20

Théorème de Rolle et égalité des accroissements finis. Applications

20.1 Le théorème de Rolle sur un espace vectoriel normé

Pour ce paragraphe, on se donne un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

Le théorème de Rolle est basé sur les deux théorèmes suivants, relatifs à des problèmes d'extremum.

Théorème 20.1 *Si K est un compact de E et f une fonction continue K dans $\mathbb{R}$, elle est alors bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe α et β dans K tels que :*

$$f(\alpha) = \inf_{x \in K} f(x), \ f(\beta) = \sup_{x \in K} f(x).$$

Théorème 20.2 *Si $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de E et f une fonction de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}$ différentiable en un point $\alpha \in \mathcal{O}$ et admettant un extremum local en α alors $df(\alpha) = 0$.*

Théorème 20.3 (Rolle) *Soient K un compact de E d'intérieur non vide, f une fonction continue de K dans $\mathbb{R}$ différentiable sur l'intérieur de K et constante sur la frontière de K,* $\mathrm{Fr}(K) = K \setminus \overset{\circ}{K}$. *Il existe alors un élément $c \in \overset{\circ}{K}$ tel que $df(c) = 0$.*

Démonstration. Si f est constante, alors sa différentielle est nulle.

On suppose donc f non constante.

La fonction f étant continue sur le compact K est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe α, β dans K tels que $f(\alpha) = \inf\limits_{x \in K} f(x)$ et $f(\beta) = \sup\limits_{x \in K} f(x)$. Si α, β sont dans $\mathrm{Fr}(K)$ on a alors $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) = f(\alpha)$ pour tout $x \in K$ et f est constante contrairement à l'hypothèse de départ, on a donc $\alpha \in \overset{\circ}{K}$ ou $\beta \in \overset{\circ}{K}$, ce qui entraîne $df(\alpha) = 0$ ou $df(\beta) = 0$. ■

La classique version réelle de ce théorème est la suivante.

Théorème 20.4 (Rolle) *Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$, il existe alors un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Remarque 20.1 *Il n'y a pas, a priori, unicité du point c tel que $f'(c) = 0$ (figure 20.1).*

Remarque 20.2 *La fonction $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ sur $[-1, 1]$ nous donne un exemple de situation où f n'est pas dérivable au bord (figure 20.2).*

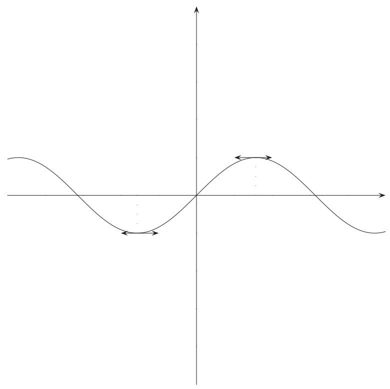

FIG. 20.1 – $y = \sin(x)$

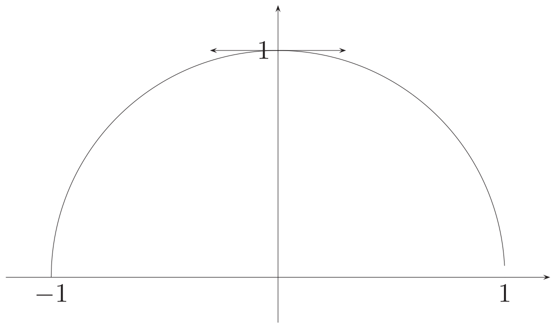

FIG. 20.2 – $y = \sqrt{1 - x^2}$

Remarque 20.3 *Le théorème n'est plus vrai si f n'est pas continue au bord comme le montre l'exemple de la fonction f définie par $f(x) = x$ sur $]0, 1]$ et $f(0) = 1$ (figure 20.3).*

Remarque 20.4 *Le théorème n'est plus vrai si f n'est pas dérivable sur $]a, b[$ tout entier comme le montre l'exemple de la fonction f définie par $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$ (figure 20.4).*

Le théorème de Rolle pour les fonctions d'une variable réelle est encore valable sur une demi-droite fermée. Précisément on a le résultat suivant.

Théorème 20.5 *Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle fermé $[a, +\infty[$, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, +\infty[$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$, il existe alors un point $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Le changement de variable $t = e^{-x}$ nous ramène à un intervalle compact. On définit donc la fonction g sur $[0, e^{-a}]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} f(-\ln(t)) \text{ si } t \in]0, e^{-a}], \\ f(a) \text{ si } t = 0. \end{cases}$$

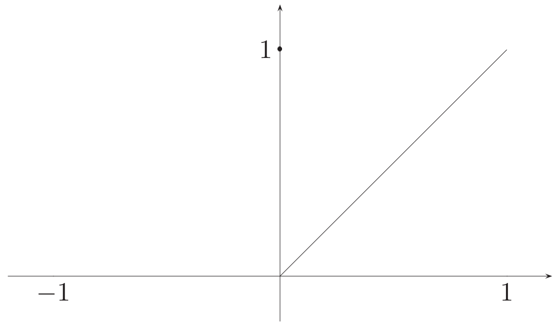

FIG. 20.3 –

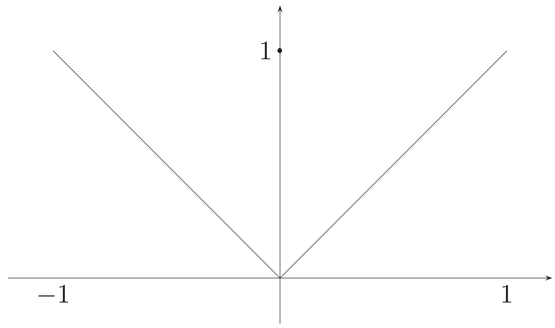

FIG. 20.4 – $y = |x|$

Cette fonction est continue sur $]0, e^{-a}]$ comme composée de fonctions continues et avec $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$, on déduit qu'elle est continue en a. Elle est dérivable sur $]0, e^{-a}[$ avec $g'(t) = -\dfrac{f'(-\ln(t))}{t}$.

Enfin avec $g(0) = g(e^{-a}) = f(a)$, on peut utiliser le théorème de Rolle pour dire qu'il existe $d \in]0, e^{-a}[$ tel que $g'(d) = 0$ et $c = -\ln(d) \in]a, +\infty[$ est tel que $f'(c) = 0$.

On peut aussi utiliser la fonction g définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} f(a + \tan(t)) \text{ si } t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[, \\ f(a) \text{ si } t = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ comme composée de fonctions continues et avec $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}} g(t) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$, on déduit qu'elle est continue en $\dfrac{\pi}{2}$. Elle est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ avec $g'(t) = (1 + \tan^2(t)) f'(a + \tan(t))$. Enfin avec $g(0) = g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = f(a)$, on peut utiliser le théorème de Rolle pour dire qu'il existe $d \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(d) = 0$ et $c = a + \tan(d) \in]a, +\infty[$ est tel que $f'(c) = 0$. ■

On a également le résultat suivant pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Théorème 20.6 *Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, alors il existe c dans $\mathbb{R}$ tel que $f'(c)=0$.*

Démonstration. Le changement de variable $t=\arctan(x)$ nous ramène à un intervalle compact.

On définit la fonction g sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$g(t)=\begin{cases} f(\tan(t)) \text{ si } t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\\ \ell=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \text{ si } t=\pm\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ comme composée de fonctions continues et avec $\lim\limits_{t\to\pm\frac{\pi}{2}} g(t)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell$, on déduit qu'elle est continue en $\pm\frac{\pi}{2}$. Elle est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ avec $g'(t)=(1+\tan^2(t))\,f'(\tan(t))$. Le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe $d\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(d)=0$ et $c=\tan(d)$ est tel que $f'(c)=0$. ■

La version itérée suivante du théorème de Rolle est souvent utile (voir l'interpolation de Lagrange et les polynômes orthogonaux).

Théorème 20.7 *Si f est une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^m$ sur un intervalle réel I, où m est un entier naturel, qui s'annule en $m+1$ points de I distincts, alors il existe un point c dans I tel que $f^{(m)}(c)=0$.*

Démonstration. Si $m=0$ le résultat est évident. On suppose donc que m est non nul.

Si a,b sont deux racines distinctes de f, le théorème de Rolle nous dit alors qu'entre ces deux racines il existe une racine de f'. On en déduit que la fonction f' admet m racines distinctes dans I. Une récurrence finie nous permet alors de montrer que la dérivée d'ordre m, $f^{(m)}$ admet au moins une racine dans I. ■

On peut donner une démonstration du théorème de Rolle basée sur un principe de dichotomie (voir [66]).

20.2 Applications du théorème de Rolle

Le théorème de Rolle est important pour ses nombreuses applications.

20.2.1 Quelques exercices classiques

Exercice 20.1 *Soient f,g deux fonctions à valeurs réelles non nulles, continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$, avec $f(a)g(b)=f(b)g(a)$. Montrer qu'il existe un réel $c\in\,]a,b[$ tel que $\frac{f'(c)}{f(c)}=\frac{g'(c)}{g(c)}$.*

Solution 20.1 *La fonction h définie sur $[a,b]$ par $g(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec :*

$$\begin{cases} h'(x)=\dfrac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2},\\ h(a)=h(b).\end{cases}$$

Le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe un réel $c \in \left]a,b\right[$ *tel que* $g'(c) = 0$, *ce qui équivaut à* $\dfrac{f'(c)}{f(c)} = \dfrac{g'(c)}{g(c)}$.
Pour g *constante égale à* 1, *on retrouve le théorème de Rolle.*

Exercice 20.2 *Montrer que si* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *est telle que* $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$, *alors* f *a un point fixe dans* $\left]0,1\right[$.

Solution 20.2 *La fonction* g *définie sur* $[0,1]$ *par* $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt - \frac{x^2}{2}$ *est continue sur* $[0,1]$, *dérivable sur* $\left]0,1\right[$ *avec* $g(0) = g(1) = 0$. *Le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe* $c \in \left]0,1\right[$ *tel que* $g'(c) = 0$, *ce qui signifie* $f(c) = c$.

20.2.2 Sur les racines de polynômes réels

Théorème 20.8 *Si* P *est un polynôme réel de degré* $n \geq 2$ *scindé sur* $\mathbb{R}$ *alors il en est de même de son polynôme dérivé.*
Précisément si $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p$ *sont les racines réelles distinctes de* P *avec* $p \geq 2$, *la racine* λ_j *étant de multiplicité* $m_j \geq 1$ $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} m_j = n\right)$, *alors le polynôme dérivé* P' *admet les réels* λ_j *pour racines de multiplicités respectives* $m_j - 1$, *pour* $1 \leq j \leq p$ *(une multiplicité nulle signifie que* λ_j *n'est pas racine de* P'*) et des racines simples* $\mu_j \in \left]\lambda_j, \lambda_{j+1}\right[$ *pour* $1 \leq j \leq p-1$.

Démonstration. Pour $j \in \{1, \cdots, p\}$ tel que $m_j \geq 2$, λ_j est racine d'ordre $m_j - 1$ du polynôme P'. Ce qui donne $\sum\limits_{j=1}^{p} (m_j - 1) = n - p$ racines réelles pour P'. D'autre part, le théorème de Rolle nous dit que pour tout j dans $\{1, \cdots, p-1\}$ il existe $\mu_j \in \left]\lambda_{j+1}, \lambda_j\right[$ tel que $P'(\mu_j) = 0$, ce qui donne $p - 1$ racines réelles supplémentaires et distinctes pour P'. On a donc un total de $n - 1$ racines réelles pour P' et les μ_j sont nécessairement simples. ■

On peut remarquer que toutes les racines de P' sont dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_p]$.

De manière plus générale, si P est un polynôme non constant à coefficients complexes, alors les racines du polynôme dérivé P' sont dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de P (théorème de Lucas).

Exercice 20.3 *Soient* $n \geq 2$, a, b *réels et* $P(x) = x^n + ax + b$. *Montrer que si* n *est pair alors* P *a* 0, 1 *ou* 2 *racines réelles et si* n *est impair alors* P *a* 1, 2 *ou* 3 *racines réelles.*

Solution 20.3 *On utilise la conséquence suivante du théorème de Rolle : si* f *est une fonction dérivable sur un intervalle* I *et à valeurs réelles telle que* f' *admette exactement* p *racines réelles distinctes avec* $p \geq 0$, *alors* f *a au plus* $p+1$ *racines réelles distinctes. En effet, si* f *a* $p+2$ *racines réelles* $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{p+2}$, *le théorème de Rolle nous assure l'existence d'au moins une racine réelle sur chaque intervalle* $\left]\lambda_k, \lambda_{k+1}\right[$ *pour* k *compris entre* 1 *et* $p+1$, *ce qui donne au moins* $p+1$ *racines distinctes pour* f'.
Supposons n *pair. On a alors* $P''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$ *pour tout réel non nul* x *et* P' *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *de degré impair, elle s'annule donc une fois (théorème des valeurs intermédiaires) et une seule (*P' *est injective). Avec le théorème de Rolle on déduit alors que* P *s'annule au plus* 2 *fois.*
Supposons n *impair. Alors* P' *est strictement décroissante sur* $\left]-\infty, 0\right[$, *strictement croissante sur* $\left]0, +\infty\right[$, *avec* $P'(0) = a$. *Il résulte que* P' *a* 2 *racines réelles* $-\rho$ *et* $\rho > 0$ *si* $a < 0$, 0 *pour unique racine réelle si* $a = 0$ *et pas de racine réelle si* $a > 0$. *Avec la théorème de Rolle, on déduit alors que* P *a au plus* 3 *racines réelles.*

On sait qu'un polynôme réel de degré n a au plus n racines réelles sur un intervalle I. Plus généralement, on a le résultat suivant.

Exercice 20.4 *Montrer que pour tout entier naturel n et toutes suites de réels $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ et $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n}$, les a_k étant non tous nuls et les λ_k deux à deux distincts, la fonction f_n définie par :*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{\lambda_k}$$

a au plus n racines réelles distinctes dans $\mathbb{R}^{+,*}$. On dit que la famille de fonctions $\left(x^{\lambda_k}\right)_{0\leq k\leq n}$ est un système de Tchebychev (ou système de Haar ou encore système unisolvent) dans $\mathcal{C}\left(\mathbb{R}^{+,*}\right)$.

Solution 20.4 *On procède par récurrence sur $n \geq 0$.*

Pour $n = 0$, $f_0(x) = a_0 x^{\lambda_0}$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}^{+,*}$ puisque a_0 est non nul.

Supposons le résultat acquis au rang $n \geq 0$. Si la fonction $f_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k x^{\lambda_k}$ a plus de $n+1$ racines distinctes dans $\mathbb{R}^{+,*}$, il en est alors de même de la fonction :

$$g_{n+1}(x) = x^{-\lambda_j} f_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^{\lambda_k - \lambda_j}$$

où j compris entre 0 et $n+1$ est choisi tel que $a_j \neq 0$. Le théorème de Rolle nous dit alors que la fonction dérivée :

$$g'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (\lambda_k - \lambda_j) a_k x^{\lambda_k - \lambda_j - 1} = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n+1} (\lambda_k - \lambda_j) a_k x^{\lambda_k - \lambda_j - 1}$$

a plus de n racines distinctes dans $\mathbb{R}^{+,*}$ et en conséquence tous les $(\lambda_k - \lambda_j) a_k$ pour $k \neq j$ sont nuls (hypothèse de récurrence), ce qui entraîne $f_{n+1}(x) = a_j x^{\lambda_j}$, mais cette fonction ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^{+,*}$. On aboutit donc à une impossibilité.

Exercice 20.5 *En utilisant les théorèmes de Rolle, montrer que pour tout entier n, on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan^{(n+1)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}},$$

où P_n est un polynôme de degré n avec n racines réelles distinctes.

Solution 20.5 *Pour $n = 0$, on a $\arctan'(x) = \dfrac{P_0(x)}{1+x^2}$ avec $P_0(x) = 1$ sans racine réelle.*

En supposant le résultat acquis au rang n, la fonction f_n définie par $f_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ est nulle en $\pm\infty$ et en n points distincts, on déduit alors des théorèmes de Rolle (classique sur un compact et généralisé sur un intervalle fermé de longueur infinie) que sa dérivée s'annule en $n+1$ points distincts, cette dérivée s'écrivant $\dfrac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}$, où $P_{n+1}(x) = (1+x^2) P'_n(x) - 2(n+1) x P_n(x)$ est un polynôme de degré égal à $n+1$ (il a $n+1$ racines, ou alors on peut calculer son coefficient dominant). D'où le résultat.

En fait, en utilisant une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, on peut montrer que ces racines sont les $x_k = -\operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ avec k compris entre 1 et n.

20.2.3 Racines des polynômes de Legendre, de Laguerre et d'Hermite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\pi_{2n}(x) = (x^2-1)^n$ et $L_n = \pi_{2n}^{(n)}$.

Les polynômes L_n sont les polynômes de Legendre sur $[-1,1]$.

Pour $n = 0$, on a $L_0 = 1$.

Pour $n \geq 1$ le polynôme :

$$\pi_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k x^{2k}$$

est de degré $2n$ et sa dérivée d'ordre n :

$$L_n(x) = \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n} (-1)^{n-k} C_n^k \frac{(2k)!}{(2k-n)!} x^{2k-n}$$

est un polynôme de degré n, de la parité de n.

Théorème 20.9 *Pour $n \geq 1$, le polynôme L_n admet n racines réelles distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$.*

Démonstration. Pour $n = 1$, $L_1(x) = 2x$ s'annule en 0.

Pour $n \geq 2$, on vérifie par récurrence sur $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, que le polynôme $\pi_{2n}^{(k)}$ s'annule en -1, 1 et en k points distincts de $]-1,1[$.

Le polynôme π_{2n} admettant -1 et 1 comme racines d'ordre n, le résultat est vrai pour $k = 0$.

Supposons le acquis pour $k-1 \in \{0, \cdots, n-2\}$ $(n \geq 2)$. La fonction $\pi_{2n}^{(k-1)}$ est nulle en $-1 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < 1$ et avec le théorème de Rolle on déduit que sa dérivée $\pi_{2n}^{(k)}$ s'annule en k points distincts de $]-1,1[$. D'autre part, -1 et 1 étant racines d'ordre n de π_{2n}, elles sont aussi racines d'ordre $n-k > 0$ de $\pi_{2n}^{(k)}$.

En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $\pi_{2n}^{(n-1)}$ qui est nulle en $n+1$ points distincts $-1 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < 1$, on déduit que $L_n = \pi_{2n}^{(n)}$ s'annule en n points distincts de $]-1,1[$. ■

Soit $\alpha > -1$. Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme $L_{\alpha,n}$ par $(x^{n+\alpha}e^{-x})^{(n)} = L_{\alpha,n}(x)\, x^\alpha e^{-x}$. Les polynômes $L_{\alpha,n}$ sont les polynômes de Laguerre sur $]0,+\infty[$. Il est facile de vérifier que $L_{\alpha,n}$ est un polynôme de degré n.

En effet, on a $L_{\alpha,0}(x) = 1$, $L_{\alpha,1}(x) = 1 + \alpha - x$. Supposons, pour $n \geq 1$, que $L_{\alpha,n}$ est polynomiale de degré n pour tout réel $\alpha > -1$. Avec :

$$\begin{aligned}
\left(x^{n+1+\alpha}e^{-x}\right)^{(n+1)} &= (n+1+\alpha)\left(x^{n+\alpha}e^{-x}\right)^{(n)} - \left(x^{n+(1+\alpha)}e^{-x}\right)^{(n)} \\
&= (n+1+\alpha)\, L_{\alpha,n}(x)\, x^\alpha e^{-x} - L_{\alpha+1,n}(x)\, x^{\alpha+1} e^{-x} \\
&= ((n+1+\alpha)\, L_{\alpha,n}(x) - x L_{\alpha+1,n}(x))\, x^\alpha e^{-x},
\end{aligned}$$

on déduit que $L_{\alpha,n+1}(x) = (n+1+\alpha)\, L_{\alpha,n}(x) - x L_{\alpha+1,n}(x)$ est polynomiale de degré $n+1$.

Théorème 20.10 *Pour tout réel $\alpha > -1$ et tout entier $n \geq 1$, le polynôme $L_{\alpha,n}$ admet n racines réelles distinctes dans $]0,+\infty[$.*

Démonstration. Pour $\alpha > -1$ et $n = 1$, on a $L_{\alpha,1}(x) = 1+\alpha-x$ de degré 1 nul en $1+\alpha > 0$. En supposant le résultat acquis au rang n pour tout $\alpha > -1$, la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = (x^{n+\alpha+1}e^{-x})^{(n)} = L_{\alpha+1,n}(x)\, x^{\alpha+1}e^{-x}$ est nulle en 0, $+\infty$ et en n points distincts de $]0,+\infty[$, on déduit alors des théorèmes de Rolle (classique sur un compact et généralisé sur $[0,+\infty[$) que sa dérivée $f_n'(x) = L_{\alpha,n+1}(x)\, x^\alpha e^{-x}$ s'annule en $n+1$ points distincts de $]0,+\infty[$. D'où le résultat au rang $n+1$. ■

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme H_n par $\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} = H_n(x) e^{-x^2}$. Les polynômes H_n sont les polynômes d'Hermite sur $\mathbb{R}$. Il est facile de vérifier que H_n est un polynôme de degré n.

Théorème 20.11 *Pour $n \geq 1$, le polynôme H_n admet n racines réelles distinctes.*

Démonstration. Pour $n = 1$, on a $H_1(x) = -2x$ de degré 1 nul en 0. En supposant le résultat acquis au rang n, la fonction f_n définie par $f_n(x) = H_n(x) e^{-x^2}$ est nulle en $\pm\infty$ et en n points distincts, on déduit alors des théorèmes de Rolle (classique sur un compact et généralisé sur un intervalle fermé de longueur infinie) que sa dérivée $f_n'(x) = H_{n+1}(x) e^{-x^2}$ s'annule en $n+1$ points distincts. D'où le résultat au rang $n+1$. ■

En fait ces résultat sont vrais pour toute famille de polynômes orthogonaux et on peut les démontrer en utilisant uniquement les propriétés d'orthogonalité et le théorème des valeurs intermédiaires (voir [67]).

20.2.4 Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange

Soient $I = [a, b]$ un intervalle réel fermé borné avec $a < b$, n un entier naturel non nul et $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une suite de réels deux à deux distincts dans I. À toute fonction f définie sur I et à valeurs réelles on associe le polynôme d'interpolation de Lagrange $L_n(f)$ défini par :

$$\begin{cases} L_n(f) \in \mathbb{R}_n[x], \\ L_n(f)(x_i) = f(x_i) \quad (0 \leq i \leq n). \end{cases}$$

Un tel polynôme est uniquement déterminé par f. On peut l'écrire sous la forme :

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_{n,i},$$

avec :

$$L_{n,i}(x) = \prod_{j=0,\, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (0 \leq i \leq n).$$

Dans le cas où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, on peut donner une expression de l'erreur d'interpolation $f - L_n(f)$ en tout point de l'intervalle I. Précisément on a le résultat suivant où, pour $n \geq 1$, π_{n+1} est la fonction polynomiale définie par :

$$\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Théorème 20.12 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I. Pour tout x dans I il existe un point c_x appartenant à I tel que :*

$$f(x) - L_n(f)(x) = \frac{1}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(c_x).$$

Démonstration. Si x est l'un des points x_i, on a alors $f(x) - L_n(f)(x) = \pi_{n+1}(x) = 0$ et tout point $c_x \in I$ convient.

On se donne donc un point x dans $I \setminus \{x_0, \cdots, x_n\}$. On désigne par P_x le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f et aux points $x_0, \cdots, x_n, x$. Ce polynôme est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_x \in \mathbb{R}_{n+1}[t], \\ P_x(x_i) = f(x_i) \quad (0 \leq i \leq n), \\ P_x(x) = f(x). \end{array} \right.$$

On vérifie facilement que :

$$P_x = L_n(f) + \frac{f(x) - L_n(f)(x)}{\pi_{n+1}(x)} \pi_{n+1}.$$

La fonction $g_x = f - P_x$ est alors de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I, nulle en $n+2$ points distincts (x et les x_i), le théorème de Rolle itéré nous dit alors qu'il existe un point $c_x \in I$ tel que $g_x^{(n+1)}(c_x) = 0$, ce qui compte tenu de :

$$P_x^{(n+1)} = \frac{f(x) - L_n(f)(x)}{\pi_{n+1}(x)} (n+1)!$$

s'écrit :

$$f^{(n+1)}(c_x) - \frac{f(x) - L_n(f)(x)}{\pi_{n+1}(x)} (n+1)! = 0$$

ou encore :

$$f(x) - L_n(f)(x) = \frac{1}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(c_x).$$

■

Une démonstration analogue nous permet d'obtenir une majoration de l'erreur dans l'interpolation d'Hermite (voir [67]).

20.2.5 Convexité

Le théorème de Rolle peut être utilisé pour montrer le critère de convexité suivant.

Théorème 20.13 *Soit I un intervalle réel non réduit à un point. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivable telle que $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est convexe.*

Démonstration. Pour $x < y$ fixés dans I et $\lambda \in [0,1]$ on pose :

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda) y) - \lambda f(x) - (1-\lambda) f(y).$$

Cette fonction est deux fois dérivable sur $[0,1]$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'(\lambda) = (x-y) f'(\lambda x + (1-\lambda) y) + f(y) - f(x), \\ \varphi''(\lambda) = (x-y)^2 f''(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq 0. \end{array} \right.$$

La fonction φ' est donc croissante sur $[0,1]$.

D'autre part, on a $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Avec la croissance de φ' on a alors $\varphi'(\lambda) \leq \varphi'(c) = 0$ pour tout $\lambda \in [0,c]$ et $\varphi'(\lambda) \geq \varphi'(c) = 0$ pour tout $\lambda \in [c,1]$, c'est-à-dire que φ est décroissante sur $[0,c]$ et croissante sur $[c,1]$, il en résulte que $\varphi(\lambda) \leq 0$ pour tout $\lambda \in [0,1]$, c'est-à-dire que f est convexe. ■

Plus classiquement, on a le résultat suivant (voir [66]).

Théorème 20.14 *Soit f une fonction dérivable sur I. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est convexe sur I ;*
2. *la fonction dérivée f' est croissante sur I ;*
3. *la courbe représentative de f est située au dessus de sa tangente en tout point de I.*

20.2.6 Le théorème de Darboux

On peut donner une démonstration du théorème de Darboux qui utilise le théorème de Rolle et le résultat suivant sur les fonction continues.

Théorème 20.15 *Soient I un intervalle réel et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. Cette fonction f est injective si, et seulement si, elle est strictement monotone.*

Théorème 20.16 (Darboux) *Si f est une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle I, alors sa fonction dérivée f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

Démonstration. Soient $a < b$ dans I. Si $f'(a) = f'(b)$ il n'y a alors rien à montrer.
On suppose donc que $f'(a) < f'(b)$ et on se donne $\lambda \in \left]f'(a), f'(b)\right[$. On définit la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [a,b], \ \varphi(x) = f(x) - \lambda x.$$

Cette fonction est dérivable sur $[a,b]$ avec $\varphi'(a) < 0 < \varphi'(b)$ et en conséquence elle ne peut être monotone sur I (une fonction monotone dérivable sur un intervalle a une dérivée de signe constant). Le théorème précédent nous dit alors que φ n'est pas injective, c'est-à-dire qu'il existe $x < y$ dans I tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$ et le théorème de Rolle nous dit qu'il existe $c \in \left]x, y\right[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, ce qui équivaut à $f'(c) = \lambda$. ■

Une démonstration classique du théorème de Darboux utilise seulement le fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

On peut aussi démontrer ce théorème en utilisant le théorème des accroissements finis et le théorème des valeurs intermédiaires.

20.3 Le théorème des accroissements finis

Exercice 20.6 *Soient f, g, h trois fonctions à valeurs réelles, continues sur $[a,b]$, dérivables sur $\left]a,b\right[$ et φ la fonction définie sur $[a,b]$ par :*

$$\varphi(x) = \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe un réel $c \in \left]a,b\right[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.
Quels résultats obtient-on pour $h(x) = 1$?

Solution 20.6 *La fonction φ est continue sur $[a,b]$ dérivable sur $\left]a,b\right[$ et avec le caractère 3-linéaire alterné du déterminant, on a :*

$$\begin{cases} \varphi'(x) = \det \begin{pmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix} \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \end{cases}$$

Le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe un réel $c \in \left]a,b\right[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.
Pour $h = 1$, on obtient :

$$\varphi'(c) = \det \begin{pmatrix} f'(c) & g'(c) & 0 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{pmatrix} = f'(c)(g(a) - g(b)) - g'(c)(f(a) - f(b)) = 0,$$

soit $(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)$. C'est le théorème généralisé des accroissements finis. Prenant $g(x) = x$, on a le théorème classique des accroissements finis.

Exercice 20.7 *Soient* $(f_k)_{1\leq k\leq n}$ *et* $(g_k)_{1\leq k\leq n}$ *deux familles de fonctions à valeurs réelles, continues sur* $[a,b]$, *dérivables sur* $]a,b[$ *et telles que* $g_k(a)\neq g_k(b)$ *pour tout* k *compris entre* 1 *et* n. *Monter qu'il existe un réel* c *dans* $]a,b[$ *tel que :*

$$\sum_{k=1}^{n} f_k'(c) = \sum_{k=1}^{n} g_k'(c)\,\frac{f_k(b)-f_k(a)}{g_k(b)-g_k(a)}.$$

Solution 20.7 *On considère la fonction* φ *définie sur* $[a,b]$ *par :*

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(f_k(x)-f_k(a)-\lambda_k\left(g_k(x)-g_k(a)\right)\right)$$

où les constantes λ_k *sont choisies telles que* $\varphi(a)=\varphi(b)$. *On peut prendre :*

$$\lambda_k=\frac{f_k(b)-f_k(a)}{g_k(b)-g_k(a)}\quad (1\leq k\leq n).$$

Cette fonction est continue sur $[a,b]$, *dérivable sur* $]a,b[$ *avec* $\varphi(a)=\varphi(b)$. *Le théorème de Rolle nous dit alors qu'il existe un réel* c *dans* $]a,b[$ *tel que* $\varphi'(c)$, *ce qui donne le résultat annoncé.*

20.4 Applications du théorème des accroissements finis

On peut donner une démonstration du théorème de Darboux qui utilise le théorème des accroissements finis et le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 20.17 (Darboux) *Si* f *est une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle* I, *alors sa fonction dérivée* f' *vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

Démonstration. Soient $a<b$ dans I. Si $f'(a)=f'(b)$ il n'y a alors rien à montrer.

On suppose donc que $f'(a)<f'(b)$ et on se donne $\lambda\in\,]f'(a),f'(b)[$. On définit les fonctions τ_a et τ_b sur $[a,b]$ par :

$$\forall x\in[a,b],\ \tau_a(x)=\begin{cases} f'(a) \text{ si } x=a \\ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ si } x\neq a\end{cases}$$

et :

$$\forall x\in[a,b],\ \tau_b(x)=\begin{cases} f'(b) \text{ si } x=b \\ \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} \text{ si } x\neq b\end{cases}$$

Ces fonctions sont continues sur $[a,b]$ puisque f est dérivable sur I et on a :

$$\tau_a(a)=f'(a)<\lambda<f'(b)=\tau_b(b)$$

On a alors deux possibilités :

– soit $\tau_a(a)=f'(a)<\lambda\leq\tau_a(b)$ et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe un réel c dans $]a,b]$ tel que

$$\lambda=\tau_a(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(d)$$

avec d entre a et c;

– soit $\tau_a(b) < \lambda \leq \tau_a(b) < f'(b) = \tau_b(b)$ et en remarquant que :

$$\tau_a(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \tau_b(a)$$

on a $\tau_b(a) < \lambda < \tau_b(b)$ et le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe un réel c dans $]a, b[$ tel que

$$\lambda = \tau_b(c) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(d)$$

■

On peut donner une démonstration du théorème de Darboux qui utilise le fait que l'image d'un connexe de $\mathbb{R}^2$ par une application continue à valeurs réelles est un connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle (caractérisation des connexes de $\mathbb{R}$), et le théorème des accroissements finis.

Théorème 20.18 (Darboux) *Si f est une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle I, alors sa fonction dérivée f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $f'(I)$ est connexe dans $\mathbb{R}$, ce qui revient à dire que c'est un intervalle.

L'ensemble :

$$C = \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \mid (x, y) \in I^2,\ x < y \right\}$$

est un connexe de $\mathbb{R}$ comme image du connexe de $\mathbb{R}^2$, $E = \{(x, y) \in I^2,\ x < y\}$ (cet ensemble est convexe donc connexe), par l'application continue φ définie sur I^2 par

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \text{ si } y \neq x \\ f'(x) \text{ si } y = x \end{cases}$$

Le théorème des accroissements finis nous dit que tout $z \in C$ s'écrit $z = f'(t)$ avec $t \in \overset{\circ}{I}$ et en écrivant que $f'(t) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(t + h) - f(t)}{h}$, on déduit que z est aussi dans $\overline{C}$. On a donc $C \subset f'(I) \subset \overline{C}$ avec C connexe, ce qui entraîne que $f'(I)$ est connexe. ■

On trouvera d'autres démonstrations dans Bartle et Sherbert : Introduction to real analysis, John Wiley, 1992 (lemme 6.2.11 et théorème 6.2.12) ou dans Boas (p. 122), Hardy (5., sec. 129) ou Rudin, ou ...