TD n^{o}4 : Intégrabilité des fonctions à valeurs positives

Exercice 1 : Rappels de primitives

Pour chacune des intégrales suivantes,
- déterminer les intervalles I tels que l'intégrale soit bien définie lorsque a et b sont dans I
- calculer alors la valeur de l'intégrale,
- déterminer si I est compact ou non,
- si $\sup I$ (resp. $\inf I$) n'appartient pas à I déterminer la limite de l'intégrale, si elle existe lorsque b tend vers $\sup I$ (resp. lorsque a tend vers $\inf I$).

1. $\int_a^b t^n \, dt$ avec $n \in \mathbb{N}$
2. $\int_a^b P(t) \, dt$, avec P polynôme de degré d
3. $\int_a^b e^{\alpha t} \, dt$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$
4. $\int_a^b \sqrt{t} \, dt$
5. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt$
6. $\int_a^b t^{1/3} \, dt$
7. $\int_a^b \frac{1}{1+t^2} \, dt$

Exercice 2 : Une fraction rationnelle

1. Déterminer trois réels A, B, C tels que pour tout $x > 0$:
$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$
2. Calculer pour $X > 0$:
$$I(X) = \int_1^X \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$$
3. Quelle est la limite lorsque $X \to +\infty$ de $I(X)$? Que peut-on donc dire de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$?

Exercice 3 : Changement de variable
Soit $X \in [0, +\infty[$. Calculer $I(X) = \int_0^X \frac{dt}{\mathrm{ch} t}$ puis déterminer la limite de $I(X)$ lorsque $X \to +\infty$.

Exercice 4 : Intégration par parties
Déterminer une primitive F de la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : [0, +\infty[& \to & [0, +\infty[\\ t & \mapsto & t^2 e^{-t} \end{array}$$

En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, et déterminer sa valeur.

Exercice 5 : Nature d'intégrales impropres
Déterminer la nature de chacune des intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x + e^{-x}}\, dx$;
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{x + e^{-x}}\, dx$;
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x + e^{-x}}\, dx$;
4. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2 + 1}\, dx$;
5. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2 |\sin x|}$;
6. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} e^{-x}\, dx$;
7. $\displaystyle\int_0^{\infty} (x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1})\, dx$;
8. $\displaystyle\int_1^{\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 + 1})\, dx$;
9. $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x^2 - x}}\, dx$;
10. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^3}\, dx$;
11. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2 + \sin x + \sin^2 x}{\sqrt[3]{x^4 + x^2}}\, dx$;
12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$;
13. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{1 - x}\, dx$;

Exercice 6 : Limite et convergence de l'intégrale

1. Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue par morceaux telle que $f(t) \to \ell$ quand $t \to +\infty$, avec $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge.

2. Donner un exemple de fonction continue par morceaux $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $g(t) \not\to 0$ quand $t \to +\infty$ et $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

Exercice 7 : Deux équivalents

1. Déterminer la nature des intégrales impropres $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.
2. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$. Calculer sa limite en $+\infty$.
3. Utiliser une intégration par parties pour montrer que :
$$f(x) \sim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x} .$$
4. Montrer que :
$$f(x) \sim_{x \to 0^+} \ln \frac{1}{x} .$$

Exercice 8 : Dérivée logarithmique
Soit $f : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ une fonction continue. Pour tout $x \in [0, +\infty[$ on note $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

Montrer que les intégrales impropres $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{F(t)}\,dt$ ont même nature.

Exercice 9 : Tiré de l'examen de rattrapage 2010
Pour tout entier $n \geqslant 0$ on pose
$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos^2 x}{1+x}\,dx, \qquad v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{1+x}\,dx$$

1. Calculer $a_n := u_n + v_n$ et vérifier que la série $\sum_n a_n$ diverge.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n > 0$ on a
$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{2\pi n^2}$$

3. Déduire des résultats précédents que $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont deux séries divergentes.
4. Si α est un paramètre réel, on pose

$$f_\alpha(x) = \frac{\sin^2 x}{(1+x)^\alpha} \quad \forall x \geqslant 0$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la fonction f_α est intégrable sur $[0, +\infty[$.