L2, Université Joseph Fourier
Séries et intégration (MAT 232)
2011-2012

TD n°1

Suites numériques et nombres réels : rappels et compléments

Rappel important : il existe un cours de L1 en ligne, intitulé "M@ths en L1gne", à l'adresse :

`http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/`

plusieurs des exercices ci-dessous en sont d'ailleurs tirés. Il est crucial, pour toute la partie du cours sur les séries numériques, d'être à l'aise avec les suites. Vérifiez-donc cette aisance à l'aide des QCM, exercices, cours et compléments du site.

1. Limite d'un produit

1. Rappeler la démonstration du résultat suivant.
   Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites de nombres complexes. Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent, alors $(u_n v_n)_n$ converge et
   $$\lim_n u_n v_n = (\lim_n u_n) \cdot (\lim_n v_n).$$
   On pourra remarquer que si a et b sont des nombres complexes, $u_n v_n - ab = (u_n - a)b + u_n(v_n - b)$.
2. Donner un exemple de deux suites divergentes $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $(u_n v_n)_n$ soit convergente.

2. Calcul de limites à l'aide des fonctions usuelles

Calculer la limite, si elle existe, des suites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{n+1}{3+2n}$
2. $u_n = \dfrac{n^{10}}{1.01^n}$
3. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$
4. $u_n = n^4 \left(\log\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) + \dfrac{1}{n^2} \right)$
5. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
6. $u_n = \tan(1/n)\cos(2n+1)$
7. $u_n = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^3 - n^3}$
8. $u_n = \dfrac{\sqrt{n-3} + \log(2n)}{\log n}$
9. $u_n = \dfrac{\log(n^2+3n-2)}{\log(n^{1/3})}$
10. $u_n = n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$

3. Développement limités

Donner un développement limité pour $(u_n)_n$ (lorsque n tend vers l'infini) avec un reste en $o(1/n^2)$, dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{n+1}{3+2n}$
2. $u_n = \dfrac{\log\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$
3. $u_n = \dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+2}$
4. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+2}$
5. $u_n = n - \dfrac{1}{\sin\frac{1}{n}}$

4. Borne supérieure, borne inférieure

Pour chacun des ensembles suivant, déterminer s'il est majoré, s'il est minoré, s'il a un maximum, s'il a un minimum, et le cas échéant déterminer ses bornes supérieures et inférieures.

1. $A = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $B = \{(-1)^n/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
3. $C = \{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
4. $D = \left\{\frac{n+1}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$
5. $E = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$

5. Suites extraites

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

1. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite, alors $(u_n)_n$ converge.
2. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent, alors $(u_n)_n$ converge aussi.
3. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{n^2})_n$ convergent, alors $(u_n)_n$ converge aussi.

6. Une somme téléscopique

1. Déterminer trois réels A, B, C tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de 0, 1 et -1 on ait :
$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$
2. En utilisant cette relation pour $x = 2, 3, \cdots, n$, déterminer pour chaque entier $n \geqslant 2$ une expression simple de
$$S_n := \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{2(2^2-1)} + \frac{1}{3(3^2-1)} + \cdots + \frac{1}{n(n^2-1)}$$
3. En déduire que la suite $(S_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

7. Suites adjacentes

Pour chacun des couples suivants, montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$.
3. $u_0 = a > 0$, $v_0 = b > a$, $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$.

8. Algorithme de Babylone

Soient a et u_0 deux réels strictement positifs. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) .$$

1. Montrer que si $(u_n)_n$ converge, c'est vers $\sqrt{a}$
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$,
$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{a})\left(1 - \frac{\sqrt{a}}{u_n}\right) .$$
3. Montrer que $(u_n)_n$ converge.

9. Moyennes de Césaro

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes. On note :

$$\forall n \geqslant 1, \quad S_n = \frac{1}{n}(u_1 + \ldots + u_n) .$$

1. Montrer que si $(u_n)_n$ converge dans $\mathbb{C}$, alors $(S_n)_n$ converge vers la même limite.
2. Exhiber une suite $(u_n)_n$ divergente telle que $(S_n)_n$ converge.
3. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombre réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge. Montrer que $(u_n^{1/n})_n$ converge vers la même limite.

10. Limite supérieure et limite inférieure

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée de nombres réels. On définit les suites i_n et s_n par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad i_n = \inf\{u_k \text{ t.q. } k \geqslant n\} \quad \text{ et } \quad s_n = \sup\{u_k \text{ t.q. } k \geqslant n\} .$$

1. Montrer que $(i_n)_n$ et $(s_n)_n$ convergent. La limite de i_n est appelée *limite inférieure de la suite* $(u_n)_n$ et est notée $\liminf_n u_n$. Celle de s_n est appelée *limite supérieure de la suite* $(u_n)_n$ et est notée $\limsup_n u_n$.

2. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ convergeant vers $\liminf_n u_n$ et une autre convergeant vers $\limsup_n u_n$. Cela donne donc une autre démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.
3. Montrer que $(u_n)_n$ converge si et seulement si $(i_n)_n$ et $(s_n)_n$ convergent dans $\mathbb{R}$ vers la même limite.

11. Applications contractantes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, F une application de I dans lui-même et ρ un nombre réel de $[0,1[$. On suppose que F vérifie :

$$\forall x, y \in I, \quad |F(x) - F(y)| \leqslant \rho |x - y| \ .$$

Montrer que la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = F(u_n)$ converge, et que sa limite est l'unique point fixe de F. On pourra commencer par montrer que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy.

L2, Université Joseph Fourier
Séries et intégration (MAT 232)
2011-2012

TD N°2

Séries à termes positifs

1. Nature de séries

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{e^n}{n^5+1}$;
2. $u_n = \dfrac{2^n+n^2}{3^n n^2+1}$;
3. $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}$;
4. $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{n+1}}$;
5. $u_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \quad (n \geqslant 1)$;
6. $u_n = \dfrac{e^{-n}}{4+\sin n}$;
7. $u_n = \dfrac{1-n\ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{n+1}}$;
8. $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$;
9. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \quad (n \geqslant 1)$;
10. $u_n = ne^{-n}$;
11. $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$;
12. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \quad (n \geqslant 2)$;
13. $u_n = \dfrac{n!}{n^n} \quad (n \geqslant 1)$;
14. $u_n = \dfrac{\ln n}{n^\alpha} \quad (n \geqslant 1)$ (discuter selon la valeur du réel α) ;
15. $u_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$;
16. $u_n = n^2\left(e^{\frac{1}{n}} - \sin\dfrac{1}{n} - \cos\dfrac{1}{n} - \left(\ln(1-\dfrac{1}{n})\right)^2\right)$.

2.

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres positifs telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{u_n+1}$ converge.

3. Série à terme général défini par une récurrence

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{\sin u_n}{n+1}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in [0,1]$, puis montrer que la série $\sum u_n$ converge.

4. Séries à terme général positif décroissant

Soit $(u_n)_n$ une suite positive décroissante telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ on ait $(n-N)u_n \leqslant \varepsilon$. En déduire que nu_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Donner un exemple de suite positive $(v_n)_n$ telle que $\sum v_n$ converge et nv_n ne tend pas vers 0.

5.

Soit $(u_n)_n$ une suite à termes positifs, et notons $v_n = \dfrac{1}{1+n^2 u_n}$.

1. Montrer par des exemples que la divergence de $\sum u_n$ ne permet pas de déterminer la nature de $\sum v_n$.

   On suppose dans la suite que $\sum u_n$ converge et on va montrer que $\sum v_n$ diverge.
2. Traiter le cas où $n^2 u_n$ ne tend pas vers $+\infty$.
3. Traiter le cas où $n^2 u_n \to +\infty$ en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n^{1/2} v_n^{1/2}$.

6.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} u_p$.

Comparer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{S_n}$ (indication : on pourra considérer $\log S_{n+1} - \log S_n$).

L2, Université Joseph Fourier
Séries et intégration (MAT 232)
2011-2012

TD N°3

Séries à termes quelconques

1. Natures de séries

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$;
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$;
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$;
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$;
5. $u_n = \sin\dfrac{(-1)^n}{n}$;
6. $u_n = 1 - \sqrt{1 - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$;
7. $u_n = \dfrac{\cos(3n)}{\ln(n)}$;
8. $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos(n)}{\ln(\ln(n))}$.

2. Linéarisations

Rappeler la formule d'Euler sur les polynômes trigonométriques puis déterminer la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{\sin^3(n)}{n}$;
2. $u_n = \dfrac{\sin^k(n)\cos^\ell(n)}{n}$ où $k, \ell \in \mathbb{N}$ sont fixés ;
3. $u_n = \dfrac{|\sin(n)|}{n}$.

3. Comparaison avec une intégrale

En utilisant la comparaison avec une intégrale, étudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$;
2. $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))^\alpha}$.

Indication : on pourra dans le premier cas calculer la dérivée de $x \mapsto (\ln x)^\beta$.

4. Petits “o”

Soit u_n une suite à termes réels.

1. Donner un exemple tel que $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^2$ diverge.
2. On suppose dans les questions suivantes que $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable en 0, telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\sum f(u_n)$ converge.

5. Calcul de sommes

Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes :

1. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(3^{-n+2} + 2^{-n+3}\right)$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n!}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n!}$

6. Formule de Taylor-Lagrange

On note f la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ définie sur $]-1,1[$ et on fixe $\lambda \in]-1,1[$.

1. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}\lambda^n}{n}$ (où $n \geqslant 1$) converge.
2. Montrer que sa somme vérifie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\lambda^n}{n} = \ln(1+\lambda)$$

7. Calcul de $\sum_{n \geqslant 1} n x^{n-1}$

Soit x un nombre réel, avec $|x| < 1$.

1. Montrer que $\sum_n x^n$ et $\sum_n n x^{n-1}$ convergent.
2. Donner des expressions fermées (c’est-à-dire sans signe $\sum$) de

$$\sum_{n=0}^{N} x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{N} n x^{n-1}.$$

3. En déduire la valeur de $\sum_{n \geqslant 1} n x^{n-1}$.
4. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left((n-2)3^{-n} + (n-3)2^{-n}\right)$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^2-2n)3^{-n}$

8. Attention à la semi-convergence

Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes complexes. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{n}$ converge.

9. Un pot-pourri

Soient a et b deux réels. On considére la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{a^n}{n+b^n}$.

1. On suppose $b \leqslant 1$. Pour quelles valeurs de a la série est-elle absolument convergente ?
2. Même question pour $b > 1$.
3. On suppose $a = -1$. Pour quelles valeurs de b la série est-elle convergente ?
4. Représenter dans le plan les points de coordonnées (a, b) tels que la série est absolument convergente, convergente, divergente.

10. Règle de Raabe-Duhamel

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $a > 0$ $b > 1$ tels que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^b}\right) \ .$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n^a u_n$. Montrer que la série de terme général $\ln \frac{v_{n+1}}{v_n}$ converge.
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

L2, Université Joseph Fourier
Séries et intégration (MAT 232)
2011-2012

TD N°4

INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS À VALEURS POSITIVES

1. Une fraction rationnelle

1. Déterminer trois réels A, B, C tels que pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

2. Calculer pour $X > 0$:

$$I(X) = \int_1^X \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$$

3. Quelle est la limite lorsque $X \to +\infty$ de $I(X)$? Que peut-on donc dire de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$?

2. Changement de variable

Soit $X \in [0, +\infty[$. Calculer $I(X) = \int_0^X \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$ puis déterminer la limite de $I(X)$ lorsque $X \to +\infty$.

3. Intégration par parties

Déterminer une primitive F de la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : [0, +\infty[& \to & [0, +\infty[\\ t & \mapsto & t^2 e^{-t} \end{array}$$

En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, et déterminer sa valeur.

4. Nature d'intégrales impropres

Déterminer la nature de chacune des intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x + e^{-x}}\, dx$;
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{x + e^{-x}}\, dx$;
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x + e^{-x}}\, dx$;
4. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2 + 1}\, dx$;

5. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2|\sin x|}$;
6. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} e^{-x}\, dx$;
7. $\displaystyle\int_0^{\infty} (x+2-\sqrt{x^2+4x+1})\, dx$;
8. $\displaystyle\int_1^{\infty} (\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+1})\, dx$;
9. $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}}\, dx$;
10. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^3}\, dx$;
11. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2+\sin x+\sin^2 x}{\sqrt[3]{x^4+x^2}}\, dx$;
12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$;
13. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{1-x}\, dx$;

5. Limite et convergence de l'intégrale

1. Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction continue par morceaux telle que $f(t) \to \ell$ quand $t \to +\infty$, avec $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge.
2. Donner un exemple de fonction continue par morceaux $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ telle que $g(t) \not\to 0$ quand $t \to +\infty$ et $\int_0^{+\infty} g(t)\, dt$ converge.

6. Deux équivalents

1. Déterminer la nature des intégrales impropres $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$.
2. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$. Calculer sa limite en $+\infty$.
3. Utiliser une intégration par parties pour donner un équivalent simple de f en $+\infty$.
4. Donner un équivalent simple de f en 0^+.

7. Dérivée logarithmique

Soit $f : [0,+\infty[\to]0,+\infty[$ une fonction continue. Pour tout $x \in [0,+\infty[$ on note $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

Montrer que les intégrales impropres $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{F(t)}\, dt$ ont même nature.

8. Tiré de l'examen de rattrapage 2010

Pour tout entier $n \geqslant 0$ on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos^2 x}{1+x}\, dx, \qquad v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{1+x}\, dx$$

1. Calculer $a_n := u_n + v_n$ et vérifier que la série $\sum_n a_n$ diverge.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n > 0$ on a

$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{2\pi n^2}$$

3. Déduire des résultats précédents que $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries divergentes.
4. Si α est un paramètre réel, on pose

$$f_\alpha(x) = \frac{\sin^2 x}{(1+x)^\alpha} \quad \forall x \geqslant 0$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la fonction f_α est intégrable sur $[0, +\infty[$.

L2, Université Joseph Fourier
Séries et intégration (MAT 232)
2011-2012

TD n°5

Intégrales impropres : cas général

1. $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt$ n'est pas absolument convergente

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt\ .$$

1. Déterminer un réel $a > 0$ tel que pour tout $x \in [n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}]$, $|\sin(x)| \geqslant a$.
2. En déduire un réel $b > 0$ tel que $u_n \geqslant \frac{b}{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. En déduire que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt$ est divergente.

2. Nature d'intégrales impropres

Déterminer la nature de chacune des intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\cos x}{\ln(x)}\, dx$;
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin(x-1)}{\ln(x)}\, dx$;
3. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x + e^{-x}}\, dx$;
4. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^{1/2} + x^{1/4}\sin(x)}\, dx$;
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos\frac{2}{x}}{x}\, dx$;
6. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{x+2}}\, dx$;
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x(1-x^2)\ln|x|}\, dx$;

3. $\int_0^{+\infty} f(t^{\alpha})\, dt$ pour une fonction périodique de moyenne nulle

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 1, et telle que $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$. On rappelle qu'une fonction continue sur un intervalle compact est bornée sur cet intervalle.

1. Montrer que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$, et en déduire que la fonction F définie par :
$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$
est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a}\, dt$ converge pour tout $a \in]0, 1[$.
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t^{\alpha})\, dt$ converge pour tout $\alpha > 1$.