Université Joseph Fourier, site de Valence

Mat233, année 2014-2015

CC du 7 novembre 2014. Durée : 2heures

Calculatrices, tablettes téléphones portables et documents interdits

Exo 1

1. Calculer la dimension de l'espace vectoriel engendré par $v_1 = (1,2,0), v_2 = (1,3,2), v_3 = (1,1,-2)$.
2. Donner la matrice M de l'application linéaire f définie par $f(1,0,0) = v_1$, $f(0,1,0) = v_2$ et $f(0,0,1) = v_3$.
3. Trouver un vecteur u de la forme $(x,y,1)$ orthogonal à v_1, v_2, v_3 pour le produit scalaire défini par $< v, v' >= xx' + yy' + zz'$ où $v = (x,y,z)$ et $v' = (x', y', z')$
4. Montrer que (v_1, v_2, u) est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Exprimer les vecteurs $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ de la base canonique comme combinaisons linéaires de v_1, v_2 et u.
6. Donner la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, u) , puis la matrice de passage de la base (v_1, v_2, u) à la base canonique.

Exo 2 On considère l'application $f : P \longmapsto P + P'$ qui associe à un polynôme P la somme de P et de sa dérivée P'.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner la matrice de f restreinte aux polynômes de degré au plus 3 par rapport à la base $\left(1, X, X^2, X^3\right)$.
3. Calculer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Trouver un vecteur propre de A.

Exo 3 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \\ 7 & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le rang de A.
2. Donner une base du noyau $\ker(A)$ de A.
3. Donner avec une justification la dimension de l'image $\operatorname{Im}(A)$.

Exo 4 On considère la matrice $A(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & z \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de $A(z)$.
2. Trouver toutes les valeurs de z pour lesquelles la matrice $A(z)$ n'est pas inversible.
3. Donner la dimension de $\ker(A(z))$ en fonction de z.

Exo 5 On considère l'endomorphisme f de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.
3. Donner la matrice de f dans la base de vecteurs propres trouvée ci-dessus.