Université Joseph Fourier, site de Valence
Examen de Mat233 du 25 juin 2015 (seconde session), durée : 3 heures

Les calculatrices, téléphones portables et documents ne sont pas autorisés.

QUESTIONS DE COURS :
Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimensions finies.

1. Soient $\mathcal{B}_v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\mathcal{B}_w = \{w_1, \ldots, w_m\}$ des bases respectives de E et F. Rappeler brièvement comment on obtient la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_v \to \mathcal{B}_w}(f)$ dans les bases $\mathcal{B}_v$ et $\mathcal{B}_w$ de l'application linéaire $f : E \to F$.

2. Rappeler la définition du noyau $\ker(f)$ d'une application linéaire $f : E \to F$. Montrer que $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Démontrer la propriété suivante :
   si $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une famille libre de E, alors pour tout vecteur $v \in \mathrm{vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$, il existe des $\underline{\text{uniques}}$ réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p$.

4. (a) Montrer par l'absurde que le rang de la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   est supérieur ou égal à deux. En déduire une majoration sur la dimension du noyau de A.

   (b) Déterminez le noyau de A.

EXERCICE 1 : Résoudre le système d'équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z \\ \dfrac{dy}{dt} & = & x + z \\ \dfrac{dz}{dt} & = & -\frac{5}{4}x + \frac{5}{4}y + \frac{1}{4}z \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales suivantes : $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 1$.

EXERCICE 2 : Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On considère le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & \sin\beta & \cos\beta \\ 1 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix}.$$

On rappelle que $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

1. Montrer que $D = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha)$.

2. Montrer que
$$D = \begin{vmatrix} \sin\beta - \sin\alpha & \cos\beta - \cos\alpha \\ \sin\gamma - \sin\alpha & \cos\gamma - \cos\alpha \end{vmatrix} .$$

3. En utilisant les formules trigonométriques
$$\sin b - \sin a = -2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad , \quad \cos b - \cos a = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) ,$$
en déduire que
$$D = -4\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) & \sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \end{vmatrix} .$$

4. Déduire des questions précédentes l'identité
$$\sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha) = -4\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right) .$$

EXERCICE 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et y de la fonction $g(x, y) = f(y, x)$.
2. Calculer la dérivée de la fonction d'une variable $h(x) = f(x, x)$.
3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et y de la fonction $k(x, y) = f(y, f(x, x))$.

EXERCICE 4 : On se propose d'étudier la fonction g de deux variables réelles définie par
$$g(x, y) = \exp\left(-x^2 - y^2\right) .$$

1. g est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? (justifiez votre réponse)
2. Déterminer les courbes de niveau $\mathcal{C}_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = c\}$ pour $c \in]0, 1]$.
   Représenter sur un dessin la courbe de niveau pour $c = 1/2$.
3. Tracer les courbes représentatives des fonctions d'une variable
   $g_x : x \in \mathbb{R} \mapsto g(x, 0)$, $g_y : y \in \mathbb{R} \mapsto g(0, y)$ et $g_s : s \in \mathbb{R} \mapsto g(s, s)$.
4. Déterminer toutes les dérivées partielles de g jusqu'à l'ordre deux inclu.
5. Calculer le gradient de g au point $M(x_0, y_0)$ et vérifier qu'il est orthogonal à la courbe de niveau de g passant par M.
6. Déterminer les points $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels le gradient $\nabla g(x_0, y_0)$ s'annule.