Université Joseph Fourier
Grenoble

TD n°1 : suites numériques

Rappel important : il existe un cours de L1 en ligne, intitulé "M@ths en L1gne", à l'adresse : `http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/` Plusieurs des exercices ci-dessous en sont d'ailleurs tirés. Il est crucial, pour toute la partie du cours sur les séries numériques, d'être à l'aise avec les suites numériques, les notions de limite et de continuité et les développements limités. Vérifiez donc cette aisance à l'aide des QCM, exercices, cours et compléments du site.

Exercice 1 : Quelques exemples
Donner des exemples des situations suivantes :

1. Une suite décroissante positive ne tendant pas vers 0.
2. Une suite bornée non convergente.
3. Une suite positive non bornée ne tendant pas vers $+\infty$.
4. Une suite non monotone qui tend vers 0.
5. Deux suites divergentes $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $(u_n v_n)_n$ soit convergente.

Exercice 2 : Des suites définies par récurrence
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que $f(0)=0$, $f(1)=1$ et

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) < x\ .$$

1. On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\geq 0}$:
$$\begin{cases} u_0 \in [0,1], \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et donner sa limite.
2. On définit par récurrence une suite $(v_n)_{n\geq 0}$:
$$\begin{cases} v_0 = 1/2, \\ \forall n \geq 0,\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2-\sqrt{v_n}}. \end{cases}$$
Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge et donner sa limite.

Exercice 3 : Applications contractantes
Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, F une application de I dans lui-même et ρ un nombre réel de $[0,1[$. On suppose que F vérifie :

$$\forall x, y \in I, \quad |F(x) - F(y)| \leq \rho |x - y| \ .$$

Montrer que la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = F(u_n)$ converge, et que sa limite est l'unique point fixe de F. On pourra commencer par montrer que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Exercice 4 : Limite d'un produit
Rappeler la démonstration du résultat suivant.

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites de nombres complexes. Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent, alors $(u_n v_n)_n$ converge et $\lim_n u_n v_n = (\lim_n u_n) \times (\lim_n v_n)$.

Exercice 5 : Calcul de limites à l'aide des fonctions usuelles
Calculer la limite, si elle existe, des suites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{n+1}{3+2in}$
2. $u_n = \dfrac{n^{10}}{1.01^n}$
3. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$
4. $u_n = n^4 \left(\log\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) + \dfrac{1}{n^2} \right)$
5. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
6. $u_n = \tan(1/n) \cos(2n+1)$
7. $u_n = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^3 - n^3}$
8. $u_n = \dfrac{\sqrt{n-3} + i \log(2n)}{\log n}$
9. $u_n = \dfrac{\log(n^2 + 3n - 2)}{\log(n^{1/3})}$
10. $u_n = n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$

Exercice 6 : Développements limités
Donner un développement limité pour $(u_n)_n$ (lorsque n tend vers l'infini) avec un reste en $o(1/n^2)$, dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{n+1}{3+2n}$
2. $u_n = \dfrac{\log\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$
3. $u_n = \dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + 2}$
4. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+2}$

Exercice 7 : Borne supérieure, borne inférieure
Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il est majoré, s'il est minoré, s'il a un maximum, s'il a un minimum, et le cas échéant déterminer ses bornes supérieures et inférieures.

1. $A = \{(-1)^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$
2. $B = \{(-1)^n/n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$
3. $C = \{(-1)^n n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$
4. $D = \left\{\frac{n+1}{n+2} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}$
5. $E = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \,|\, n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$

Exercice 8 : Suites extraites
Soit $(u_n)_n$ une suite complexe.

1. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite, alors $(u_n)_n$ converge.
2. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent, alors $(u_n)_n$ converge aussi.

Exercice 9 : Une somme téléscopique

1. Déterminer trois réels A, B, C tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de 0, 1 et -1 on ait :
$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$
2. En utilisant cette relation pour $x = 2, 3, \cdots, n$, déterminer pour chaque entier $n \geq 2$ une expression simple de
$$S_n := \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{2(2^2-1)} + \frac{1}{3(3^2-1)} + \cdots + \frac{1}{n(n^2-1)}$$
3. En déduire que la suite $(S_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 10 : Suites adjacentes

1. Pour chacun des couples suivants, montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
   (a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

(b) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$.

(c) $u_0 = a > 0$, $v_0 = b > a$, $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$.

2. On définit à présent les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$.

   (a) Montrer que ces suites sont adjacentes. Leur limite commune est notée e (c'est $\exp(1) = e^1$).

   (b) Montrer que e n'est pas rationnel (on pourra raisonner par l'absurde : en supposant que $e = p/q$, on peut noter que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $n!u_n < n!p/q < n!v_n$; choisir n tel que $n!p/q$ soit entier permet alors de conclure).

Exercice 11 : Moyennes de Césaro
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes. On note :

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = \frac{1}{n}(u_1 + \ldots + u_n) .$$

1. Montrer que si $(u_n)_n$ converge dans $\mathbb{C}$, alors $(S_n)_n$ converge vers la même limite.
2. Exhiber une suite $(u_n)_n$ divergente telle que $(S_n)_n$ converge.
3. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombre réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge. Montrer que $(u_n^{1/n})_n$ converge vers la même limite.

Exercice 12 : Limite supérieure et limite inférieure
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée de nombres réels. On définit les suites i_n et s_n par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad i_n = \inf\{u_k \text{ t.q. } k \geq n\} \quad \text{et} \quad s_n = \sup\{u_k \text{ t.q. } k \geq n\} .$$

1. Montrer que $(i_n)_n$ et $(s_n)_n$ convergent. La limite de i_n est appelée *limite inférieure de la suite* $(u_n)_n$ et est notée $\liminf_n u_n$. Celle de s_n est appelée *limite supérieure de la suite* $(u_n)_n$ et est notée $\limsup_n u_n$.
2. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ convergeant vers $\liminf_n u_n$ et une autre convergeant vers $\limsup_n u_n$. Cela donne donc une autre démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.
3. Montrer que $(u_n)_n$ converge si et seulement si $(i_n)_n$ et $(s_n)_n$ convergent dans $\mathbb{R}$ vers la même limite.