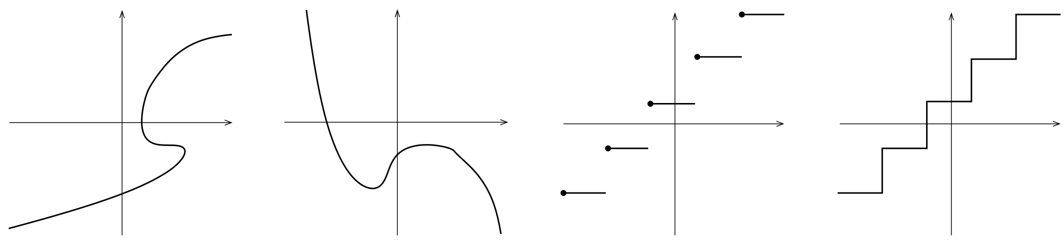
2015-2016 **MAT11p** Université Joseph Fourier
Centre Drôme-Ardèche

Feuille de TD 1 : fonctions réelles (généralités)

Exercice 1. Les courbes suivantes sont-elles des graphes de fonctions ? Si oui, s'agit-il de fonctions injectives ?



Exercice 2. Donner les domaines de définition des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+7}$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{x(x^2-1)}$

$f_3 : x \mapsto \sqrt{x(x+1)}$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{x^{1/4}}$

$f_5 : x \mapsto (x^2-2)^{\frac{1}{3}}$.

Exercice 3. Donner les domaines de définition et dessiner l'allure des graphes des fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $g : x \mapsto \sqrt{x+3}$ et $h : x \mapsto \sqrt{x}+3$.

Exercice 4. Tracer le graphe de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} |x+4| & \text{si } x \leq 0 \\ -2x+1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2-2 & \text{si } 1 \leq x\ . \end{cases}$$

Déterminer graphiquement puis par le calcul l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ des antécédents de 0 par f.

Exercice 5. Déterminer les images par $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ des intervalles $[1,3]$, $[-4,-1]$ et $[-2,3]$. Même question pour les images réciproques $f^{-1}([1,\infty[), f^{-1}(]-\infty,3])$ et $f^{-1}(]1,3])$.

Exercice 6. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ?
$f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$
$f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$
$f_3 : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \text{sign}(x) = \dfrac{x}{|x|}$

$f_4 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
$f_5 : x \in \mathbb{R} \mapsto x|x|$
$f_6 : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(2x)$.
Justifiez vos réponses. Dessiner l'allure du graphe de chaque fonction f et de sa réciproque f^{-1} si f est injective. Si f n'est pas injective, trouver si c'est possible un intervalle I tel que la restriction $f|_I$ soit injective et tracer qualitativement le graphe de $f|_I^{-1}$.

Exercice 7. Les fonctions suivantes sont-elles paires ou/et impaires ? Justifiez vos réponses.
$f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto 0$, $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$, $f_3 : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \text{sign}(x)$
$f_4 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$, $f_5 : x \in \mathbb{R} \mapsto x|x|$
$f_6 : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(2x)$, $f_7 : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$, $f_8 : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$
$f_9 : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x^2)$, $f_{10} : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin^2(x)$, $f_{11} : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x^3)$
$f_{12} : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + \sin(x)$, $f_{13} : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \cos(x)$, $f_{14} : x \in \mathbb{R} \mapsto x\cos(x)$.
Si f et g sont paire(s)/impaire(s), que pouvez-vous dire sur la parité de $f + g$ et fg ?

Exercice 8. La fonction
$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin\left(\frac{2\pi x}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$$
est-elle périodique ? Si oui, trouver une période.
Plus généralement, si f_1 et f_2 sont périodiques de périodes T_1 et T_2, $f + g$ et fg sont-elles périodiques ?

Exercice 9. Les fonctions suivantes sont-elles majorées et/ou minorées ? Sont-elles strictement croissantes ou décroissantes sur leurs domaines de définition ?
$f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto -x^2$
$f_2 : x \in [0, 1] \mapsto -x^2$
$f_3 : x \in]0, 1] \mapsto \dfrac{1}{x}$
$f_4 : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{3x^2 + 2}{6x^2 + 6}$
$f_5 : x \in [0, 1] \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x (c'est-à-dire, le plus grand entier inférieur ou égal à x).

1. La fonction f est-elle bornée ? Si oui, déterminer le plus grand minorant $\inf(f)$ de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que son plus petit majorant $\sup(f)$.

2. Montrer que f est périodique de période 1. Tracer le graphe de f.

Exercice 11. Etudier le signe des fonctions suivantes suivant la valeur de x :

$f_1 : x \in [\dfrac{3}{2}, \infty[\mapsto \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-3}$

$f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{|x-1|} - \sqrt{|2x-3|}$

$f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto (x^2-1)^{11} - |2x^2-8|^{11}$

$f_4 : x \in [0, 2\pi] \mapsto \sin(x)\cos(2x)$

$f_5 : x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[\mapsto \dfrac{\cos x}{\tan x} - \sin x.$

Exercice 12. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}' \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $\mathcal{D}' \subset f(\mathcal{D})$. Soit $I \subset \mathcal{D}$ un intervalle. On rappelle qu'une fonction est monotone si elle est soit croissante, soit décroissante. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez toutes vos réponses.

1. Si f et g sont respectivement monotones sur I et $f(I)$, alors $g \circ f$ est monotone sur I. Plus précisemment : $g \circ f$ est croissante si f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, et $g \circ f$ est décroissante si f est croissante et g décroissante ou l'inverse.
2. Si f est paire alors $g \circ f$ est paire.
3. Si f est impaire alors $g \circ f$ est impaire.
4. Si f est injective et g est injective, alors $g \circ f$ est injective.
5. Si f n'est pas injective, alors $g \circ f$ n'est pas injective.
6. Si g n'est pas injective, alors $g \circ f$ n'est pas injective.
7. Si $f : \mathcal{D} \to f(\mathcal{D})$ est bijective et monotone, alors f^{-1} est monotone.
8. Si $f : \mathcal{D} \to f(\mathcal{D})$ est bijective et paire, alors f^{-1} est paire.
9. Si $f : \mathcal{D} \to f(\mathcal{D})$ est bijective et impaire, alors f^{-1} est impaire.

Exercice 13. Étudier le signe de la fonction $f : x \in]0, 1] \mapsto \sin(\frac{1}{x})$. Donner les intervalles sur lesquelles f est strictement croissante ou décroissante. Tracer le graphe de f.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases} .$$

1. f est-elle croissante/décroissante, paire/impaire, périodique, bornée ?
2. Calculer les images par f de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, $[-1, 2]$ et $[1/2, \sqrt{2}]$.
3. Calculer les images réciproques des ensembles $\{0\}$, $\{1/2\}$, $\{1\}$ et $\mathbb{N}$.

Exercice 15. On considère la fonction

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) .$$

1. Montrer que f a pour domaine de définition $\mathcal{D} = [0, 1[$.
2. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
$$\frac{1-u}{1+u} = 1 - \frac{2u}{1+u} .$$
3. Montrer que la fonction $h : u \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{2u}{1+u}$ est croissante.
4. En déduire (sans calculer la dérivée f') que f est décroissante sur $[0, 1[$ (On pourra utiliser les résultats de l'exercice 12).

Exercice 16.

1. Soient x et y deux nombres réels tels que $x < y$. Montrer qu'il existe un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$. (Indication : par l'axiome d'Archimède, il existe un entier naturel $q > 1/(y-x)$; prendre alors $r = p/q$ avec $p = E(qx) + 1$).
2. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
3. Montrer que l'ensemble $B = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\}$ n'a pas de plus petit majorant dans $\mathbb{Q}$.