σ-algèbres

Exercice 1.— Limites inférieures et supérieures d'ensembles
Soit $\mathscr{A}$ une σ-algèbre sur un ensemble X et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathscr{A}$. On définit les ensembles :

$$\limsup_n A_n = \left\{x \in X \,\middle|\, x \text{ appartient à une infinité de } A_n\right\}$$
$$\liminf_n A_n = \left\{x \in X \,\middle|\, x \in A_n \text{ à partir d'un certain } n\right\}.$$

Montrer que $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ sont membres de la σ-algèbre $\mathscr{A}$. Donner des exemples intelligents où ces deux ensembles coïncident ainsi que des exemples où ils diffèrent.

Exercice 2.— σ-algèbres sur $\mathbb{R}$

(a) Caractériser la σ-algèbre sur $\mathbb{R}$ engendrée par l'ensemble des singletons.

(b) Montrer que la σ-algèbre des boréliens $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par l'ensemble

$$\left\{]-\infty, r] \subset \mathbb{R} \,\middle|\, r \in \mathbb{Q} \right\}.$$

(c) Trouver un sous-ensemble infini de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ qui contient $\mathbb{R}$, est stable par union dénombrable et intersection dénombrable, mais n'est pas une σ-algèbre.

[σ-algèbre sur un espace métrique dénombrable] Montrer que la σ-algèbre des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{Q})$ coïncide avec la σ-algèbre pleine $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Généraliser au cas d'un espace métrique dénombrable.

Exercice 3.— Quelques boréliens de $\mathbb{R}$
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les ensembles suivants sont boréliens :

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right\}$;

(b) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right\}$;

(c) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet 0 comme valeur d'adhérence}\right\}$.

Exercice 4.— Boréliens de $\mathbb{Q}$
Montrer que la σ-algèbre des boréliens $\mathscr{B}(\mathbb{Q})$ coïncide avec la σ-algèbre pleine $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$. Généraliser au cas d'un espace métrique dénombrable.

Exercice 5.— Intervalles dyadiques
On appelle *intervalle dyadique* de $[0,1[$ un intervalle de la forme $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$, où $n \in \mathbb{N}$ et k est un entier compris entre 0 et $2^n - 1$.

(a) Montrer que deux intervalles dyadiques sont emboîtés ou disjoints.

(b) Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}$ des unions finies d'intervalles dyadiques est une algèbre sur $[0,1[$.

(c) Montrer que la σ-algèbre engendrée par les intervalles dyadiques est la σ-algèbre borélienne $\mathscr{B}([0,1[)$.

Exercice 6.— σ-algèbre produit
Soit $(X_1, \mathscr{A}_1)$ et $(X_2, \mathscr{A}_2)$ deux espaces mesurables (*i.e.* ensembles munis d'une σ-algèbre). On définit la *σ-algèbre produit* $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ comme la σ-algèbre engendrée ;

$$\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 = \sigma\left(\left\{A_1 \times A_2 \,\middle|\, A_i \in \mathscr{A}_i\right\}\right).$$

On note $\mathscr{D}(X)$ la σ-algèbre des parties dénombrables ou codénombrables d'un ensemble X et $\mathscr{B}(X)$ la σ-algèbre borélienne d'un espace métrique X.

(a) Montrer que $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

(b) Soit X et Y deux ensembles. Dans quels cas a-t-on $\mathscr{D}(X \times Y) = \mathscr{D}(X) \otimes \mathscr{D}(Y)$?

Exercice 7.— σ-algèbres sur les ensembles dénombrables
Soit X un ensemble dénombrable. On dit qu'une σ-algèbre est engendrée par une relation d'équivalence si elle est engendrée par les classes d'équivalence de cette relation.

(a) Montrer que toute σ-algèbre est engendrée par une relation d'équivalence. Identifier les relations correspondant aux σ-algèbres pleine et triviale.

(b) En déduire le nombre de σ-algèbres sur un ensemble fini.

Exercice 8.— σ-algèbres dénombrables
Démontrer qu'il n'existe pas de σ-algèbre infinie dénombrable. On pourra commencer par montrer que l'on peut toujours trouver dans une σ-algèbre infinie une collection infinie d'ensembles disjoints.

Mesures

Exercice 1.— Mesures sur $\mathbb{Q}$
Trouver toutes les mesures sur $(\mathbb{Q}, \mathscr{B}(\mathbb{Q}) = \mathscr{P}(\mathbb{Q}))$.

Exercice 2.— Lemme de Borel–Cantelli, première partie
Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu[A_n]$ est finie. Montrer que l'ensemble des points qui appartiennent à une infinité de A_n est de mesure nulle.

Exercice 3.— Sommes de mesures de Dirac
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

(a) Montrer que $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_n}$ définit une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

(b) Montrer que μ est finie sur tous les intervalles bornés si et seulement si $|x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

(c) Pour quelles suites la mesure μ est-elle σ-finie ?

Exercice 4.— Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$: vrai ou faux ?
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. On demande, suivant les cas, une preuve ou un contre-exemple.
- Soit (A_n) une suite décroissante de boréliens de $\mathbb{R}$ d'intersection vide. Alors $m_1[A_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide. Alors $m_1[A] = 0$.
- Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Alors $m_1[A] > 0$.
- Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Alors $m_1[K]$ est finie.

Exercice 5.— Exemple de Vitali
Soit $\sim$ la relation d'équivalence définie par $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Justifier que chaque classe rencontre l'intervalle $[0, 1]$. On forme l'ensemble V en prenant dans chaque classe d'équivalence un représentant dans $[0, 1]$. On obtient donc une partie $V \subset [0, 1]$ intersectant en un unique point chaque classe d'équivalence de $\sim$. Montrer que V n'est pas borélien.

Exercice 6.— Ensembles de Cantor

(a) On définit *l'ensemble triadique de Cantor* K_3 de la manière suivante : $K_3^{(0)}$ est l'intervalle $[0, 1]$, $K_3^{(1)}$ est obtenu en découpant $K_3^{(0)}$ en trois intervalles de même taille et en ne gardant que les deux intervalles (fermés) extrêmes ($K_3^{(1)} = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$), $K_3^{(2)}$ est obtenu en faisant subir le même sort aux (deux) intervalles constituant $K_3^{(1)}$ ($K_3^{(2)} = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$). On construit ainsi par récurrence des compacts $K_3^{(n)}$ formés de 2^n intervalles. Ces compacts sont emboîtés et on pose $K_3 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_3^{(n)}$. Calculer la mesure de Lebesgue de l'ensemble triadique de Cantor.

Figure 1 – K_3 : premières étapes de construction (source : wikipédia)

(b) On généralise la construction précédente : pour n'importe quelle suite de nombres $\lambda_n \in]0,1[$, on définit les compacts $K^{(n)}$ par récurrence en partant de $K^{(0)} = [0,1]$ et en passant de $K^{(n)}$ à $K^{(n+1)}$ en ôtant à chacun des 2^n intervalles I formant $K^{(n)}$ l'intervalle ouvert central de longueur $\lambda_n \cdot m_1[I]$. On pose enfin $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. L'exemple de la question précédente correspond à la suite constante $\forall n, \lambda_n = 1/3$. Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1[$, on peut construire par ce procédé un compact de mesure α.

(c) Montrer que les compacts précédents ont la puissance du continu (c'est-à-dire, on le rappelle, qu'ils sont en bijection avec $\mathbb{R}$ ou $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$).

Exercice 7.— Propriétés d'invariance de la mesure de Lebesgue

(a) Montrer que la mesure de Lebesgue m_n sur $\mathbb{R}^n$ est invariante par translation.

(b) Soit μ une mesure définie sur $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ invariante par translation et telle que $\mu\left[[0,1]^n\right] = \lambda < \infty$. Montrer que $\mu = \lambda m_n$.

(c) Soit E un borélien de $\mathbb{R}^n$ et $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme. Montrer que

$$m_n\left[A(E)\right] = |\operatorname{dét} A| \cdot m_n[E].$$

(d) Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \max_{[0,1]} |f|$. Montrer qu'il n'existe pas sur E de mesure μ non nulle vérifiant les propriétés suivantes :
— μ est invariante par translation ;
— Tout point $p \in E$ admet un voisinage de μ-mesure finie.

Fonctions mesurables, $\liminf$ et $\limsup$

Exercice 1.— Propriétés des fonctions mesurables
Dans tout cet exercice, $\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne.

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est mesurable.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que f est mesurable.

(c) Les fonctions en escalier sont-elles mesurables ?

(d) Soit $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble des points où f_n converge est dans $\mathcal{A}$.

Exercice 2.— $\liminf$ pour les suites et pour les ensembles
On rappelle que pour A_n une suite de parties d'un ensemble X, on note $\liminf A_n$ l'ensemble des $x \in X$ qui sont dans tous les A_n à partir d'un certain rang.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour tout n, on pose $A_n =]-\infty, x_n]$. Montrer qu'on est dans l'un des deux cas suivants :

1. $\liminf A_n =]-\infty, \liminf(x_n)]$;
2. $\liminf A_n =]-\infty, \liminf(x_n)[$.

Exercice 3.— Lemme de Fatou sur les séries

(a) Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels.
— Montrer que $\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf(a_n + b_n)$.
— Donner un exemple pour lequel cette inégalité est stricte.
— Que se passe-t-il si (a_n) converge ?

(b) Montrer que, si $(x_{n,m})$ est une suite de réels positifs ou nuls, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\liminf_{m\to\infty} x_{n,m} \right) \leq \liminf_{m\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{n,m} \right)$$

Exercice 4.— Boréliens et projection
On considère l'espace $C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Le but de l'exercice est de montrer que la tribu des boréliens sur $C([0,1],\mathbb{R})$ est la plus petite tribu qui rende les projections

$$\begin{aligned} \Phi_x : C([0,1],\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

mesurables pour tout $x \in [0,1]$.

1. Montrer que les projections sont mesurables pour la tribu borélienne.
2. Soit X un espace métrique. Montrer qu'il est à base dénombrable d'ouverts si et seulement s'il est séparable (c'est-à-dire qu'il contient une partie dénombrable dense).

3. Montrer que $C([0,1],\mathbb{R})$ est séparable.
4. Soit $\mathcal{A}$ une tribu de $C([0,1],\mathbb{R})$ qui rend les projections mesurables. Montrer que $\mathcal{A}$ contient toutes les boules fermées.
5. Conclure.

Exercice 5.— Boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$
On définit $\overline{\mathbb{R}}$ comme $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni de la distance :

$$d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$$

où par convention, $\arctan(-\infty) = -\pi/2$ et $\arctan(-\infty) = \pi/2$.

1. Montrer que d est bien une distance.
2. Montrer que la tribu des boréliens est engendrée par les $[a, +\infty]$.

Exercice 6.— Produit de lebesguiens
On note $\mathcal{M}(\mathbb{R}^k)$ l'ensemble des parties mesurables de $\mathbb{R}^k$ (c'est-à-dire la tribu complétée de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$). A-t-on :

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)\,?$$

Fonctions mesurables, tribu complétée

Exercice 1.— Limite simple de fonctions mesurables
Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre sur un ensemble X, et soit $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite d'applications mesurables.

(a) Montrer que $A = \{x \in X | \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ existe } \} \in \mathcal{A}$.

(b) Montrer que l'application $f : A \to \mathbb{R}$ qui à $x \in A$ associe $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ est mesurable.

(c) Généraliser au cas d'une suite d'applications mesurables $f_n : X \to Y$ où Y est un espace métrique complet muni de sa tribu borélienne.

Exercice 2.— Limite simple de fonctions simples
Soit $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ mesurable.

1. Dans cette question, on suppose $f \geq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq i \leq n2^n - 1$, on pose

$$E_{i,n} = \left\{ x \;\middle|\; \frac{i}{2^n} \leq f(x) < \frac{i+1}{2^n} \right\};$$

$$E_{n2^n,n} = \{x \mid f(x) \geq n\};$$

$$s_n = \sum_{0\leq i\leq n2^n} \frac{i}{2^n}\chi_{E_{i,n}}.$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, s_n est une fonction mesurable simple.

   (b) Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge simplement vers f.

   (c) Montrer que $\int_X f d\mu = \lim \int_X s_n d\mu$.

2. Dans le cas général, montrer qu'il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions simples, qui converge simplement vers f, et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|g_n(x)| \leq |f(x)|$.

Exercice 3.— Propriétés du « presque partout »
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Étant données deux fonctions mesurables $f, g : X \to \mathbb{R}$, on note :

$$f \underset{\text{pp}}{=} g \iff \mu(\{x \in X | f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

$$f \underset{\text{pp}}{\leq} g \iff \mu(\{x \in X | g(x) < f(x)\}) = 0$$

(a) Montrer que la relation $\underset{\text{pp}}{=}$ d'égalité presque partout est une relation d'équivalence.

(b) Montrer que la relation $\underset{\text{pp}}{\leq}$ d'infériorité presque partout est transitive et que :

$$f \underset{\text{pp}}{\leq} g \text{ et } g \underset{\text{pp}}{\leq} f \Rightarrow f \underset{\text{pp}}{=} g.$$

(c) Montrer que si $f_i, g_i : X \to \mathbb{C}$ vérifient $f_1 \underset{\text{pp}}{=} f_2$ et $g_1 \underset{\text{pp}}{=} g_2$, alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha f_1 + \beta g_1 \underset{\text{pp}}{=} \alpha f_2 + \beta g_2$.

(d) Montrer que, si $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$ vérifient $f_n \underset{\text{pp}}{=} g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\liminf_{n\to\infty} f_n \underset{\text{pp}}{=} \liminf_{n\to\infty} g_n$ et $\limsup_{n\to\infty} f_n \underset{\text{pp}}{=} \limsup_{n\to\infty} g_n$. Si de plus, (f_n) converge presque partout, montrer qu'il en est de même pour (g_n) et qu'alors $\lim_{n\to\infty} f_n \underset{\text{pp}}{=} \lim_{n\to\infty} g_n$.

Exercice 4.— Fonctions mesurables pour la tribu complétée

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré dont on note $(X, \mathcal{A}', \mu')$ le complété. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable pour la tribu $\mathcal{A}'$. Montrer qu'il existe une fonction g égale à f μ'-presque partout (c'est-à-dire que $\mu'(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$), qui est mesurable pour la tribu $\mathcal{A}$.

Exercice 5.— Fonctions presque nulles

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction positive mesurable ($\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne). On suppose que $\int_X f d\mu = 0$. Montrer que f est nulle presque partout.

Intégrales de fonctions à valeurs réelles ou complexes

Exercice 1.— Autour de l'inégalité de Chebychev
Soit $f : (X, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{R}^+$ mesurable. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \{x \in X | f(x) \geq n\}$ et $B_n = \{x \in X | n \leq f(x) < n+1\}$.

1. Monter que si f est intégrable, $(p\,\mu(A_p))_{p\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
2. Montrer que si f est intégrable, $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} p\,\mu(B_p)$ converge.
3. Montrer que si f est intégrable, $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \mu(A_p)$ converge.
4. À quelle(s) condition(s) les réciproques sont-elles vraies ?

Exercice 2.— Fonctions presque nulles Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Soit $f : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable. On suppose que $\int_X f d\mu = 0$. Montrer que f est nulle presque partout.
2. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On suppose que $\forall A \in \mathscr{A}, \int_A f\, d\mu = 0$. Montrer que f est nulle presque partout.

Exercice 3.— Sommation par tranches
Soit $f : (X, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Montrer que

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu\left[\{x \in X | f(x) > t\}\right]\, dm_1(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\mu\left[\{x \in X | f(x) > \frac{k}{2^n}\}\right].$$

Exercice 4.— Lemme des moyennes
Soit $g : (X, \mathscr{A}, \nu) \to \mathbb{C}$ intégrable, où ν est une mesure finie. On suppose qu'il existe un fermé $F \subset \mathbb{C}$ tel que, pour tout $A \in \mathscr{A}$ vérifiant $\nu(A) \in]0, +\infty[$, on a $\frac{1}{\nu(A)} \int_A g\, d\nu \in F$. Montrer que pour presque tout $x \in X$, $g(x) \in F$.

Révisions

Exercice 1.— Fonctions continues presque partout Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose qu'il existe une fonction continue g telle que f soit égale à g presque partout. f est-elle nécessairement continue presque partout ?
2. On suppose f continue presque partout. Existe-t-il nécessairement une fonction continue g telle que f soit égale à g presque partout ?

Exercice 2.— Image d'un négligeable par une fonction lipschitzienne
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne (resp. localement lipschitzienne). Montrer que l'image d'une ensemble Lebesgue-négligeable est Lebesgue-négligeable.

Exercice 3.— Fonction constante presque partout
Soit f une fonction de $(X, \mathscr{A}_X, \mu_X)$ dans $(Y, \mathscr{A}_Y)$, constante presque partout. On suppose que $\mathscr{A}_X$ est complète pour μ_X. Montrer que f est mesurable.

Exercice 4.— Convergence monotone inversée
Soit f_n une suite de fonctions intégrables de $(X, \mathscr{A}, \mu)$ dans $\mathbb{R}^+$, décroissante.
En utilisant le théorème de convergence monotone, montrer que

$$\int f_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int \lim_{n\to+\infty} f_n.$$

Ce résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose pas les f_n intégrables ?

Exercice 5.— Intégrale de Riemann
On rappelle qu'une fonction en escalier $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction munie d'une subdivision adaptée $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = 1$ telle que g est constante (égale à b_k) sur chaque intervalle de la forme $]a_k, a_{k+1}[$ pour $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. Son intégrale au sens de Riemann est définie comme

$$\int g = \sum_{k=1}^{p} (a_k - a_{k-1}) b_k.$$

Une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann si

$$\inf \left\{ \int g \;\middle|\; g \text{ en escalier }, g \geq f \right\} = \sup \left\{ \int g \;\middle|\; g \text{ en escalier }, g \leq f \right\}$$

et dans ce cas, l'intégrale de f est définie comme la valeur commune des deux membres de cette égalité.
Montrer que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ est intégrable au sens de Riemann, elle est Lebesgue-mesurable, intégrable au sens de Lebesgue, et les deux intégrales coïncident.

Théorèmes de Lebesgue

Exercice 1.— Dérivabilité sous l'intégrale
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose que pour tout $x \in I, t \in \mathbb{R} \to g(x,t) = e^{xt} f(t)$ est intégrable. Montrer que

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x,t)\ dt$$

définit une fonction dérivable sur I.

Exercice 2.— Une étude asymptotique
Soit (X, μ) un espace mesuré, $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable d'intégrale 1. Montrer que $\int_X n \log \left[1 + \left(\frac{f}{n}\right)^{\alpha}\right] d\mu$ converge :

1. vers $+\infty$ quand $0 < \alpha < 1$;
2. vers 1 quand $\alpha = 1$;
3. vers 0 quand $\alpha > 1$.

Exercice 3.— Lemme de Scheffé
Soit (X, μ) un espace mesuré, (f_n) une suite de fonctions positives et intégrables, convergeant presque-partout vers une fonction intégrable f, vérifiant

$$\int_X f_n\ d\mu \to \int_X f\ d\mu.$$

Montrer que $\int_X |f_n - f|\ d\mu \to 0$.

Exercice 4.— Espace mesuré fini
Soit (X, μ) un espace mesuré. On suppose qu'il existe une fonction f strictement positive telle que f et $1/f$ soient intégrables. Montrer qu'alors $\mu(X) < \infty$.

Exercice 5.— Convergence et domination

(a) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue nulle en dehors de $[0, 1]$ et d'intégrale de Lebesgue égale à 1. On pose les suites de fonctions

$$f_n(x) = n\varphi(nx),\ g_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(\frac{x}{n}),\ h_n(x) = \varphi(x - n).$$

Ces trois suites de fonctions satisfont-elles la conclusion du théorème de convergence dominée de Lebesgue ? Satisfont-elles l'hypothèse de domination ?

(b) Construire une famille (f_n) de fonctions positives intégrables convergeant vers 0 presque partout, dont les intégrales convergent vers 0, mais qui n'est cependant pas dominée par une fonction intégrable.

(c) Montrer que de toute famille (f_n) de fonctions positives intégrables convergeant vers 0 presque partout et dont les intégrales convergent vers 0, on peut extraire une sous-suite dominée par une fonction intégrable.

(d) Montrer que le résultat précédent n'est plus vrai si on ne suppose plus les fonctions positives.

Espaces de Lebesgue

Exercice 1.— Représentation duale des normes L^p

Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p$. On note q l'exposant conjugué de p.

(a) Montrer que

$$||f||_{L^p} = \sup\{\int_X fg \; d\mu \mid ||g||_q = 1\}.$$

(b) On suppose que μ est σ-finie, montrer que le résultat précédent s'étend au cas $p = +\infty$.

Exercice 2.— Convergence en mesure

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. Soit une suite de fonctions mesurables $f_n : X \to \mathbb{R}$ mesurables. On dit que (f_n) converge en mesure vers f si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mu(|f_n - f|^{-1}(]\epsilon, +\infty[)) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

(a) Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Montrer que si $|f_n - f|_{L^p} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ alors (f_n) converge en mesure vers f. Remarquer que la réciproque est fausse.

(b) Montrer que si (f_n) converge vers f presque partout alors (f_n) converge en mesure vers f.

(c) Donner un exemple de suite de fonctions mesurables (f_n) qui converge vers 0 pour la norme L^p, mais qui ne converge pas vers 0 presque partout.

(d) Montrer que si (f_n) converge en mesure vers f alors il existe une sous-suite de (f_n) qui converge presque partout vers f.

(e) Soit (f_n) une suite de fonctions réelles dans $\mathcal{L}^p$ qui converge vers f dans L^p et qui converge vers g presque-partout. Montrer que $f = g$ presque partout.

Exercice 3.— Emboîtement des espaces de Lebesgue

1. Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré fini et $1 \leq p < q \leq +\infty$. Montrer que $L^q(X) \subset L^p(X)$ et que cette inclusion est une application linéaire continue, donner sa norme.
2. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré tel qu'il existe $1 \leq p < q \leq +\infty$ pour lesquels $L^q(X) \subset L^p(X)$. Montrer que

$$\sup\{\mu(A) | \; A \in \mathscr{A}, \; \mu(A) < +\infty\} < +\infty.$$

Exercice 4.— Séparabilité des espaces $L^p([0,1])$

1. Soit $p \in [1, +\infty[$. Montrer que $L^p([0,1])$ est séparable, c'est-à-dire qu'il contient une partie dénombrable dense.
2. Montrer que $L^\infty([0,1])$ n'est pas séparable.

Densité des fonctions continues, espaces de Hilbert

Exercice 1.— Translatées d'une fonction L^p

Soit $p \in [1,+\infty[$ et $h \in \mathbb{R}^d$. Pour $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on pose $(\tau_h u)(x) = u(x-h)$.

1. Montrer que $\|\tau_h u\|_{L^p} = \|u\|_{L^p}$.
2. Montrer que $\lim_{h\to 0}\|\tau_h u - u\|_{L^p} = 0$.

Exercice 2.— Projection sur un convexe fermé

Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Dans $H = L^2(X,\mu,\mathbb{R})$, on note $C = \{f \in H | f \geq_{pp} 0\}$.

1. Montrer que C est un convexe fermé.
2. Décrire la projection sur C.
3. Que dire dans $L^2(X,\mu,\mathbb{C})$?

Exercice 3.— Convergence faible

Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Soient $p, p' \in]1,+\infty[$ tels que $1/p + 1/p' = 1$. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $L^p(\mu)$ converge faiblement vers $f \in L^p(\mu)$ si pour tout $g \in L^{p'}(\mu)$,

$$\lim \int_X f_n g d\mu = \int_X f g d\mu.$$

1. Montrer que la convergence dans L^p implique la convergence faible.
2. On suppose que $(X,\mathcal{A},\mu)$ est $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue, et que pour toute ϕ continue à support compact, on a

$$\lim \int_X f_n \phi d\mu = \int_X f \phi d\mu.$$

   On suppose de plus que la suite $\|f_n\|_{L^p}$ est bornée. Montrer que la suite (f_n) converge faiblement vers f.
3. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, non nulle. En posant $(\tau_n f)(x) = f(x-n)$, montrer que $\tau_n f$ ne converge pas vers 0 dans L^p, mais converge faiblement vers 0.

Exercice 4.— Adjoint d'un opérateur

1. Soit H un espace de Hilbert, et soit $u : H \to H$ une application linéaire continue. Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue $u^* : H \to H$ telle que :

$$\forall (x,y) \in H^2 \ \langle x | u(y)\rangle = \langle u^*(x) | y\rangle.$$

2. On définit $P : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ par $P(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$.
   (a) Montrer que P est bien définie.
   (b) Montrer que P est linéaire et continue.
   (c) Montrer que $P^*(f)(x) = \int_x^1 f(t)dt$ pour toute $f \in L^2([0,1])$.

Mesures produits, théorème de Fubini

Exercice 1.— Mesures produits
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, et soit y_0 un point d'un ensemble Y. Calculer la mesure produit $\mu \otimes \delta_{y_0}$.

Exercice 2.— Hypothèses pour Fubini-Tonelli

1. On désigne par λ (resp. μ) la mesure de Lebesgue (resp. la mesure de comptage) sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$. Soit $\Delta = \{(x,x) | x \in [0,1]\}$. Est-ce que Δ est un borélien de $\mathbb{R}^2$? Justifier ensuite l'existence des intégrales itérées suivantes, et les comparer :
$$I_1 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x,y) d\lambda(x) \right) d\mu(y)$$
$$I_2 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x,y) d\mu(y) \right) d\lambda(x).$$
2. On considère $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue λ sur les boréliens. Soit ϕ une fonction continue à support dans $[0,1]$ telle que $\int_0^1 \phi \mathrm{d}\lambda = 1$. On note $H = \chi_{\mathbb{R}^+}$ la fonction de Heaviside. On pose
$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &(x,y) \mapsto H(y)\phi(y - \lfloor y \rfloor) \left(\phi(x - \lfloor y \rfloor) - \phi(x - \lfloor y \rfloor - 1) \right). \end{aligned}$$
Montrer que les quantités $\int \int f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$ et $\int \int f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ sont bien définies et les comparer.
3. Que peut-on déduire de cet exercice ?

Exercice 3.— Mesures diffuses
Soit μ une mesure de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :
$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} d\mu(t).$$

1. Montrer que la fonction ϕ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :
$$\frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} e^{-iax} \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} K_n(t-a) d\mu(t)$$
où K_n est une fonction indépendante de a que l'on explicitera.
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} e^{-iax} \phi(x) dx$.

4. En déduire que si ϕ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, alors μ est une mesure diffuse.

Exercice 4.— Sommation par tranches
Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction $(\mathscr{A}, B(\mathbb{R}))$-mesurable.

a) Soit ν une mesure σ-finie sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$. Montrer que

$$\int_X \nu([0, f(x)[) \; d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(f^{-1}(]t, +\infty])) \; d\nu(t).$$

b) En déduire que pour $p \in [1, +\infty[$,

$$\int_X f^p \; d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} pt^{p-1} \mu(f^{-1}(]t, +\infty])) \; d\lambda(t)$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.— Mesurabilité
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

a) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y)$ est continue ;

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$ est mesurable.

1. Montrer que f est mesurable.
2. Le résultat reste-t-il vrai si l'on remplace "continue" par "mesurable" dans la première condition ?

Théorème de Radon-Nikodym, mesures réelles

Exercice 1.— Hypothèses pour Radon-Nikodym
On note λ la mesure de Lebesgue et μ la mesure de comptage sur la σ-algèbre $B([0,1])$ des boréliens de $[0,1]$.
Montrer qu'il n'existe pas de fonction borel-mesurable $h : [0,1] \to [0,+\infty[$ telle que pour tout $A \in B([0,1])$,

$$\lambda(A) = \int_A h \, d\mu.$$

Quelle est la morale de cet exercice ?

Exercice 2.— Théorème de Radon-Nikodym, le cas réel.
Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ où μ est positive et ν est réelle à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$.
Pour toute fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $f^- \in L^1(\mu)$, on pose $f d\mu$ la mesure définie par $(f d\mu)(A) = \int_A f d\mu$.

1. Montrer que $\nu = \nu_e + \nu_a$ avec $\nu_e \perp \mu$ et $\nu_a \ll \mu$, et que cette décomposition est unique.
2. Montrer qu'il existe $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $f^- \in L^1(\mathbb{R})$ et $\nu_a = f d\mu$.

Exercice 3.— Changement de variable
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, Y un ensemble, et $\phi : X \to Y$. Pour tout A appartenant à la σ-algèbre $\phi_*\mathcal{A} = \{C \subseteq Y \mid \phi^{-1}(C) \in \mathcal{A}\}$, on définit la mesure $\phi_*\mu(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$.
Soit $f : Y \to \mathbb{R}$ mesurable.

1. Montrer que $\phi_*\mathcal{A}$ est bien une σ-algèbre, et que $\phi_*\mu$ est bien une mesure.
2. On considère les deux hypothèses suivantes :
   a) $f \circ \phi$ est intégrable pour μ
   b) f est intégrable pour $\phi_*\mu$.

   Montrer que si l'une de ces deux hypothèse est vraie, alors l'autre est vraie également, et :
   $$\int_X f(\phi(x)) d\mu(x) = \int_Y f(y) d(\phi_*\mu)(y).$$
3. Dans cette question, on suppose que X et Y sont des intervalles de $\mathbb{R}$, que f est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur I, et que ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Montrer qu'alors :
   $$\int_X f(\phi(x)) \, |\phi'(x)| \, dx = \int_Y f(y) dy.$$

Exercice 4.— Fonctions absolument continues.

Soit I un segment de $\mathbb{R}$. On dit que f est *absolument continue* si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute famille dénombrable d'intervalles disjoints $]\alpha_i, \beta_i[$ de I tels que

$$\sum_i |\beta_i - \alpha_i| < \eta$$

on ait

$$\sum_i |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \epsilon.$$

On suppose f strictement croissante. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.

a) f est absolument continue.

b) L'image par f de tout ensemble lebesgue-négligeable est négligeable.

c) f est dérivable presque partout sur I, $f' \in L^1$, et pour tous $x, y \in I$,

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt.$$

On admettra le résultat suivant : pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, pour presque tout point $x \in \mathbb{R}$, on a [1]

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt = f(x).$$

On rappelle également le lemme de Borel-Cantelli : Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$ est finie. Alors l'ensemble des points qui appartiennent à une infinité de A_n est de mesure nulle.

1. Un tel point est appelé point de Lebesgue.