Trigonométrie

Le but de ce qui suit est de définir rigoureusement les diverses fonctions trigonométriques (en particulier les fonctions sinus et cosinus, dont l'existence et les principales propriétés ont été admises dans le secondaire à partir d'une "évidence" géométrique), puis d'établir leurs principales propriétés.

Seront supposés connus : le logarithme, en tant qu'unique primitive s'annulant en 1 de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbf{R}^{+*}$, et donc l'exponentielle réelle, homéomorphisme réciproque de ce logarithme. Enfin, par application de la formule de Taylor avec reste intégrale, on prouve de façon élémentaire le résultat suivant :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

1. Les fonctions trigonométriques, étude algébrique.

Théorème et définition : Pour tout nombre complexe z, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente, en vertu de la règle de d'Alembert. On peut donc prolonger l'exponentielle réelle au plan complexe en posant pour tout z de $\mathbf{C}$:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

L'exponentielle d'un nombre complexe étant maintenant définie, la construction des fonctions cosinus, sinus, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, n'est plus qu'une simple formalité. On notera que leur développement en série entière découle immédiatement de leur définition et du développement de l'exponentielle. Il serait donc particulièrement aberrant de songer à démontrer le développement en série entière du sinus ou du cosinus, par emploi d'une formule de Taylor notamment, alors que ce développement en série entière constitue en quelque sorte la définition de ces fonctions !

Définition 2 : Pour z dans $\mathbf{C}$, on pose :

$$\mathrm{ch}(z) = \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\mathrm{sh}(z) = \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) = \frac{\exp(\mathrm{i}z)+\exp(-\mathrm{i}z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(z) = \frac{\exp(\mathrm{i}z)-\exp(-\mathrm{i}z)}{2\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Bien évidemment, les rayons de convergence de toutes les séries entières qui viennent d'être écrites sont infinis (sommes de deux séries entières de rayons de convergence infinis).

Par construction, les fonctions ch et cos sont paires, sh et sin impaires.

Ces définitions étant maintenant posées, il s'agit de démontrer nos bonnes vieilles formules de trigo. Pour cela, nous allons voir qu'il suffit de connaître le résultat-clef suivant :

> <u>Théorème</u> : Quels que soient les nombres complexes a et b, on a :
> $$\exp(a+b) = \exp(a).\exp(b)$$
> En particulier, on a $\exp(a).\exp(-a) = \exp 0 = 1$, et donc $\exp(a) \neq 0$.

<u>Preuve</u> : les séries définissant $\exp(a)$ et $\exp(b)$ étant absolument convergentes, on peut effectuer leur produit de Cauchy. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\exp a.\exp b &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p+q=n} \frac{a^p}{p!}\frac{b^q}{q!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} a^p b^q \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n} \binom{n}{p} a^p b^q \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (a+b)^n \text{ (merci Newton)} \\
&= \exp(a+b).
\end{aligned}$$

À partir de là, il n'est pas difficile de se convaincre que les formules algébriques usuelles de trigonométrie circulaire et hyperbolique (c'est-à-dire les formules ne faisant pas intervenir de limites ou de dérivées, ni celles qui parlent du nombre π) s'obtiennent sans difficulté, d'autant que l'on sait par avance le résultat auquel on est censé aboutir !

Il est bien évidemment hors de question de prouver toutes les formules usuelles, contentons-nous en guise d'exemple du développement de $\sin(a+b)$. Pour cela, partons du résultat présumé, c'est plus commode :

$$\begin{aligned}
&\sin a.\cos b + \cos a.\sin b \\
&= \frac{1}{4\mathrm{i}}\Big[\big(\exp(\mathrm{i}a) - \exp(-\mathrm{i}a)\big)\big(\exp(\mathrm{i}b) + \exp(-\mathrm{i}b)\big) + \big(\exp(\mathrm{i}a) + \exp(-\mathrm{i}a)\big)\big(\exp(\mathrm{i}b) - \exp(-\mathrm{i}b)\big)\Big] \\
&= \frac{1}{4\mathrm{i}}\big[\exp\mathrm{i}(a+b) + \exp\mathrm{i}(a-b) - \exp\mathrm{i}(-a+b) - \exp\mathrm{i}(-a-b)\big] \\
&\qquad + \frac{1}{4\mathrm{i}}\big[\exp\mathrm{i}(a+b) + \exp\mathrm{i}(-a+b) - \exp\mathrm{i}(a-b) - \exp\mathrm{i}(-a-b)\big] \\
&= \frac{1}{4\mathrm{i}}\big[2\exp\mathrm{i}(a+b) - 2\exp\mathrm{i}(-a-b)\big] \\
&= \sin(a+b).
\end{aligned}$$

Nous utiliserons librement par la suite toutes les formules de trigonométrie dont nous aurons besoin.

2. Étude sur R des fonctions sinus et cosinus.

Dans tout ce paragraphe, nous restreindrons les fonctions sinus et cosinus à **R**. En tant que sommes de séries entières de rayon de convergence infini, ce sont des fonctions de classe C^∞ sur **R**, et en dérivant terme à terme (on peut !), il vient immédiatement que la dérivée du sinus est le cosinus, et que la dérivée du cosinus est l'opposé du sinus. De plus, ces deux fonctions arrivant visiblement dans **R** (voir leur développement en série entière, avec z réel), et vérifiant $\cos^2+\sin^2=1$, elles sont bornées sur **R**.

<u>Prouvons que le cosinus s'annule sur</u> $\mathbf{R}^+$.

Si tel n'était pas le cas, puisque le cosinus est continu et que $\cos 0=1$, il resterait strictement positif sur $\mathbf{R}^+$, et le sinus serait strictement croissant sur cet intervalle ($\sin'=\cos$).

Fixons alors un réel a strictement positif. On a donc $\sin a>0$, puisque $\sin 0=0$.

La fonction définie par $g(x)=\cos x+x\sin a$, dont la dérivée est égale à $-\sin x+\sin a$, est donc décroissante sur $[a,+\infty[$ (il est conseillé de faire un petit tableau de signes pour bien voir tout cela), ce qui est manifestement impossible puisque g tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ($\sin a>0$ et le cosinus reste borné).

Il y a donc une impossibilité et le cosinus s'annule bien sur $\mathbf{R}^+$.

Soit alors A l'ensemble des annulations du cosinus sur $\mathbf{R}^+$. A est un fermé de $\mathbf{R}^+$ (image réciproque du fermé $\{0\}$ par le cosinus qui est continu) et donc la borne inférieure de A est un élément de A : c'est la plus petite annulation positive du cosinus.

<u>Définition</u> : le nombre π est le double de la plus petite annulation positive du cosinus.

On est loin du π (rapport de la circonférence au diamètre) égal à 3 de la Bible…

À partir de maintenant, tout va tomber en cascade :

π/2 étant la plus petite annulation du cosinus, on a $\cos x>0$ pour tout x de [0,π/2[. Ainsi, le sinus croît strictement sur [0,π/2], il prend donc des valeurs positives sur cet intervalle ($\sin 0=0$) et puisque $\cos^2+\sin^2=1$, il vient $\sin\pi/2=1$. Bref, le sinus croît sur [0, π/2] de 0 à 1, et comme $\cos'=-\sin$, le cosinus décroît de 1 à 0.

Mais pour tout réel x, on a $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\sin(\frac{\pi}{2})\cos x+\cos(\frac{\pi}{2})\sin x=\cos x$ et par un calcul analogue, $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x$. La connaissance des variations du cosinus et du sinus sur un intervalle de longueur π/2 donne donc sans difficulté les variations de ces deux fonctions sur l'intervalle de longueur π/2 qui suit… Quand on a fait cela quatre fois, on constate que l'on retombe au point de départ, on peut donc énoncer :

<u>Théorème</u> : Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques, et leur plus petite période est 2π.

3. Étude sur R de la fonction $x \longrightarrow \exp(ix)$.

Il s'agit ici de retrouver l'interprétation géométrique du sinus et du cosinus, à travers leur lien avec le cercle unité de **C**.

Nous noterons $U = \{z \in \mathbf{C} \,/\, |z| = 1\}$,

$$U_1 = \{z \in U \,/\, \mathrm{Re}z \geq 0 \text{ et } \mathrm{Im}z \geq 0\},$$
$$U_2 = \{z \in U \,/\, \mathrm{Re}z \leq 0 \text{ et } \mathrm{Im}z \geq 0\},$$
$$U_3 = \{z \in U \,/\, \mathrm{Re}z \leq 0 \text{ et } \mathrm{Im}z \leq 0\},$$
$$U_4 = \{z \in U \,/\, \mathrm{Re}z \geq 0 \text{ et } \mathrm{Im}z \leq 0\}.$$

Constatons tout d'abord que pour tout réel x, on a $\exp(\mathrm{i}x) \in U$. En effet, par définition même des fonctions sinus et cosinus, on a $\exp(\mathrm{i}x) = \cos x + \mathrm{i}\sin x$. Mais $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et donc $\exp(\mathrm{i}x) \in U$.

Réciproquement, fixons un élément z_0 de U, que l'on écrira $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, x_0 et y_0 réels.

On a $x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} = 1$, donc x_0 et y_0 sont tous deux dans $[-1,1]$.

Si z_0 est élément de U_1, x_0 est dans $[0,1]$ et l'étude des variations du cosinus prouve l'existence d'un unique réel t de $[0, \pi/2]$ tel que $x_0 = \cos t$. Mézalor $\sin^2 t = y_0^{\ 2}$, et comme les deux nombres $\sin t$ et y_0 sont positifs, ils sont égaux. Ainsi, $z_0 = \exp(\mathrm{i}t)$.

Par des raisonnements en tous points analogues, on prouverait que :

pour tout z de U_2, il existe un unique t de $[\pi/2, \pi]$ tel que $z = \exp(\mathrm{i}t)$,

pour tout z de U_3, il existe un unique t de $[\pi, 3\pi/2]$ tel que $z = \exp(\mathrm{i}t)$,

pour tout z de U_4, il existe un unique t de $[3\pi/2, 2\pi]$ tel que $z = \exp(\mathrm{i}t)$.

Et enfin, en faisant le bilan de tout cela, on conclut que :

<u>pour tout z de U, il existe un unique t de $[0,2\pi[$ tel que $z = \exp(\mathrm{i}t)$.</u>

Inversement, étant donné z dans U, recherchons <u>tous</u> les réels t tels que $z = \exp(\mathrm{i}t)$.

On vient de voir qu'il existe t_0 unique dans $[0,2\pi[$ tel que $z = \exp(\mathrm{i}t_0)$. Soit alors un réel t quelconque, et effectuons la division euclidienne de t par 2π : $t = 2k\pi + r$, avec $0 \leq r < 2\pi$ et k dans **Z**.

$$\begin{aligned}
\text{Alors : } z = \exp(\mathrm{i}t) &\Leftrightarrow \exp(2\mathrm{i}k\pi + \mathrm{i}r) = z \\
&\Leftrightarrow \exp(2\mathrm{i}k\pi).\exp(\mathrm{i}r) = \exp(\mathrm{i}t_0) \\
&\Leftrightarrow \exp(\mathrm{i}r) = \exp(\mathrm{i}t_0) \\
&\Leftrightarrow r = t_0 \text{ car tous deux sont dans } [0,2\pi[.
\end{aligned}$$

On peut maintenant faire le bilan de tout ce paragraphe :

> <u>Théorème</u>: Pour tout complexe z de module 1, il existe un unique réel t_0 de $[0,2\pi[$ tel que $z = \exp(\mathrm{i}t_0)$. De plus, les réels t tels que $z = \exp(\mathrm{i}t)$ sont les nombres de la forme $t = t_0 + 2k\pi$ où k est un entier quelconque.

4. Étude de l'exponentielle complexe.

La propriété selon laquelle, pour tous complexes a et b, on a $\exp(a).\exp(b)=\exp(a+b)$ et $\exp a \neq 0$ peut, en termes savants, se résumer en : l'exponentielle réalise un morphisme du groupe additif de **C** dans le groupe multiplicatif **C***.

Étudions le noyau et l'image de ce morphisme.

Image de l'exponentielle

Soit z un complexe non nul. Écrivons $z=|z|z_0$. Alors z_0 est bien évidemment un complexe de module 1, et en vertu du théorème précédent, il existe t_0 dans **R** tel que $z_0=\exp(\mathrm{i}t_0)$.

Mais $|z|$ est un réel strictement positif, c'est donc l'exponentielle de son logarithme.

On peut donc écrire $z=\exp(\ln|z|).\exp(\mathrm{i}t_0)=\exp(\ln|z|+\mathrm{i}t_0)$. Ainsi, z est l'exponentielle de quelqu'un. La seule restriction que l'on a faite sur z étant qu'il soit non nul, il vient :

L'exponentielle est une surjection de **C** sur **C***.

Noyau de l'exponentielle

On prendra bien garde que le noyau de l'exponentielle est l'ensemble des gens qui s'envoient sur 1 (et non sur 0), 1 étant le neutre du groupe multiplicatif de **C***.

Soit alors z dans **C**, que j'écris $x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels.

En écrivant $\exp(z)=\mathrm{e}^x\exp(\mathrm{i}y)$, on voit que $|\exp(z)|=\mathrm{e}^x$. Ainsi, si $\exp(z)$ vaut 1, son module aussi, et donc $\mathrm{e}^x=1$. Mais x est un réel, donc $x=0$.

Bref, pour que $\exp z=1$, il est nécessaire que z soit imaginaire pur.

Réciproquement : si $z=\mathrm{i}y$, avec y réel. Alors $\exp(\mathrm{i}y)=1$ équivaut à $\exp(\mathrm{i}y)=\exp(\mathrm{i}.0)$, ce qui équivaut, en vertu du théorème final de la partie **3**, à ce que y soit de la forme $2k\pi$, avec k entier.

Ainsi, $\exp z=1$ si et seulement si z est de la forme $2\mathrm{i}k\pi$, c'est dire que le noyau de l'exponentielle est $2\mathrm{i}\pi$**Z**.

Résumons tout cela :

> Théorème fondamental : l'exponentielle est un morphisme surjectif du groupe additif de **C** sur le groupe multiplicatif **C***, de noyau $2\mathrm{i}\pi$**Z**.

Attention, on notera en particulier que contrairement à l'exponentielle réelle, l'exponentielle complexe n'est pas injective (son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$).

Plus précisément, on a $\exp(a)=\exp(b) \Leftrightarrow \exp(a-b)=1$

$$\Leftrightarrow a-b\in 2\mathrm{i}\pi\,\mathbf{Z}$$

$$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbf{Z} \text{ tel que } a=b+2\mathrm{i}k\pi.$$

Remarquons enfin que tout ceci permet de voir que tout complexe possède des racines $n^{\text{èmes}}$ (n entier supérieur ou égal à 1) : Si $z = 0$, c'est clair, et si $z \neq 0$, on écrit $z = \exp a$, et $z' = \exp\left(\frac{a}{n}\right)$ vérifie bien $z'^n = z$.

5. Une application : le théorème de d'Alembert-Gauss.

> <u>Théorème fondamental de l'Algèbre</u>: Tout polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ possède une racine dans $\mathbf{C}$.

<u>Preuve</u> : Fixons un polynôme P non constant de $\mathbf{C}[X]$. On posera $\alpha = \inf_{z \in \mathbf{C}} |P(z)|$.

<u>Première étape</u> : prouvons que cette borne inférieure est atteinte.

P étant non constant, il est clair que $\lim_{|z| \to \infty} |P(z)| = +\infty$. Il existe donc un réel A tel que :

$$\forall z \in \mathbf{C},\ |z| > A \Rightarrow |P(z)| > \alpha + 1. \text{ Ainsi, il vient que } \alpha = \inf_{|z| \le A} |P(z)| .$$

Pour conclure, il suffit d'invoquer la continuité de la fonction $z \mapsto |P(z)|$ sur le disque fermé de centre 0 et de rayon A qui est compact, pour dire que cette fonction atteint sa borne inférieure sur ce compact.

Conclusion : Il existe un complexe a tel que $\alpha = |P(a)|$, ou encore tel que $\forall z \in \mathbf{C},\ |P(a)| \le |P(z)|$.

<u>Seconde étape</u> : prouvons que $\alpha = |P(a)| = 0$, et ainsi que a est racine de P.

Si tel n'était pas le cas :

Écrivons pour h dans $\mathbf{C}$ (grâce à la formule de Taylor pour les polynômes par exemple) :

$$P(a+h) = P(a) + a_1 h + \ldots + a_n h^n .$$

P étant non constant, il y a des a_i qui ne sont pas nuls. Soit p le plus petit entier tel que a_p soit non nul. On peut alors écrire : $P(a+h) = P(a) + a_p h^p \left(1 + b_1 h + \ldots + b_q h^q\right)$ avec $q = n - p$.

Appliquons cela à des valeurs intelligentes de h. Pour cela, prenons un réel t compris entre 0 et 1, et choisissons h_t tel que $h_t^p = -t\,\dfrac{P(a)}{a_p}$ (c'est ici que l'on utilise la théorie de l'exponentielle complexe, grâce à laquelle on a établi que tout complexe possède des racines $p^{\text{èmes}}$).

On a alors :
$$\begin{aligned} P(a+h_t) &= P(a) - tP(a)\left(1 + b_1 h_t + \ldots + b_q h_t^q\right) \\ &= (1-t)P(a) - tP(a)\left(b_1 h_t + \ldots + b_q h_t^q\right) \end{aligned}$$

Mais quand t tend vers zéro, h_t tend aussi vers zéro (prendre les modules dans la définition de h_t). Alors, pour t assez petit, on aura $\left|b_1 h_t + \ldots + b_q h_t^q\right| \le \frac{1}{2}$.

Alors, toujours pour t assez petit, il viendra $|P(a+h_t)| \le (1-t)|P(a)| + \frac{t}{2}|P(a)| = (1-\frac{t}{2})|P(a)| < |P(a)|$.

On aboutit ainsi à une contradiction, puisque a réalisait le minimum du module de P. Le théorème est prouvé.