Quelques propriétés symplectiques des variétés kählériennes

Alexandre Vérine

Thèse dirigée par Emmanuel Giroux

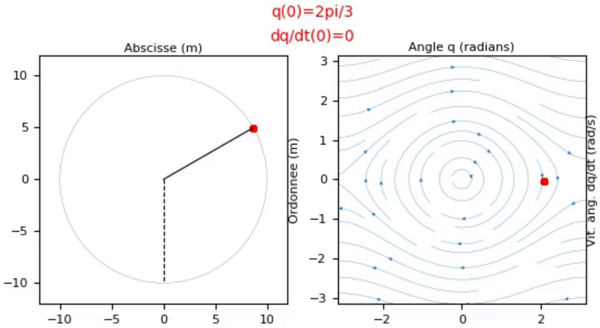
28 septembre 2018

UNIVERSITÉ DE LYON

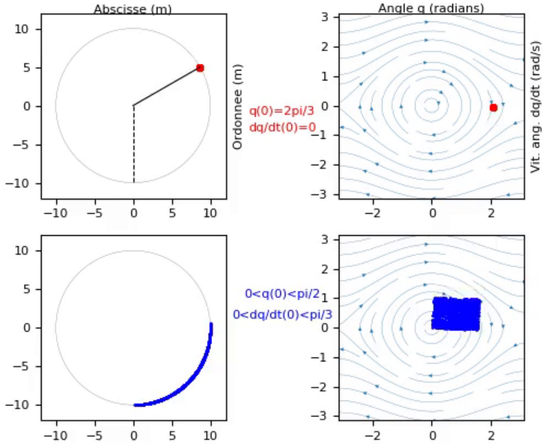
ENS DE LYON

Le pendule sans frottement

Trajectoire d'un point



Théorème de Liouville



Structure symplectique de l'espace des phases

- M^n : espace des configurations d'un système physique ;
- $T^\star M$: espace des phases de M, muni d'une 2-forme fermée non dégénérée naturelle $\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$;

Structure symplectique de l'espace des phases

- M^n : espace des configurations d'un système physique ;
- $T^\star M$: espace des phases de M, muni d'une 2-forme fermée non dégénérée naturelle $\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$;
- Si le système est conservatif et d'énergie $H : T^\star M \to \mathbf{R}$, ses trajectoires dans $T^\star M$ sont données par le champ de vecteurs $\overrightarrow{H}$ défini par les équations de Hamilton :

$$\omega(\cdot, \overrightarrow{H}) = \mathrm{d}H.$$

Structure symplectique de l'espace des phases

- M^n : espace des configurations d'un système physique ;
- $T^\star M$: espace des phases de M, muni d'une 2-forme fermée non dégénérée naturelle $\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$;
- Si le système est conservatif et d'énergie $H : T^\star M \to \mathbf{R}$, ses trajectoires dans $T^\star M$ sont données par le champ de vecteurs $\overrightarrow{H}$ défini par les équations de Hamilton :

$$\omega(\cdot, \overrightarrow{H}) = \mathrm{d}H.$$

Le temps t du flot de difféomorphismes de $T^\star M$ engendré par $\vec{H}$ préserve la forme ω.

Deux visages de la géométrie symplectique

Une variété symplectique est une variété de dimension paire munie d'une 2-forme fermée non dégénérée, la forme symplectique.

Deux visages de la géométrie symplectique

Une variété symplectique est une variété de dimension paire munie d'une 2-forme fermée non dégénérée, la forme symplectique.
Deux exemples fondamentaux :

- Les espaces cotangents $T^\star M$;
- L'espace projectif $\mathbf{C}P^N$ muni de la forme de Fubini-Study, les sous-variétés complexes closes de $\mathbf{C}P^N$ (dites variétés projectives), par exemple le lieu des zéros dans $\mathbf{C}P^N$ d'un polynôme homogène en $N+1$ variables s'annulant transversalement.

Deux visages de la géométrie symplectique

Une variété symplectique est une variété de dimension paire munie d'une 2-forme fermée non dégénérée, la forme symplectique.
Deux exemples fondamentaux :

- Les espaces cotangents $T^{\star}M$;
- L'espace projectif $\mathbf{C}P^N$ muni de la forme de Fubini-Study, les sous-variétés complexes closes de $\mathbf{C}P^N$ (dites variétés projectives), par exemple le lieu des zéros dans $\mathbf{C}P^N$ d'un polynôme homogène en $N+1$ variables s'annulant transversalement.

Reliés par un troisième exemple : $(\mathbf{C}^N, \sum \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i)$ et les sous-variétés complexes proprement plongées dans $\mathbf{C}^N$ (dites variétés de Stein)...

Un pont entre les deux : les variétés de Stein

Dans une variété projective $X \subset \mathbf{C}P^N$, le complémentaire d'une section hyperplane complexe générique $H^{N-1} \subset \mathbf{C}P^N$ est une variété de Stein.

Exemple

- $\mathbf{C}P^n \setminus \mathbf{C}P^{n-1} = \mathbf{C}^n$;
- $\{\sum_{i=0}^n z_i^2 = 0\} \setminus \mathbf{C}P^{n-1}_{z_0} = \{z \in \mathbf{C}^n, \sum_{i=1}^n z_i^2 = 1\}$.

Un pont entre les deux : les variétés de Stein

Dans une variété projective $X \subset \mathbf{C}P^N$, le complémentaire d'une section hyperplane complexe générique $H^{N-1} \subset \mathbf{C}P^N$ est une variété de Stein.

Exemple

- $\mathbf{C}P^n \setminus \mathbf{C}P^{n-1} = \mathbf{C}^n$;
- $\{\sum_{i=0}^n z_i^2 = 0\} \setminus \mathbf{C}P^{n-1}_{z_0} = \{z \in \mathbf{C}^n, \sum_{i=1}^n z_i^2 = 1\}$.

Grauert : Tout espace cotangent $T^\star M$ a une structure de variété de Stein.

Exemple

- $T^\star \mathbf{R}^n = \mathbf{C}^n$;
- $T^\star S^n = \{z \in \mathbf{C}^{n+1}, \sum_{i=1}^n z_i^2 = 1\}$.

Interactions entre géométries symplectique et complexe

Définition

Une variété kählérienne est une variété complexe X munie d'une forme symplectique ω telle que $g(u, v) := \omega(u, iv)$ est une métrique riemannienne.

Exemple

Variétés projectives, variétés de Stein.

Théorie de Picard-Lefschetz

Définition

Une dégénérescence de Lefschetz d'une variété complexe close X sur le disque $D \subset \mathbf{C}$ est la donnée d'une variété kählérienne $(\mathcal{X}, \Omega)$ et d'une fonction holomorphe $\Pi : \mathcal{X} \to D$ telles que :

- $\Pi^{-1}(1) = X$;
- Π a un unique point critique p et la hessienne complexe $\mathrm{d}^2\Pi(p)$ est non dégénérée.

Théorie de Picard-Lefschetz

Définition

Une dégénérescence de Lefschetz d'une variété complexe close X sur le disque $D \subset \mathbf{C}$ est la donnée d'une variété kählérienne $(\mathcal{X}, \Omega)$ et d'une fonction holomorphe $\Pi : \mathcal{X} \to D$ telles que :

- $\Pi^{-1}(1) = X$;
- Π a un unique point critique p et la hessienne complexe $\mathrm{d}^2\Pi(p)$ est non dégénérée.

Exemple

$\Pi = \sum_{i=0}^{n} z_i^2$.

- $\Pi^{-1}(t)$ pour $t \neq 0$: quadrique lisse symplectomorphe à $T^\star S^n$;
- $\Pi^{-1}(0)$: quadrique singulière.

Une monodromie symplectique

$\Pi : \mathcal{X} \to D$: dégénérescence de Lefschetz de X.

- Tout chemin $\gamma : [0, 1] \to D$ de valeurs régulières induit un difféomorphisme symplectique $\Pi^{-1}(\gamma(0)) \to \Pi^{-1}(\gamma(1))$.

Une monodromie symplectique

$\Pi : \mathcal{X} \to D$: dégénérescence de Lefschetz de X.

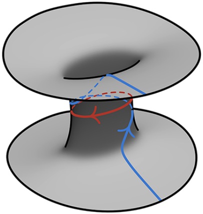
- Tout chemin $\gamma : [0,1] \to D$ de valeurs régulières induit un difféomorphisme symplectique $\Pi^{-1}(\gamma(0)) \to \Pi^{-1}(\gamma(1))$.
- Pour tout arc $\gamma \subset D$ de $\Pi(p)$ à 1, il existe un unique disque lagrangien (*i.e.* isotrope et de dimension moitié) fermé $\Delta \subset \mathcal{X}$ tel que $\Delta \subset \Pi^{-1}(\gamma)$ et $\partial\Delta \subset \Pi^{-1}(1) = X$. $\partial\Delta$ est une sphère lagrangienne de X dite cycle évanescent.

Proposition

La monodromie d'un lacet issu de 1 et encerclant la valeur critique est un difféomorphisme symplectique de X qui est un twist de Dehn autour de $\partial\Delta$.

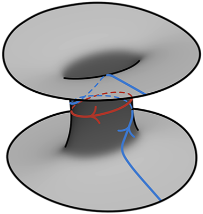
Le twist de Dehn symplectique

- Symplectomorphisme de $T^\star S^n$ à support compact donné par post-composition de l'antipodie de $T^\star S^n$ et du temps $\tau(|p|)$ du flot cogéodésique unitaire, où $\tau : \mathbf{R}_{\geq 0} \to [0, \pi]$ croît, $\tau(0) = 0$ et $\tau = \pi$ pour $|p| \geq 1$.



Le twist de Dehn symplectique

- Symplectomorphisme de $T^\star S^n$ à support compact donné par post-composition de l'antipodie de $T^\star S^n$ et du temps $\tau(|p|)$ du flot cogéodésique unitaire, où $\tau : \mathbf{R}_{\geq 0} \to [0, \pi]$ croît, $\tau(0) = 0$ et $\tau = \pi$ pour $|p| \geq 1$.



- Ce modèle s'implante au voisinage de toute sphère lagrangienne S d'une variété symplectique (X, ω).

Sont-ce tous les exemples ?

Question (Donaldson 00)

Dans une variété projective X^n, toute sphère lagrangienne est-elle un cycle évanescent d'une dégénérescence de Lefschetz de X ?

Sont-ce tous les exemples ?

Question (Donaldson 00)

Dans une variété projective X^n, toute sphère lagrangienne est-elle un cycle évanescent d'une dégénérescence de Lefschetz de X ?

Oui en dimension $n = 1$, inconnu en dimensions supérieures.

Vers les variétés de Stein

$S \subset X$: sous-variété lagrangienne d'une variété projective.

Théorème (Guedj 99)

Il existe une section hyperplane complexe lisse $Y \subset X$ évitant S, en particulier S est dans la variété de Stein $X \setminus Y$.

Exemple

$S^n \subset \overline{\{\sum_{i=1}^n z_i^2 = 1\}}$ est évitée par $Y = \mathbf{C}P^n_\infty \cap \overline{\{\sum_{i=1}^n z_i^2 = 1\}}$.

Variétés de Stein et $\mathbf{C}$-convexité

V : variété complexe.

- $\phi : V \to \mathbf{R}$ est $\mathbf{C}$-convexe si $(V, -\mathrm{dd}^c\phi)$ est kählérienne ;
- Grauert 58 : une variété complexe est une variété de Stein ssi elle admet une exhaustion $\mathbf{C}$-convexe.

Variétés de Stein et $\mathbf{C}$-convexité

V : variété complexe.

- $\phi : V \to \mathbf{R}$ est $\mathbf{C}$-convexe si $(V, -\mathrm{dd}^c\phi)$ est kählérienne ;
- Grauert 58 : une variété complexe est une variété de Stein ssi elle admet une exhaustion $\mathbf{C}$-convexe.

$S \subset X$: sous-variété lagrangienne d'une variété projective.

Théorème (V.)

Si le morphisme $H_2(X, S; \mathbf{Q}) \to \mathbf{R}$ donné par intégration de la forme ω est à valeurs rationnelles, alors il existe une section hyperplane complexe lisse $Y \subset X$ évitant S tel que S est un minimum $\mathbf{C}$-convexe dans la variété de Stein $X \setminus Y$.

Les minimums $\mathbf{C}$-convexes sont des sous-variétés lagrangiennes exactes.

Les minimums $\mathbf{C}$-convexes sont des cycles évanescents

Les domaines de Stein sont les sous-niveaux fermés réguliers d'exhaustions $\mathbf{C}$-convexes.

Théorème (Giroux, V.)

Soit V un domaine de Stein et $S \subset V$ une sphère qui est un minimum $\mathbf{C}$-convexe. Alors S est le cycle évanescent d'une dégénérescence de Lefschetz de V sur le disque parmi des domaines de Stein.

Dégénérescence symplectique...

(X^{2n}, ω) : variété symplectique, $S^n \subset X$ sphère lagrangienne, $\epsilon \in]0,1[$, $D_0 = D(0,\epsilon) \subset \mathbf{C}$.

- $\mathcal{X}(S)^{2n+2}$: variété résultant d'un attachement d'anse d'indice $n+1$ (framing donné par ω) à $X \times D_0$ le long de $S \times \{\epsilon\}$;

Dégénérescence symplectique...

(X^{2n}, ω) : variété symplectique, $S^n \subset X$ sphère lagrangienne, $\epsilon \in]0,1[$, $D_0 = D(0,\epsilon) \subset \mathbf{C}$.

- $\mathcal{X}(S)^{2n+2}$: variété résultant d'un attachement d'anse d'indice $n+1$ (framing donné par ω) à $X \times D_0$ le long de $S \times \{\epsilon\}$;
- $\Pi : \mathcal{X}(S) \to D(1, 1+\epsilon)$: extension de $X \times D_0 \to D_0$ à un seul point critique telle que $\Delta^{n+1} \subset \mathcal{X}(S)$ disque stable de bord $S \times \{\epsilon\}$;

Dégénérescence symplectique...

(X^{2n}, ω) : variété symplectique, $S^n \subset X$ sphère lagrangienne, $\epsilon \in]0,1[$, $D_0 = D(0,\epsilon) \subset \mathbf{C}$.

- $\mathcal{X}(S)^{2n+2}$: variété résultant d'un attachement d'anse d'indice $n+1$ (framing donné par ω) à $X \times D_0$ le long de $S \times \{\epsilon\}$;
- $\Pi : \mathcal{X}(S) \to D(1, 1+\epsilon)$: extension de $X \times D_0 \to D_0$ à un seul point critique telle que $\Delta^{n+1} \subset \mathcal{X}(S)$ disque stable de bord $S \times \{\epsilon\}$;
- Eliashberg 90, Weinstein 91 : $\mathcal{X}(S)$ a une forme symplectique Ω étendant ω telle que les fibres $\Pi^{-1}(t)$ sont des sous-variétés symplectiques et Δ est une sous-variété lagrangienne.

Dégénérescence symplectique...

(X^{2n}, ω) : variété symplectique, $S^n \subset X$ sphère lagrangienne, $\epsilon \in]0,1[$, $D_0 = D(0,\epsilon) \subset \mathbf{C}$.

- $\mathcal{X}(S)^{2n+2}$: variété résultant d'un attachement d'anse d'indice $n+1$ (framing donné par ω) à $X \times D_0$ le long de $S \times \{\epsilon\}$;
- $\Pi : \mathcal{X}(S) \to D(1, 1+\epsilon)$: extension de $X \times D_0 \to D_0$ à un seul point critique telle que $\Delta^{n+1} \subset \mathcal{X}(S)$ disque stable de bord $S \times \{\epsilon\}$;
- Eliashberg 90, Weinstein 91 : $\mathcal{X}(S)$ a une forme symplectique Ω étendant ω telle que les fibres $\Pi^{-1}(t)$ sont des sous-variétés symplectiques et Δ est une sous-variété lagrangienne.

Lemme (Attachement d'anse holomorphe)

Si, de plus, X est kählérienne et S analytique réelle, alors il existe une structure complexe i définie au voisinage de $\Pi^{-1}(0) \cup \Delta \subset \mathcal{X}(S)$, compatible avec Ω et telle que Π est holomorphe et $\Pi^{-1}(0) = X$ comme variétés complexes.

... et ω-convexité

Définition

Soit (V, ω) une variété symplectique à bord $\partial_+ V$. Une fonction $\phi : V \to \mathbf{R}$ est dite ω-convexe si elle est de Lyapounov pour un champ de vecteurs $\vec{\lambda}$ de Liouville (*i.e.* ω-dual à une primitive de ω) pointant à l'extérieur sur $\partial_+ V$.

Exemple : les fonction $\mathbf{C}$-convexes.

... et ω-convexité

Définition

Soit (V, ω) une variété symplectique à bord $\partial_+ V$. Une fonction $\phi : V \to \mathbf{R}$ est dite ω-convexe si elle est de Lyapounov pour un champ de vecteurs $\vec{\lambda}$ de Liouville (*i.e.* ω-dual à une primitive de ω) pointant à l'extérieur sur $\partial_+ V$.

Exemple : les fonction $\mathbf{C}$-convexes.

Proposition (Dégénérescence symplectique)

Soient V un domaine de Stein et $S \subset V$ une sphère minimum $\mathbf{C}$-convexe. Il existe une fonction $\Phi : \mathcal{V}(S) \to \mathbf{R}$ dont la restriction à $\Pi^{-1}(0) = X$ (resp. $\Pi^{-1}(t)$) est $\mathbf{C}$-convexe (resp. Ω-convexe), qui est $\mathbf{C}$-convexe en $\mathrm{crit}(\Pi)$, dont Δ^{n+1} est le plus bas niveau et $\partial\mathcal{V}(S)$ est un niveau régulier.

Extension de la structure complexe

Théorème (Eliashberg 90, Cieliebak-Eliashberg 12)

Soit $(W, \partial_- W, \partial_+ W)$ un cobordisme, ω une forme symplectique sur W et ϕ une fonction ω-convexe. Alors, il existe une structure complexe i sur W telle que ϕ est $\mathbf{C}$-convexe.

Extension de la structure complexe

Théorème (Eliashberg 90, Cieliebak-Eliashberg 12)

Soit $(W, \partial_- W, \partial_+ W)$ un cobordisme, ω une forme symplectique sur W et ϕ une fonction ω-convexe. Alors, il existe une structure complexe i sur W telle que ϕ est $\mathbf{C}$-convexe.

- $0 < \eta << 1$. Dans chaque fibre on étend la structure complexe à $W := \Pi^{-1}(t) \cap \{\Phi(\Delta) + \eta < \Phi < \Phi(\partial\mathcal{V}(S))\}$.

Extension de la structure complexe

Théorème (Eliashberg 90, Cieliebak-Eliashberg 12)

Soit $(W, \partial_- W, \partial_+ W)$ un cobordisme, ω une forme symplectique sur W et ϕ une fonction ω-convexe. Alors, il existe une structure complexe i sur W telle que ϕ est $\mathbf{C}$-convexe.

- $0 < \eta << 1$. Dans chaque fibre on étend la structure complexe à $W := \Pi^{-1}(t) \cap \{\Phi(\Delta) + \eta < \Phi < \Phi(\partial\mathcal{V}(S))\}$.
- La structure complexe ainsi construite sur les fibres doit dépendre holomorphiquement du paramètre.

Perspective : variante affine ?

Question

Toute sphère S d'une variété de Stein affine X qui est un minimum $\mathbf{C}$-convexe est-elle le cycle évanescent d'une dégénérescence de Lefschetz parmi des variétés affines ?