dit alors que π' est un morphisme primitif. Par exemple, tout polynôme $f \in \mathbb{C}[x, y]$ admet une factorisation de Stein $f = \varphi \circ g$ où $\varphi \in \mathbb{C}[t]$ et $g \in \mathbb{C}[x, y]$ est primitif i.e., les fibres générales $g = c$ de g sont des courbes affines irréductibles [Fu]. Comme l'anneau $\mathbb{C}[x, y]$ est factoriel, si f est irréductible alors le morphisme $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$ est primitif.

3.5. **Pinceaux de courbes et la caractéristique d'Euler.** Soit désormais $f : S \to C$ un morphisme primitif, avec S et C comme ci-dessus. Désignons par Γ_c la fibre de f au-dessus d'un point $c \in C$, par Γ une fibre générale de f, et soit $\Delta \subseteq C$ le discriminant de f i.e., l'ensemble de points de C dont les fibres correspondantes de f sont dégénérées. Alors Γ est une surface de Riemann de genre $g \geq 0$ privée d'un nombre fini $n \geq 1$ de points. Ainsi $e(\Gamma) = 2 - 2g - n \leq 1$. On a la formule de Suzuki [Su$_2$] suivante [5] :

$$\sum_{c \in \Delta} (e(\Gamma_c) - e(\Gamma)) = e(S) - e(\Gamma)e(C)\,.$$

De plus, pour tout $c \in \Delta$, on a $e(\Gamma_c) > e(\Gamma)$ excepté dans le cas où les deux courbes Γ et Γ_c sont isomorphes soit à $\mathbb{A}^1$, soit à $\mathbb{A}^1_* = \mathbb{C}^*$ (dans ce dernier cas Γ_c est une fibre multiple). On montrera plus bas que, sous nos hypothèses, $g = g(\Gamma) \geq 1$. Donc le cas exceptionnel ne se présente pas.

Par conséquent, si pour un polynôme irréductible $f \in \mathbb{C}[x, y]$, la courbe $\Gamma_0 = f^{-1}(0)$ est simplement connexe, alors on a $\Delta \subseteq \{0\}$. En effet, d'après le théorème de Suzuki la famille $f : S = \mathbb{A}^2 \setminus \Gamma_0 \to C = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ vérifiant $e(S) = e(C) = 0$, n'a pas de fibres dégénérées.

3.6. **La fibre de Milnor.** Soit P un point singulier de la courbe $\Gamma_0 = f^{-1}(0)$. Cette courbe Γ_0 étant irréductible et simplement connexe, elle est localement irréductible en P, c'est-à-dire qu'elle possède une seule branche locale en P. Autrement dit, P est un cusp de Γ_0.

Soit $B = B(P, \varepsilon)$ la boule ouverte de $\mathbb{A}^2$ centrée en P de rayon $\varepsilon > 0$. Soit $\omega = \{t \in \mathbb{C} | |t| < \delta\}$ le disque ouvert de rayon $\delta > 0$ centré en 0, et soit $T = f^{-1}(\omega) \subseteq \mathbb{A}^2$ son image réciproque. Considérons l'ouvert $\Pi = \Pi_{f,\varepsilon,\delta} = T \cap B \subseteq \mathbb{A}^2$. D'après la théorie de Milnor [Mil, 10.2], lorsque $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit et $\delta > 0$ est suffisamment petit par rapport à ε, la restriction

$$f|(\Pi \setminus \Gamma_0) : \Pi \setminus \Gamma_0 \to \omega \setminus \{0\}$$

définit un fibré lisse.

La *fibre de Milnor* de la singularité (Γ_0, P) est la fibre générale M de ce fibré. C'est une surface de Riemann à bord connexe, de genre $g(M)$. Le *nombre de Milnor* de (Γ_0, P) est l'entier $\mu = 2g(M)$. D'après le théorème de Milnor, $\mu = 0$ si et seulement si P est un point lisse de Γ_0. Donc sous nos hypotheses $g(M) > 0$. Ainsi $e(M) = 1 - 2g(M) < 0$. De même

$$e(\Gamma \setminus M) = 1 - 2g(\Gamma \setminus M) - n \leq 0\,.$$

La caractéristique d'Euler étant additive on obtient

$$e(\Gamma) = e(M) + e(\Gamma \setminus M) = 2 - 2(g(M) + g(\Gamma \setminus M)) - n = 2 - 2g(\Gamma) - n < 0\,.$$

5. Voir aussi [Za$_2$], [Gu]. Cette formule était connue auparavant pour les pinceaux de courbes projectives.

En particulier, $g(\Gamma) = g(M) + g(\Gamma \setminus M) \geq g(M) \geq 1$.

Une surface de Riemann R est dite hyperbolique si son revêtement universel $\tilde{R}$ est biholomorphe au disque unité. Pour toute surface de Riemann hyperbolique R, la métrique de Poincaré provient de celle du disque unité, et donc de courbure négative constante. D'après le théorème de Gauss-Bonnet et la classification des surfaces de Riemann, $e(R) < 0$ si et seulement si R est hyperbolique.

Par conséquent, pour tout $c \neq 0$ la courbe $\Gamma_c = f^{-1}(c)$ représente une surface de Riemann hyperbolique de type fini (g, n), où $g, n \geq 1$. (On dit qu'une surface de Riemann est de type fini si c'est une surface compacte privée d'un nombre fini de points.)

3.7. **Espaces de Teichmüller : la théorie d'Ahlfors-Bers.** Soit R une surface de Riemann de type fini (g, n). On dit que R est marquée lorsqu'on fixe un choix de générateurs du groupe fondamental $\pi_1(R)$. L'espace de Teichmüller $T(g, n)$ est par définition l'espace topologique des classes d'équivalence des surfaces de Riemann marquées de type (g, n). D'après la théorie d'Ahlfors-Bers [Ah], [AhBe], [Be$_1$], [Be$_2$], l'espace $T(g, n)$ possède une unique structure complexe "naturelle". Muni de cette structure, l'espace $T(g, n)$ est biholomorphe à un ouvert borné de $\mathbb{C}^{3g-3+n}$ (qui, à son tour, est homéomorphe à la boule ouverte de $\mathbb{C}^{3g-3+n}$). La preuve donnée dans [Be$_2$] évoque l'inégalité de Nehari [Neh] pour les fonctions univalentes d'une variable complexe.

Application : l'espace $T(g, n)$ étant borné, d'après le théorème de Liouville toute application holomorphe $\mathbb{C} \to T(g, n)$ est constante.

3.8. **Familles analytiques de surfaces de Riemann.** Une famille analytique de surfaces de Riemann de type fini (g, n) est une surjection holomorphe $\pi : X \to B$ où :

(1) X et B sont des variétés complexes et $\dim X = \dim B + 1$;

(2) il existe une extension holomorphe propre $\bar{\pi} : \bar{X} \to B$ pour laquelle :

  (a) $\bar{X} \supseteq X$ est une variété complexe ;

  (b) le rang de la différentiel $d\bar{\pi}$ est maximal en tout point ;

  (c) toute fibre de $\bar{\pi}$ est une surface de Riemann compacte de genre g ;

  (d) $\bar{X} \setminus X$ est la réunion de n sections deux à deux disjointes.

On dit que π est *marquée* si toute fibre de π l'est, et le marquage est continue sur B.

D'après les travaux de Grothendieck [Gr], Earle [Ea], et Engber [En] (voir aussi Hubbard [Hu]) il existe une famille universelle $\pi_{g,n} : V(g, n) \to T(g, n)$ de surfaces de Riemann de type fini (g, n) marquées. Étant donnée une famille quelconque $\pi : X \to B$ de surfaces de Riemann de type fini (g, n) marquées, il y a une application holomorphe naturelle $\varphi : B \to T(g, n)$ qui à tout point $b \in B$ associe le point de l'espace de Teichmüller $T(g, n)$ correspondant à la fibre de π au dessus de b. De plus, la famille au-dessus de B obtenue à partir de la famille universelle par “le changement de base" [6] φ, est isomorphe à la famille π.

Réciproquement, toute application holomorphe $\varphi : B \to T(g,n)$ correspond à une famille $\pi : X \to B$ qui s'obtient à partir de la famille universelle par le changement de base φ.

3.9. **Familles isotriviales de courbes.** Soit maintenant $\pi : X \to \mathbb{A}^1$ une famille de surfaces de Riemann hyperboliques de type (g,n) au dessus de la droite affine. Puisque la base est topologiquement contractible, cette famille est topologiquement triviale, et donc elle admet un marquage. Par conséquent, elle s'obtient de la famille universelle par un changement holomorphe de base $\varphi : \mathbb{A}^1 \to T(g,n)$. Cependant, d'après le théorème de Bers cité plus haut, φ est constante. Ainsi la famille π est analytiquement triviale, et donc il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Gamma \times \mathbb{A}^1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "pr_2"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{A}^1 \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{A}^1 \end{tikzcd} \tag{5}$$

où Γ est une surface de Riemann de type fini (g,n) et α un biholomorphisme.

Soit encore $\Gamma_0 \subseteq \mathbb{A}^2$ une courbe irréductible simplement connexe. On suppose que Γ_0 est singulière, et donc Γ_0 est la seule fibre dégénérée de la famille $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$. Sa fibre générale Γ est une surface de Riemann de genre $g \geq 1$.

Par le changement de base $\exp : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1_*$ on obtient, à partir de la famille $f : \mathbb{A}^2 \setminus \Gamma_0 \to \mathbb{A}^1_*$, une famille $\tilde{f} : X \to \mathbb{A}^1$. D'après le résultat de la section précédente, cette famille induite est analytiquement triviale. En particulier, toutes ses fibres sont isomorphes à une même surface de Riemann Γ. Comme les deux familles f et $\tilde{f}$ sont localement isomorphes, la famille originale $f : \mathbb{A}^2 \setminus \Gamma_0 \to \mathbb{A}^1_*$ est localement analytiquement triviale, et toutes ces fibres sont isomorphes à Γ. On dit alors que la famille f est isotriviale.

3.10. **Construction d'une action de $\mathbb{C}^*$.** Dans un premier temps, on construit une action régulière effective du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ sur la surface affine $\mathbb{A}^2 \setminus \Gamma_0$ de sorte que le polynôme f soit quasi-invariant par cette action.

On fixe une fibre $\Gamma = \Gamma_1 = f^{-1}(1)$. À partir du point $1 \in \mathbf{A}^1_*$, on fait un tour autour de 0, et on le suit par des trivialisations locales de f. On revient alors avec un automorphisme $\mu : \Gamma \to \Gamma$ dit *monodromie* de f.

6. C'est à dire par la construction “produit croisé".

Or pour une surface de Riemann hyperbolique R de type fini, le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}\,(R) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{hol}}\,(R)$ est fini. Donc μ est d'ordre fini : $\mu^m = \mathrm{id}$, où $m \in \mathbf{N}^*$.

On effectue maintenant le changement de base

$$\nu_m : \mathbb{A}^1_* \to \mathbb{A}^1_*, \;\; t \longmapsto t^m\,.$$

Cela trivialise la monodromie. Ainsi la monodromie de la famille induite $f_m : X_m \to \mathbb{A}^1_*$ est l'identité. Par conséquent, cette famille f_m est triviale. On a alors le diagramme commutatif de morphismes

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \times \mathbb{A}^1_* \arrow[r, "\alpha_m"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & X_m \arrow[r, "\beta_m"] \arrow[d, "f_m"'] & X = \mathbb{A}^2 \setminus \Gamma_0 \arrow[d, "f"'] \\
\mathbb{A}^1_* \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{A}^1_* \arrow[r, "t \longmapsto t^m"] & \mathbb{A}^1_*
\end{tikzcd} \tag{6}$$

où α_m est un isomorphisme et β_m un revêtement non-ramifié galoisien cyclique d'ordre m.

Grâce au carré de gauche du diagramme (6), le groupe $\mathbb{C}^*$ agit sur la surface X_m de sorte que le morphisme f_m devient équivariant par rapport à l'action standard de $\mathbb{C}^*$ sur la base $\mathbb{A}^1_*$. De plus, il existe des actions effectives régulières de $\mathbb{C}^*$ sur la base et sur l'espace total de la famille f qui rend le diagramme (6) équivariant.

En effet, l'action du groupe de Galois de β commute avec l'action du groupe $\mathbb{C}^*$ sur la surface X_m. Pour voir cela, on remarque que l'action galoisienne sur la surface-produit $\Gamma \times \mathbb{A}^1_*$ est engendrée par une transformation $\mu' = (\gamma, \delta)$, où $\gamma \in \mathrm{Aut}\,(\Gamma)$, $\delta \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{A}^1_*)$, et $\gamma^m = \mathrm{id}$, $\delta^m = \mathrm{id}$. Par construction, l'action régulière de $\mathbb{C}^*$ sur la surface $\Gamma \times \mathbb{A}^1_*$ est donnée par $\lambda \cdot (x, t) = (x, \lambda t)$. Ainsi ces deux actions commutent. D'où l'existence d'une descente de l'action de $\mathbb{C}^*$ sur la famille quotient

$$f : \mathbb{A}^2 \setminus \Gamma_0 = X_m / \langle \mu' \rangle \to \mathbb{A}^1_*$$

de sorte que f devient quasi-invariant (voir [Za$_2$]).

3.11. **Comment étendre l'action de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{A}^2$.** Notons θ l'action de $\mathbb{C}^*$ sur la surface $\mathbb{A}^2 \setminus \Gamma_0$ construite dans la section précédente. Pour étendre cette action θ sur $\mathbb{A}^2$, il suffit de trouver une orbite de θ qui n'est pas fermée dans $\mathbb{A}^2$. En effet, soit $O \cong \mathbb{C}^*$ une telle orbite. Alors l'adhérence $\bar{O}$ contient un point $Q \in \Gamma_0$. Soit $\bar{O} = \{g = 0\}$, où $g \in \mathbb{C}[x, y]$. On a $f(Q) = g(Q) = 0$. Soit le polyèdre

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \,|\, |f(x, y)| < \varepsilon, |g(x, y)| < \varepsilon\}\,.$$

Lorsque $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, la composante connexe W_0 du polyèdre W contenant le point Q est relativement compacte dans $\mathbb{A}^2$. Les polynômes f et g sont quasi-invariants par θ, et donc il existe $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \neq 0$ tels que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a

$$f \circ \theta_\lambda = \lambda^a \cdot f \qquad \text{et} \qquad g \circ \theta_\lambda = \lambda^b \cdot g\,. \tag{7}$$

Par conséquent, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$, l'ouvert $W_0 \setminus \Gamma_0$ est stable par l'action θ_λ. Comme W_0 est borné, d'après le théorème de Riemann les fonctions-coordonnées de $\theta_\lambda|W_0$ s'étendent sur W_0. Cela permet de conclure que θ s'étend sur $\mathbb{A}^2$.

3.12. **Existence d'une orbite non-fermée : retour à la fibre de Milnor.** L'exposition dans cette partie suit [Za$_4$] ; voir aussi [Za$_3$] pour une preuve alternative.

Il existe une courbe lisse projective $\bar{\Gamma}$ contenant Γ comme ouvert de Zariski, et une surface projective lisse V contenant le plan $\mathbb{A}^2$ comme ouvert de Zariski, telle que le morphisme $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$ s'étend en un morphisme $\bar{f} : V \to \mathbb{P}^1$ ayant $\bar{\Gamma}$ comme fibre générale.

Le revêtement étale cyclique

$$\beta_m \circ \alpha_m : \Gamma \times \mathbb{A}^1_* \to \mathbb{A}^2 \setminus \Gamma_0$$

dans le diagramme (6) s'étend en une application rationnelle équivariante $\rho : \Gamma \times \mathbb{P}^1 \to V$. On obtient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \bar{\Gamma} \times \mathbb{P}^1 \arrow[r, dashed, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & V \arrow[d, "\bar{f}"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "t \longmapsto t^m"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd} \tag{8}$$

.

Soit $P_1, \ldots, P_k \in \bar{\Gamma} \times \{0\}$ $(k \geq 0)$ l'ensemble (éventuellement vide) des points dans lesquels ρ n'est pas bien défini. La restriction $\rho|(\bar{\Gamma} \times \{0\})$ s'étend en un morphisme $\rho : \bar{\Gamma} \to \bar{f}^{-1}(0)$. Il y a trois cas :

(1) $\rho(\bar{\Gamma}) = Q \in \Gamma_0$,
(2) $\rho(\bar{\Gamma}) = \bar{\Gamma}_0$,
(3) $\rho(\bar{\Gamma}) \cap \Gamma_0 = \emptyset$.

Dans les deux premiers cas, l'orbite générale $\rho(x \times \mathbb{A}^1_*)$ de l'action θ (où $x \in \Gamma$) n'est pas fermée dans $\mathbb{A}^2$, ce qu'on cherche à montrer. Donc il reste à exclure la troisième possibilité.

Soit alors $\rho(\bar{\Gamma}) \cap \Gamma_0 = \emptyset$, et donc toute orbite $\rho(\{x\} \times \mathbb{A}^1_*)$ de θ est fermée dans $\mathbb{A}^2$. Fixons une fibre générale $\Gamma = \Gamma_\xi = f^{-1}(\xi)$, où $|\xi|$ est suffisamment petit. Les orbites $\rho(\{P_i\} \times \mathbb{A}^1_*)$, $i = 1, \ldots, k$, croisent la fibre Γ_ξ dans un ensemble fini T de points. Soit $\omega \subseteq \bar{\Gamma}$ une réunion finie de disques deux à deux disjoints centrés dans les points de l'ensemble fini $T \cup (\bar{\Gamma} \setminus \Gamma)$. Alors $K = \bar{\Gamma} \setminus \omega$ est une surface de Riemann compacte, à bord, de genre $g(K) = g(\Gamma) > 0$. Soit B une boule centrée en P, où P

est un point singulier de Γ_0, de rayon suffisamment petit. D'après notre hypothèse, on a $\lambda \cdot K \cap B = \emptyset$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ suffisamment proche de 0. Ainsi $\Gamma \cap \lambda^{-1} \cdot B \subseteq \omega$ est une réunion disjointe de surfaces de Riemann de genre zéro. D'autre part,

$$\Gamma \cap \lambda^{-1} \cdot B \cong \lambda \cdot \Gamma \cap B = \Gamma_{\lambda^m \xi} \cap B$$

est la fibre de Milnor M de la singularité (Γ_0, P). Cela contredit le fait que $g(M) > 0$.

3.13. **Retour à la linéarisation de l'action de $\mathbb{C}^*$.** Cette section nous permet de remplacer la référence sur le théorème de Gutwirth par un argument direct. Soit $\bar{\theta}$ l'action de $\mathbb{C}^*$ étendue à $\mathbb{A}^2$. La courbe Γ_0 est stable par $\bar{\theta}$. Dans le cas (1) cette courbe coïncide avec l'adhérence d'une orbite de $\bar{\theta}$, tandis que dans le cas (2) elle correspond aux points fixes de $\bar{\theta}$. En particulier le point singulier $P \in \Gamma_0$ est fixé par $\bar{\theta}$.

Dans le cas (2), l'ensemble des point fixes doit être une courbe lisse. Comme la courbe Γ_0 est singulière, ce cas ne se produit pas.

Ainsi l'action $\bar{\theta}$ possède le seul point fixe attractif P. Cette action définit une graduation

$$A = \mathbb{C}[x, y] = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A_k \quad \text{où} \quad A_k = \{f \in A \mid f \circ \bar{\theta}_\lambda = \lambda^k \cdot f\} \;\text{ et }\; A_0 = \mathbb{C}\,.$$

Il existe alors un système fini de générateurs $f_1, \ldots, f_s$ de A, où $f_i \in A_{k_i}$, qui détermine donc un plongement équivariant

$$\tau = (f_1, \ldots, f_s) : \mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{A}^s\,,$$

où $\mathbb{A}^s$ est équipé de l'action de $\mathbb{C}^*$ linéaire

$$\lambda.(x_1, \ldots, x_s) = (\lambda^{k_1} \cdot x_1, \ldots, \lambda^{k_s} \cdot x_s)\,.$$

On peut s'arranger pour que le morphisme τ envoie le point P sur l'origine $0 \in \mathbb{A}^s$.

Soit $X = \tau(\mathbb{A}^2) \subseteq \mathbb{A}^s$, et soit $T = T_0 X$ le plan tangent à X en l'origine. Il existe une projection linéaire équivariante $\pi : \mathbb{A}^s \to T$. Il est facile de voir que la restriction $\pi|X$ donne un isomorphisme équivariant $X \cong \mathbb{A}^2$, où le plan $\mathbb{A}^2$ est muni d'une action de $\mathbb{C}^*$ linéaire

$$\lambda.(x, y) \longmapsto (\lambda^l x, \lambda^k y) \quad \text{où} \quad \gcd(k, l) = 1\,.$$

En effet, l'origine est un point fixe attractif pour ces deux actions $\mathbb{C}^*$.

L'image par π de la courbe Γ_0 dans le plan $T \cong \mathbb{A}^2$ est l'adhérence d'une orbite. Cette image ne peut pas être un axe car Γ_0 est singulière. Ainsi c'est une courbe $\alpha x^k - \beta y^l = 0$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$. Cela achève la démonstration du théorème 3.6.

4. Courbes simplement connexes tracées sur des surfaces

Le Théorème 3.6 et sa démonstration incitent à étudier :

- les courbes simplement connexes tracées sur des surfaces affines qui ressemblent au plan affine, par exemple les surfaces $\mathbb{Q}$-acycliques ;

- les courbes planes projectives rationnelles n'ayant que des singularités irréductibles ;
- les surfaces affines portant une action de groupe algébrique.

D'autre part, on peut essayer d'obtenir

- une classification similaire pour d'autres classes de courbes planes affines.

Dans ce qui suit nous donnons un bref résumé le long de chacune de ces quatre "grandes lignes".

4.1. **Surfaces $\mathbb{Q}$-acycliques et courbes simplement connexes.** Une surface algébrique irréductible X est dite $\mathbb{Q}$-acyclique (ou bien un plan de $\mathbb{Q}$-homologie) si $H_i(X;\mathbb{Q}) = 0$ $\forall i \geq 1$, et acyclic (ou bien un plan d'homologie) si $H_i(X;\mathbb{Z}) = 0$ $\forall i \geq 1$. Clairement, une surface $\mathbb{Q}$-acyclique est une surface ouverte. Comme exemple d'une telle surface lisse, on peut considérer le complémentaire $\mathbb{P}^2 \setminus \Gamma$ d'une courbe rationnelle cuspidale $\Gamma \subseteq \mathbb{P}^2$. Les surfaces affines $\mathbb{Q}$-acycliques ont été beaucoup étudiées, voir e.g., [Ra_1], [Miy_2], [Fu], [FZ_4], [DP], [Or_2]. L'invariant numérique principal d'une telle surface X est la dimension de Kodaira logarithmique $\bar{k}(X)$ (voir [Ii] pour la définition). On a $\bar{k}(X) \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$. Si $\bar{k}(X) = 2$ alors on dit que X est de type général ; sinon X est dite spéciale. Toute surface $\mathbb{Q}$-acycliques lisse (ou bien n'ayant que de singularités "modérées") est rationnelle [GPS]. Il existe une classification des surfaces affines $\mathbb{Q}$-acycliques lisses spéciales, voir e.g., [Miy_2] ou [FZ_4].

En ce qui concerne les courbes simplement connexes irréductibles Γ tracées sur des surfaces affines $\mathbb{Q}$-acycliques lisses X, une classification de tels couples (X, Γ), est donnée dans [Za_4]. Elle intègre de nombreux résultats antérieurs de plusieurs auteurs (voir e.g., [GM], [GP], [GMMR], [KK]), et utilise l'invariant $(\bar{k}(X), \bar{k}(X \setminus \Gamma))$ du couple. En particulier, on a l'analogue suivant du Théorème 3.6 [Za_4].

Théorème 4.1. *Soit Γ une courbe simplement connexe irréductible singulière tracée sur une surface affine $\mathbb{Q}$-acyclique lisse X. Alors il existe un isomorphisme $X \cong \mathbb{A}^2$ qui transforme Γ en une courbe $\Gamma_{k,l}$ d'équation $x^k - y^l = 0$, où $k, l > 1$ sont premiers entre eux.*

Par contre, le théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki 3.2, 3.3 n'admet pas une telle généralisation. En effet, il existe des exemples de surfaces lisses proches du plan affines où on peut plonger la droite affine $\mathbb{A}^1$ de deux façons non-équivalentes ; voir [GMMR] ou [KK]. Cependant, une telle surface lisse ne peut pas être acyclique. En effet, on peut trouver une courbe $\Gamma \cong \mathbb{A}^1$ sur une surface acyclique lisse $X \not\cong \mathbb{A}^2$ si et seulement si $\bar{k}(X) = 1$. Dans ce dernier cas une telle courbe $\Gamma \subseteq X$ est unique [Za_2].

4.2. **Courbes planes projectives simplement connexes.** Ce sont les courbes planes rationnelles cuspidales, voir e.g., [Yo]. On dit qu'une telle courbe $\Gamma \subseteq \mathbb{P}^2$ est de type (d, m) si $\deg(\Gamma) = d$ et la multiplicité maximal des points singuliers de Γ est égale à m. Les courbes rationnelles cuspidales de type $(d, d-2)$ et $(d, d-3)$, ayant trois cusps au moins, sont décrites dans [FZ_1], [FZ_2]. Elles forment deux suites infinies, à équivalence projective près. On dit que deux courbes Γ_1, Γ_2 dans $\mathbb{P}^2$ sont projectivement équivalentes si $\Gamma_2 = \alpha(\Gamma_1)$ pour un automorphisme $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2) = \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$. Fenske [$Fe_1$], [$Fe_2$] et Sakai-Tono [ST] (voir aussi e.g., [Yo], [To_2], [Or_1], [SS]) ont étendu cette classification pour les courbes de mêmes types ayant un ou deux cusps, et également pour les courbes de type $(d, d-4)$ ayant trois cusps au moins, dont les déformations sont non-obstructives. Cela donne une base solide à la conjecture suivante [FZ_2] :

Conjecture de la rigidité. *Pour une courbe rationnelle cuspidale $\Gamma \subseteq \mathbb{P}^2$ ayant trois cusps au moins, toute déformation plongée équisingulière est triviale modulo l'action du groupe projectif sur le plan $\mathbb{P}^2$, et non-obstructive.*

Cela veut dire, en particulier, que toute courbe rationnelle cuspidale Γ' proche de Γ, ayant les mêmes invariants numériques des cusps, est en fait l'image de Γ par une transformation projective. Cette conjecture à provoqué une activité forte intéressante. Dès qu'on l'accepte, on sait d'après [OrZ] que le nombre de points singuliers (dont des cusps) ne peut pas excéder 9. En fait, d'après un résultat dû à Tono [To_1], toute courbe plane rationnelle cuspidale n'a que 8 cusps au plus. Dans une série d'articles, Fernández de Bobadilla, Luengo, Melle-Hernández, et Némethi ont obtenu de nouveaux résultats autour de la conjecture de rigidité, en se servant de la théorie de singularités superisolées de surfaces (voir le résumé [FBLMHN]). Plusieurs simulations numériques ont été entreprises confirmant la conjecture, voir e.g., [Pi].

4.3. **Actions de groupes sur les surfaces affines.** Beaucoup d'efforts se sont concentrés autour de la question suivante proposée par Kambayashi [Kam] :

Est-ce que l'analogue du théorème de Gutwirth est valable dans les dimensions supérieures ?

En effet, sous certaines circonstances, une action d'un groupe réductible sur l'espace affine est linéarisable [BB], [KaR], [KP], [Pan], [Po]. La linéarisabilité d'une action $\mathbb{C}^*$ sur l'espace affine $\mathbb{A}^3$ est un théorème difficile dû à Koras et Russell [KoR_1]-[KoR_3], avec une participation de Kaliman et Makar-Limanov [KML], [KKMLR]. L'existence d'une action $\mathbb{C}^*$ non-linéarisable sur $\mathbb{A}^n$ pour $n \geq 4$ reste un problème ouvert. Cependant, toute groupe réductible connexe non-abélien G admet une action régulière non-linéarisable sur un certain espace affine $\mathbb{A}^n$ [Kn]. Le tout premier exemple concret a été proposé par Schwarz [Sc], voir également Kraft-Schwarz [KS]. Voir aussi Masuda-Moser-Jauslin-Petrie [MMJP], Freudenburg-Moser-Jauslin [FMJ] pour des exemples d'actions non-linéarisables de groupes finis non-abéliens, et voir Gurjar-Koras-Russell [GKR] à propos de la structure de l'espace quotient sous l'action d'un groupe réductible sur $\mathbb{A}^n$.

Le théorème de Jung sur la structure de produit amalgamé du groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ n'a pas d'analogue dans les dimensions supérieures. En effet, Nagata a proposé un contre-exemple conjectural d'un automorphisme de l'espace affine $\mathbb{A}^3$ qui ne possède aucune décomposition en produit d'automorphismes linéaires et triangulaires. Dans une série d'articles [SU_1], [SU_2], Shestakov et Umirbaev ont confirmé cette conjecture de Nagata ; voir aussi [Ku], [Ve_1], [BV], [Ki] pour quelques approches alternatives.

En ce qui concerne les actions du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ ou du groupe additif $\mathbb{C}_+$ sur les surfaces affines autres que le plan affine, la situation est devenue récemment plus nette.

Étant donnée une surface affine normale V et une action du groupe $\mathbb{C}^*$ sur V, il existe une présentation "orbifolde", appelée présentation de Dolgachev-Pinkham-Demazure dans [FZ_1], [FZ_2], et qui permet d'exprimer la géométrie de V, ainsi que celle de l'action de $\mathbb{C}^*$ sur V, en termes de couple de diviseurs rationnels (D_+, D_-) sur une courbe lisse C. À partir de cette description, on peut décrire les complétées de telles surfaces et leur transformations birationnelles [FKZ_1], [FKZ_2]. Ceci permet, dans certains cas, d'établir l'unicité pour actions de $\mathbb{C}^*$ sur V à conjugaison près dans le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(V)$ [FZ_3], [FKZ_3]. Ce dernier groupe est souvent de dimension infinie. Par exemple, c'est le cas pour le plan affine $\mathbb{A}^2$, ainsi que pour les *surfaces de Gizatullin.* Une telle surface V peut être complétée par une chaîne de courbes rationnelles d'autosections $(0, 0, w_1, \ldots, w_n)$, où $w_i \le -2\ \forall i$. Si $w_i = -2\ \forall i$ alors une telle surface $V = V_n$ est dite *surface de Danilov–Gizatullin.* En fait, V_n est le complémentaire d'une section ample dans une surface de Hirzebruch, c'est-à-dire, dans une surface lisse rationnelle réglée. D'après Danilov et Gizatullin [DG], le groupe $\mathrm{Aut}\,(V_n)$ possède une structure du produit amalgamé, exactement comme dans le cas du plan affine $\mathbb{A}^2$ (d'après le théorème de Jung).

Si $w_i = -2$ pour tout i sauf pour une valeur de i, alors nous appelons une telle surface de Gizatullin *spéciale.* En ces termes le résultat principal de [FKZ_4] est le suivant.

Théorème 4.2. *Les surfaces affines lisses V admettant une action $\mathbb{C}^*$ sont reparties en 4 classes :*

(1) *les surfaces affines toriques ;*

(2) *les surfaces de Danilov-Gizatullin V_n ($n \ge 2$) ;*

(3) *les surfaces de Gizatullin spéciales ;*

(4) *toutes les autres surfaces,*

de sorte que l'ensemble des classes de conjugaison des actions $\mathbb{C}^*$ sur V est :

dénombrable et infini dans le cas (1) ;

fini de cardinal n pour V_n dans le cas (2) ;

dépend de 1 où 2 paramètres continues dans le cas (3) ;

contient seulement 1 où 2 éléments dans le cas (4).

Pour des théorèmes analogues concernant les actions du groupe additif $\mathbb{C}_+$ sur de surfaces affines lisses, voir e.g., [Re], [Fi], [Du_1], [Du_2], [MM], [FKZ_3], [FKZ_4]. En dimension supérieure, voir e.g., [Da] et [Li]. Ce dernier article traite les actions du groupe additif $\mathbb{C}_+$ sur les variétés affines toriques ou les variétés affines proches des toriques. Voir également [BPV], [CL], [CNR], [De], [Fu], [ML_1]-[ML_3], e.a.

4.4. **Sur quelques classes de courbes planes affines.** On déduit facilement du théorème 3.7 le corollaire suivant.

Corollaire 4.3. *Toute courbe plane affine irréductible simplement connexe n'admet qu'un seul plongement dans le plan affine $\mathbb{A}^2$, à l'action du groupe d'automorphismes* $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ *près.*

Donc la question se pose :

Pour quelles courbes planes affines Γ l'ensemble $\mathcal{C}(\Gamma)$ des classes d'équivalence des plongements $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ modulo l'action du groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$ *est "petit" ?*

Voici une première réponse due à Abhyankar et Singh [ASi].

Théorème 4.4. $\mathrm{card}(\mathcal{C}(\Gamma)) < +\infty$ *pour toute courbe plane irréductible Γ ayant une seule place à l'infini.*

Soit Γ_0 une courbe donnée par l'équation $p(x,y) = 0$, où $p \in \mathbb{C}[x,y]$ est irréductible. D'après Ganong [Ga], si G_0 a une seule place à l'infini, alors toute courbe $\Gamma_c = \{p(x,y) = c\}$ $(c \in \mathbb{C})$ a une seule place à l'infini, elle aussi.

Le théorème 4.4 d'Abhyankar-Singh n'est plus valable pour les courbes ayant deux places à l'infini au moins, voir e.g., [BZ]. Cependant, d'après W. Neumann [Ne], tous les plongements de la courbe rationnelle nodale d'équation $y^2 - x^3 - x^2 = 0$ dans le plan affine $\mathbb{A}^2$ sont équivalents (voir aussi [BZ], [Miy_4], [Ok], [FSY_1], [FSY_2], [Su_2], [To_2], [Wi_1], [Wi_2]).

Le théorème 3.7 reste valable sans aucune hypothèse d'irréductibilité, avec l'énoncé suivante [ZL_1] :

Théorème 4.5. *Toute courbe simplement connexe $\Gamma \subseteq \mathbb{A}^2$ est quasi-homogène par rapport à un système de coordonnées du plan affine $\mathbb{A}^2$ bien choisi.*

De même, on peut décrire de manière explicite toutes les courbes planes affines Γ ayant la caractéristique d'Euler $e(\Gamma) = 1$ [Za_1]. On peut aussi décrire tous les polynômes $p \in \mathbb{C}[x,y]$ isotriviaux i.e., tels que les fibres generales $G_c = \{p(x,y) = c\}$ sont deux à deux isomorphes (voir [Ka_1] et [Za_5]), en particulier, tous les polynômes ayant une seule fibre dégénérée [Bo]. Enfin, il y a de nombreuse études des polynômes en deux variables dont les fibres générales sont des courbes rationnelles, voir e.g., [MS], [Ka_4], [Za$_5$], [NN], [Sas]. Cela a été utilisé par Lê Dung Tráng pour la Conjecture Jacobienne [LDT].

Références

[AM$_1$] S.S. Abhyankar, T.T. Moh, *Newton-Puiseux expansion and Tschirnhausen transformation.* I, J. Reine Angew. Math. 260 (1973), 47–83. II, *ibid* 261 (1973), 29-54.

[AM$_2$] S.S. Abhyankar, T.T. Moh, *Embeddings of the line in the plane*, J. Reine Angew. Math. 276 (1975), 148–166.

[ASa] S.S. Abhyankar, A. Sathaye, *Uniqueness of plane embeddings of special curves*, Proceedings of the AMS, 4 (1996), 1061–1069.

[ASi] S.S. Abhyankar, B. Singh, *Embeddings of certain curves in the affine plane*, Amer. J. Math. 100(1978), 99-175.

[ACO] N. A'Campo, M. Oka, *Geometry of plane curves via Tschirnhausen resolution tower*, Osaka J. Math. 33 (1996), 1003–1033.

[Ah] L.V. Ahlfors, *On quasiconformal mappings*, J. Analyse Math. 3, (1954), 1–58 ; correction, *ibid.* 207–208.

[AhBe] L.V. Ahlfors, L. Bers, *Riemann's mapping theorem for variable metrics*, Ann. of Math. (2) 72 (1960), 385–404.

[AB] E. Artal Bartolo, *Une démonstration géométrique du théorème d'Abhyankar-Moh*, J. Reine Angew. Math. 464 (1995), 97–108.

[ABCND] E. Artal Bartolo, P. Cassou-Nogués, et A. Dimca, *Sur la topologie des polynômes complexes*, Progress in Mathematics 162 (1998), 317–343.

[ABCNLMH] E. Artal Bartolo, P. Cassou-Nogés, I. Luengo, et A. Melle-Hernández, *On the log-canonical threshold for germs of plane curves*, Singularities I, 1–14, Contemp. Math. 474, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[AsSa] A. Assi, A. Sathaye, *On quasihomogeneous curves*, Affine Algebraic Geometry, 33–56, Osaka Univ. Press, Osaka, 2007.

[BML] T. Bandman, L. Makar-Limanov, *Affine surfaces with $AK(S) = \mathbb{C}$*, Michigan Math. J. 49 (2001), 567–582.

[Ba] H. Bass, *Automorphisms of polynomial rings*, Abelian group theory (Honolulu, Hawaii, 1983), 762–771, Lecture Notes in Math. 1006, Springer, Berlin, 1983.

[BCW] H. Bass, E.H. Connell, et D. Wright, *The Jacobian conjecture : reduction of degree and formal expansion of the inverse.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 7 (1982), 287–330.

[BH] H. Bass, W. Haboush, *Linearizing certain reductive group actions*, Trans. Amer. Math. Soc. 292 (1985), 463–482.

[Be$_1$] L. Bers, *Spaces of Riemann surfaces*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958, Cambridge Univ. Press (1960), 349-361.

[Be$_2$] L. Bers, *Correction to Spaces of Riemann surfaces as bounded domains*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 465-466.

[Ber] J. Bertin, *Sur la topologie des surfaces affines réglées*, Compositio Math. 47 (1982), 71–83.

[BB] A. Bialynicki-Birula, *Remarks on the action of an algebraic torus on k^n. I*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astr., Phys. XIV (1967), 177–188 ; *II, ibid.*, XV (1967), 123–125.

[BPV] J. Blanc, I. Pan, T. Vust, *On birational transformations of pairs in the complex plane*, Geom. Dedicata 139 (2009), 57–73.

[Bo] A. Bodin, *Classification of polynomials from $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}$ with one critical value*, Math. Z. 242 (2002), 303–322.

[BV] Ph. Bonnet, S. Vénéreau, *Relations between the leading terms of a polynomial automorphism*, arXiv :0808.1821, 20p.

[BZ] M. Borodzik, H. Zoladek, *Complex algebraic plane curves via the Poincaré-Hopf formula. I. Parametric lines*, Pacific J. Math. 229 (2007), 307–338.

[Bu] A. Bustinduy, *On the entire solutions of a polynomial vector field on $\mathbb{C}^2$*, Indiana Univ. Math. J. 53 (2004), 647–666.

[CL] S. Cantat, S. Lamy, *Groupes d'automorphismes polynomiaux du plan*, Geom. Dedicata 123 (2006), 201–221.

[CN] P. Cassou-Noguès, *A note on : "Note on boundary obstruction to Jacobian conjecture of two variables" [Acta Math. Vietnam. 32 (2007), no. 2-3, 123–139] by M. Oka*, Acta Math. Vietnam. 32 (2007), no. 2-3, 243–246.

[CNR] P. Cassou-Noguès, P. Russell, *Birational morphisms $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ and affine ruled surfaces*, Affine Algebraic Geometry, 57–105, Osaka Univ. Press, Osaka, 2007.

[Da] D. Daigle, *On polynomials in three variables annihilated by two locally nilpotent derivations*, J. Algebra 310 (2007), 303–324.

[DR] D. Daigle, P. Russell, *On log $\mathbb{Q}$-homology planes and weighted projective planes*, Canad. J. Math. 56 (2004), 1145–1189.

[DG] V. I. Danilov, M. H. Gizatullin, *Automorphisms of affine surfaces*. I, Math. USSR Izv. 9 (1975), 493–534 ; II, *ibid.* 11 (1977), 51–98.

[De] J. Déserti, *Sur le groupe des automorphismes polynomiaux du plan affine*, J. Algebra 297 (2006), 584–599.

[DP] T. tom Dieck, T. Petrie, *Homology planes and algebraic curves*, Osaka J. Math. 30 (1993), 855–886.

[DN] A. Dimca, A. Néméthi, *On the monodromy of complex polynomials*, Duke Math. J. 108 (2001), 199–209.

[Du_1] A. Dubouloz, *Additive group actions on Danielewski varieties and the cancellation problem*, Math. Z. 255 (2007), 77–93.

[Du_2] A. Dubouloz, *Danielewski-Fieseler surfaces*, Transform. Groups 10 (2005), 139–162.

[Ea] C.J. Earle, *On holomorphic families of pointed Riemann surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 163–166.

[En] M. Engber, *Teichmüller spaces and representability of functors*, Trans. Amer. Math. Soc. 201 (1975), 213–226.

[vdE] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progress in Mathematics, 190. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.

[Fe_1] T. Fenske, *Rational 1- and 2-cuspidal plane curves*, Beiträge Algebra Geom. 40 (1999), 309–329.

[Fe_2] T. Fenske, *Rational cuspidal plane curves of type $(d, d-4)$ with $\chi(\Theta_V\langle D\rangle) \leq 0$*, Manuscripta Math. 98 (1999), 511–527.

[FB] J. Fernández de Bobadilla, *Moduli spaces of polynomials in two variables*, Mem. Amer. Math. Soc. 173 (2005), no. 817.

[FBLMHN] J. Fernández de Bobadilla, I. Luengo, A. Melle-Hernández, A. Némethi, *On rational cuspidal plane curves, open surfaces and local singularities*, Singularity theory, 411–442, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.

[Fi] K.-H. Fieseler, *On complex affine surfaces with $\mathbb{C}^+$-action*, Comment. Math. Helv. 69 (1994), 5–27.

[FZ_1] H. Flenner, M. Zaidenberg, *Normal affine surfaces with $\mathbb{C}^*$-actions*, Osaka J. Math. 40, 2003, 981–1009.

[FZ_2] H. Flenner, M. Zaidenberg, *Locally nilpotent derivations on affine surfaces with a $\mathbb{C}^*$-action*, Osaka J. Math. 42, 2005, 931–974.

[FZ_3] H. Flenner, M. Zaidenberg, *On the uniqueness of $\mathbb{C}^*$-actions on affine surfaces*, Affine Algebraic Geometry, 97–111, Contemp. Math., 369, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[FZ_4] H. Flenner, M. Zaidenberg, *Q-acyclic surfaces and their deformations*, in : Classification of Algebraic Varieties, 143–208. Contempor. Mathem. 162, Providence, RI, 1994.

[FZ_5] H. Flenner, M. Zaidenberg, *On a class of rational cuspidal plane curves*, Manuscripta Math. 89 (1996), 439–460.

[FZ_6] H. Flenner, M. Zaidenberg, *Rational cuspidal plane curves of type $(d, d-3)$*, Math. Nach. 210 (2000), 93–110.

[FKZ_1] H. Flenner, S. Kaliman, et M. Zaidenberg, *Birational transformations of weighted graphs*, in : Affine algebraic geometry, 107–147. Osaka Univ. Press 2007.

[FKZ_2] H. Flenner, S. Kaliman, et M. Zaidenberg, *Completions of C^*-surfaces*, in : Affine Algebraic Geometry, 149–200. Osaka Univ. Press 2007.

[FKZ_3] H. Flenner, S. Kaliman, et M. Zaidenberg, *Uniqueness of $\mathbb{C}^*$- and $\mathbb{C}_+$-actions on Gizatullin surfaces*, Transform. Groups 13 (2008), 305–354.

[FKZ_4] H. Flenner, S. Kaliman, et M. Zaidenberg, *Smooth Gizatullin surfaces with non-unique $\mathbb{C}^*$-actions*, J. Algebraic Geometry, 57p. (à paraître). Prépublication de l'Institut Fourier de Mathématiques, hal-00317965, arXiv :0809.0651 (2008).

[FKZ_5] H. Flenner, S. Kaliman, et M. Zaidenberg, *On the Danilov-Gizatullin Isomorphism Theorem*, Enseignement Mathématiques, 9p. (à paraître) ; prépublication de Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, MPIM2008-83 (2008), arXiv :0808.0459.

[Fr_1] G. Freudenburg, *Algebraic theory of locally nilpotent derivations*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 136. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, VII. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Fr_2] G. Freudenburg, *The Vénéreau polynomials relative to $\mathbb{C}^*$-fibrations and stable coordinates*, Affine Algebraic Geometry, 203–215, Osaka Univ. Press, Osaka, 2007.

[FMJ] G. Freudenburg, L. Moser-Jauslin, *A nonlinearizable action of S_3 on $\mathbb{C}^4$*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 52 (2002), 133–143.

[FSY_1] M. Fujimoto, M. Suzuki, K. Yokoyama, *On polynomial curves in the affine plane*, Osaka J. Math. 43 (2006), 597–608.

[FSY_2] M. Fujimoto, M. Suzuki, K. Yokoyama, *Construction of affine plane curves with one place at infinity*, Osaka J. Math. 39 (2002), 1005–1027.

[Fu] T. Fujita, *On the topology of noncomplete algebraic surfaces*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 29 (1982), 503–566.

[Fur] M. Furushima, *Finite groups of polynomial automorphisms in* $\mathbb{C}^n$, I. Tohoku Math. J. (2) 35 (1983), 415–424, II. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A 37 (1983), 45–56.

[Ga] R. Ganong, *On plane curves with one place at infinity*, J. Reine Angew. Math. 307/308 (1979), 173–193.

[Gr] A. Grothendieck, *Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique*, Séminaire Henri Cartan, 13-ième année : 1960/61. Fasc. 1 et 2 : Exp. No. 17, 2-ième édition, École Normale Supérieure, Secrétariat mathématique, Paris, 1962.

[Gu] R.V. Gurjar, *A new proof of Suzuki's formula*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 107 (1997), 237–242.

[GKR] R.V. Gurjar, M. Koras, et P. Russell, *Two dimensional quotients of* $\mathbb{C}^n$ *by a reductive group*, Electron. Res. Announc. Math. Sci. 15 (2008), 62–64.

[GMMR] R.V. Gurjar, K. Masuda, M. Miyanishi, et P. Russell, *Affine lines on affine surfaces and the Makar-Limanov invariant*, Canad. J. Math. 60 (2008), 109–139.

[GM] R.V. Gurjar, M. Miyanishi, *On Contractible Curves in the Complex Affine Plane*, Tohuku Math. J. 3 (1996), 459–469.

[GP] R.V. Gurjar, A.J. Parameswaran, *Affine lines on* $\mathbb{Q}$*-homology planes*, J. Math. Kyoto Univ. 35 (1995), 63–77.

[GPS] R.V. Gurjar, C.R. Pradeep, A.R. Shastri, *On rationality of logarithmic* $\mathbb{Q}$*-homology planes*, I. Osaka J. Math. 34 (1997), 429–456. II. *ibid.* 34 (1997), 725–743.

[Gut] A. Gutwirth, *The action of an algebraic torus on the affine plane*, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 407–414.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Hu] J. Hubbard, *Sur la non-existence de sections analytiques à la courbe universelle de Teichmüller*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 274 (1972), A978–A979.

[Ii] S. Iitaka, *Algebraic geometry. An introduction to birational geometry of algebraic varieties*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[Je] Z. Jelonek, *The extension of regular and rational embeddings*, Math. Ann. 277 (1987), 113–120.

[Ju] H.W.E. Jung, *Über ganze birationale Transformationen der Ebene*, J. Reine Angew. Math. 184 (1942), 161–174.

[Ka_1] Sh.I. Kaliman, *Polynomials on* $\mathbb{C}^2$ *with isomorphic general fibres*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 288 (1986), 39–42.

[Ka_2] S. Kaliman, *Extensions of isomorphisms between affine algebraic subvarieties of* k^n *to automorphisms of* k^n, Proc. Amer. Math. Soc. 113 (1991), 325–334.

[Ka_3] S. Kaliman, *Isotopic embeddings of affine algebraic varieties into* C^n, The Madison Symposium on Complex Analysis (Madison, WI, 1991), 291–295, Contemp. Math., 137, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[Ka_4] S. Kaliman, *Rational polynomials with a* $\mathbb{C}^*$*-fiber*, Pacific J. Math. 174 (1996), 141–194.

[Ka_5] S. Kaliman, *Polynomials with general* $\mathbb{C}^2$*-fibers are variables* Pacific J. Math. 203 (2002), 161–190.

[Ka$_6$] S. Kaliman, *Actions of $\mathbb{C}^*$ and $\mathbb{C}_+$ on affine algebraic varieties*, Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2, 629–654, Proc. Sympos. Pure Math. 80, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[KKMLR] S. Kaliman, M. Koras, L. Makar-Limanov, P. Russell, *$\mathbb{C}^*$-actions on $\mathbb{C}^3$ are linearizable*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 3 (1997), 63–71 (electronic).

[KML] S. Kaliman, L. Makar-Limanov, *On the Russell-Koras contractible threefolds*, J. Algebraic Geom. 6 (1997), 247–268.

[KVZ] S. Kaliman, S. Vénéreau, et M. Zaidenberg, *Simple birational extensions of the polynomial ring* $\mathbb{C}^{[3]}$, Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), 509–555.

[KZ$_1$] S. Kaliman, M. Zaidenberg, *Vénéreau polynomials and related fiber bundles*, J. Pure Appl. Algebra 192 (2004), 275–286.

[KZ$_2$] S. Kaliman, M. Zaidenberg, *Affine modifications and affine hypersurfaces with a very transitive automorphism group*, Transform. Groups 4 (1999), 53–95.

[KZ$_3$] S. Kaliman, M. Zaidenberg, *Miyanishi's characterization of the affine 3-space does not hold in higher dimensions*, Ann. Inst. Fourier 50 (2000), 1649–1669 (2001).

[Kam] T. Kambayashi, *Automorphism group of a polynomial ring and algebraic group action on an affine space*, J. Algebra 60 (1979), 439–451.

[KaR] T. Kambayashi, P. Russell, *On linearizing algebraic torus actions*, J. Pure Appl. Algebra 23 (1982), 243–250.

[Ki] T. Kishimoto, *A new proof of the non-tameness of the Nagata automorphism from the point of view of the Sarkisov program*, Compos. Math. 144 (2008), 963–977.

[KK] T. Kishimoto, H. Kojima, *Affine lines on $\mathbb{Q}$-homology planes with logarithmic Kodaira dimension $-\infty$*, Transform. Groups 11 (2006), 659–672 ; *Corrections*, *ibid.* 13 (2008), 211–213.

[Kn] F. Knop, *Nichtlinearisierbare Operationen halbeinfacher Gruppen auf affinen Raümen*, Invent. Math. 105 (1991), 217–220.

[Ko] M. Koras, *On contractible plane curves*, Affine algebraic geometry, 275–288, Osaka Univ. Press, Osaka, 2007.

[KoR$_1$] M. Koras, P. Russell, *Linearization problems*, Algebraic group actions and quotients, 91–107, Hindawi Publ. Corp., Cairo, 2004.

[KoR$_2$] M. Koras, P. Russell, *$\mathbb{C}^*$-actions on $\mathbb{C}^3$: the smooth locus of the quotient is not of hyperbolic type*, J. Algebraic Geom. 8 (1999), 603–694.

[KoR$_3$] M. Koras, P. Russell, *Contractible threefolds and $\mathbb{C}^*$-actions on $\mathbb{C}^3$*, J. Algebraic Geom. 6 (1997), 671–695.

[Kr] H. Kraft, *Challenging problems on affine n-space*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95. Astérisque 237 (1996), Exp. No. 802, 5, 295–317.

[KP] H. Kraft, V. L. Popov, *Semisimple group actions on the three-dimensional affine space are linear*, Comment. Math. Helv. 60 (1985), 466–479.

[KS] H. Kraft, G. W. Schwarz, *Reductive group actions with one-dimensional quotient*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 76 (1992), 1–97.

[VDK] W. van der Kulk, *On polynomial rings in two variables*, Nieuw Arch. Wiskunde (3) 1 (1953), 33–41.

[Ku] S. Kuroda, *A generalization of the Shestakov-Umirbaev inequality*, J. Math. Soc. Japan 60 (2008), 495–510.

[LDT] Lê Dung Tráng, *Simple rational polynomials and the Jacobian conjecture*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 44 (2008), 641–659.

[LJM] M. Lejeune-Jalabert, R.I. Michler, *Affine hypersurfaces with Gorenstein singular loci*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), 3453–3460.

[Li] A. Liendo, *Affine T-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations*, arXiv :0812.0802, 31p.

[ML_1] L. Makar-Limanov, *AK-invariant, some conjectures, examples and counterexamples*, Polynomial automorphisms and related topics (Kraków, 1999). Ann. Polon. Math. 76 (2001), 139–145.

[ML_2] L. Makar-Limanov, *On groups of automorphisms of a class of surfaces*, Israel J. Math. 69 (1990), 250–256.

[ML_3] L. Makar-Limanov, *On the group of automorphisms of a surface $x^n y = P(z)$*, Israel J. Math. 121 (2001), 113–123.

[MMJP] M. Masuda, L. Moser-Jauslin, T. Petrie, *Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups : applications*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 88 (1991), no. 20, 9065–9066.

[Ma] T. Matsusaka, *Polarized varieties, fields of moduli and generalized Kummer varieties of polarized abelian varieties*. Amer. J. Math. 80 (1958) 45–82.

[MKW] J.H. McKay, S.S.S. Wang, *An elementary proof of the automorphism theorem for the polynomial ring in two variables*, J. Pure Appl. Algebra 52 (1988), 91–102.

[Mil] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo 1968.

[Miy_1] M. Miyanishi, *Algebraic characterization of the affine 3–space*, Proc. Algebraic Geom. Seminar, Singapore, World Scientific, 1987, 53–67.

[Miy_2] M. Miyanishi, *Open algebraic surfaces*, CRM Monograph Series 12, AMS, Providence, RI, 2001.

[Miy_3] M. Miyanishi, *Recent developments in affine algebraic geometry : from the personal viewpoints of the author*, Affine algebraic geometry, 307–378, Osaka Univ. Press, Osaka, 2007.

[Miy_4] M. Miyanishi, *Minimization of the embeddings of the curves into the affine plane*, J. Math. Kyoto Univ. 36 (1996), 311–329.

[MM] M. Miyanishi, K. Masuda, *The additive group actions on $\mathbb{Q}$-homology planes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 53 (2003), 429–464.

[MS] M. Miyanishi, T. Sugie, *Generically rational polynomials*, Osaka J. Math. 17 (2) (1980), 339–362.

[Na_1] M. Nagata, *Polynomial rings and affine spaces*, Regional Conference Series in Mathematics, No. 37. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.

[Na_2] M. Nagata, *On the automorphism group of $k[x, y]$*, Lectures in Math., Kyoto Univ., Kinokuniya, Tokyo, 1972.

[NO] Y. Nakazawa, M. Oka, *Smooth plane curves with one place at infinity*, J. Math. Soc. Japan 49 (1997), 663–687.

[Neh] Z. Nehari, *The Schwarzian derivative and schlicht functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 545-551.

[Ne] W.D. Neumann, *Complex algebraic plane curves via their links at infinity*, Invent. Math. 98 (1989), 445–489.

[NN] W.D. Neumann, P. Norbury, *Rational polynomials of simple type*, Pacific J. Math. 204 (2002), 177–207.

[NR] W.D. Neumann, L. Rudolph, *Unfoldings in knot theory*, Math. Ann. 278 (1987), 409–439 ; *Corrigendum*, *ibid.* 282 (1988), 349–351.

[Ok] M. Oka, *Moduli space of smooth affine curves of a given genus with one place at infinity*, Singularities (Oberwolfach, 1996), 409–434, Progr. Math. 162, Birkhäuser, Basel, 1998.

[Or_1] S.Yu. Orevkov, *On rational cuspidal curves. I. Sharp estimate for degree via multiplicities*, Math. Ann. 324 (2002), 657–673.

[Or_2] S.Yu. Orevkov, *Acyclic algebraic surfaces bounded by Seifert spheres*, Osaka J. Math. 34 (1997), 457–480.

[OrZ] S.Yu. Orevkov, M. G. Zaidenberg, *On rigid rational cuspidal plane curves*, (Russian) Uspekhi Mat. Nauk 51 (1996), 149–150 ; traduit dans Russian Math. Surveys 51 (1996), 179–180.

[OPZ] I. Ostrovskii, F. Pakovitch, et M. Zaidenberg, *A remark on complex polynomials of least deviation*. Internat. Math. Res. Notices 14 (1996), 699–703.

[Pa_1] F. Pakovitch, *Sur un problème d'unicité pour les polynômes*. Prépublication de l'Institut Fourier de Mathématiques, 324, Grenoble 1995, 1–4.

[Pa_2] F. Pakovitch, *Sur un problème d'unicité pour les fonctions méromorphes*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 323 (1996), 745–748.

[Pan] D.I. Panyushev, *Semisimple groups of automorphisms of a four-dimensional affine space*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 47 (1983), 881–894. A correction : *ibid.* 49 (1985), 1336–1337.

[Pi] J. Piontkowski, *On the number of cusps of rational cuspidal plane curves*, Experiment. Math. 16 (2007), 251–255.

[Po] V.L. Popov, *On polynomial automorphisms of affine spaces*, Izv. Math. 65 (2001), 569–587.

[Ra_1] C.P. Ramanujam, *A topological characterisation of the affine plane as an algebraic variety* Ann. of Math. (2) 94 (1971), 69–88.

[Ra_2] C.P. Ramanujam, *A note on automorphism groups of algebraic varieties*, Math. Ann. 156 (1964), 25–33.

[Re] R. Rentschler, *Opérations du groupe additif sur le plane affine*, C. R. Acad. Sci. **267** (1968), 384-387.

[LR] Lee Rudolph, *Knot theory of complex plane curves*, Menasco, William (ed.) et al., Handbook of knot theory, 349–427. Amsterdam : Elsevier, 2005.

[Ru] P. Russell, *Embedding problems in affine algebraic geometry*, Polynomial automorphisms and related topics, 113–135, Publishing House for Science and Technology, Hanoi, 2007.

[RS] P. Russell, A. Sathaye, *On finding and cancelling variables in* $k[X, Y, Z]$, J. Algebra 57 (1979), 151–166.

[Sai] K. Saito, *Quasihomogenen isoliere Singularitäten von Hyperflächen*, Invent. Math. 14 (1971), 123–142.

[SS] F. Sakai, M. Saleem, *Rational plane curves of type* $(d, d-2)$, Saitama Math. J. 22 (2004), 11–34 (2005).

[ST] F. Sakai, K. Tono, *Rational cuspidal curves of type* $(d, d-2)$ *with one or two cusps*, Osaka J. Math. 37 (2000), 405–415.

[Sas] I. Sasao, *Generically rational polynomials of quasi-simple type*, J. Algebra 298 (2006), 58–104.

[Sat] A. Sathaye, *Generalized Newton-Puiseux expansion and Abhyankar-Moh semigroup theorem*, Invent. Math. 74 (1983), 149–157.

[SatSt] A. Sathaye, J. Stenerson, *On Plane Polynomial Curves*, Algebraic Geometry and Applications, (1994), 121-142.

[Sc] G.W. Schwarz, *Exotic algebraic group actions*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 309 (1989), 89–94.

[SU_1] I.P. Shestakov, U.U. Umirbaev, *Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials*, J. Amer. Math. Soc. 17 (2004), 181–196.

[SU_2] I.P. Shestakov, U.U. Umirbaev, *The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables*, J. Amer. Math. Soc. 17 (2004), 197–227.

[Sr] V. Srinivas, *On the embedding dimension of an affine variety*, Math. Ann. 289 (1991), 125–132.

[Su_1] M. Suzuki, *Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébrigues de l'espace* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 241–257.

[Su_2] M. Suzuki, *Sur les opérations holomorphes du groupe additif complexe sur l'espace de deux variables complexes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 10 (1977), 517–546.

[Su_3] M. Suzuki, *Affine plane curves with one place at infinity*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 49 (1999), 375–404.

[To_1] K. Tono, *On the number of the cusps of cuspidal plane curves*, Math. Nachr. 278 (2005), 216–221.

[To_2] K. Tono, *Defining equations of certain rational cuspidal curves. I*, Manuscripta Math. 103 (2000), 47–62.

[VP] Ch.-J. De la Vallée Poussin, *Sur les polynomes d'approximation à une variable complexe.* Bull. Acad. Roy. de Belgique, Cl. Sci., 14 (1911), 199-211.

[Ve_1] S. Vénéreau, *A parachute for the degree of a polynomial in algebraically independent ones*, arXiv :0704.1561v2, 4p.

[Ve_2] S. Vénéreau, *Hyperplanes of the form* $f_1(x, y)z_1 + \cdots + f_k(x, y)z_k + g(x, y)$ *are variables*, Canad. Math. Bull. 48 (2005), 622–635.

[Wi_1] P.G. Wightwick, *Semi-group conditions for affine algebraic plane curves with more than one place at infinity*, Rev. Mat. Complut. 20 (2007), 139–206.

[Wi_2] P.G. Wightwick, *Equivalence of polynomials under automorphisms of* $\mathbb{C}^2$, J. Pure Appl. Algebra 157 (2001), 341–367.

[Wr] D. Wright, *The Jacobian conjecture as a problem in combinatorics.* Affine algebraic geometry, 483–503, Osaka Univ. Press, Osaka, 2007.

[Ya] C.-C. Yang, *Open problems.* In : Complex analysis, Proc. of the SUNY Brockport Conf., Dekker, New York and Basel, 1978, p. 169.

[Yo] H. Yoshihara, *A note on the existence of some curves*, Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. II, 801–804, Kinokuniya, Tokyo, 1988.

[Za_1] M. Zaidenberg, *Rational actions of the group* $\mathbf{C}^*$ *on* $\mathbf{C}^2$*, their quasi-invariants, and algebraic curves in* $\mathbf{C}^2$ *with Euler characteristic 1*, Soviet Math. Dokl. 31 (1985), 57–60.

[Za_2] M. Zaidenberg, *Isotrivial families of curves on affine surfaces and characterization of the affine plane*, Math. USSR Izvestiya 30 (1988), 503–532. *Additions and corrections*, *ibid.* 38 (1992), 435–437.

[Za_3] M. Zaidenberg, *Exotic algebraic structures on affine spaces*, Algebra i Analiz 11 (1999), 3–73 ; translation in St. Petersburg Math. J. 11 (2000), 703–760.

[Za_4] M. Zaidenberg, *Affine lines on* $\mathbb{Q}$*-homology planes and group actions*, Transformation Groups 11 (2006), 725–735.

[Za_5] M. Zaidenberg, *On Ramanujam surfaces,* $\mathbb{C}^{**}$*–families and exotic algebraic structures on* $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, Trans. Moscow Math. Soc. 55 (1994), 1–56.

[ZL_1] M.G. Zaidenberg, V.I. Lin, *An irreducible simply connected algebraic curve in* $\mathbb{C}^2$ *is equivalent to a quasihomogeneous curve*, Sov. Math. Dokl. 28 (1983), 200–204 ; translation from Dokl. Akad. Nauk SSSR 271 (1983), 1048–1052.

[ZL_2] M.G. Zaidenberg et V.Ya. Lin, *Finiteness theorems for holomorphic mappings.* Current problems in mathematics. Fundamental directions, Vol. 9 (Russian), 127–193, 272, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, VINITI, Moscow, 1986. Traductuion en anglais dans : Encyclopedia of Math. Sci. Vol. 9. Several Complex Variables III. Berlin Heidelberg New York e.a. : Springer 1989, 113–172.

[Zar] O. Zariski, *Characterization of plane algebroid curves whose module of differentials has maximum torsion*, Collected Works of Oscar Zariski, Vol. III, 475–480.

Université Grenoble I, Institut Fourier, UMR 5582 CNRS-UJF, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères cédex, France

E-mail address: `zaidenbe@ujf-grenoble.fr`