# Chapitre 5 : La théorie de l'intégration de Riemann

## 1 Topologie des intervalles compacts

On appelle *intervalle compact* de $\mathbb{R}$ un intervalle fermé et borné du type $[a,b]$ avec $a \leq b$ deux réels. Le mot « compact » fait référence à la propriété suivante qui pourra être vérifiée pour d'autres ensembles que les intervalles de $\mathbb{R}$.

**Théorème 5.1.** *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de l'intervalle compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Alors il existe une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que la suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ ait une limite $\ell \in [a,b]$.*

***Démonstration :*** On peut utiliser le procédé suivant. On coupe $[a,b]$ en son milieu en deux intervalles $[a,(a+b)/2]$ et $[(a+b)/2,b]$. Comme la suite $(x_n)$ contient un nombre infini de points (éventuellement confondus), il y a au moins un des deux segments qui contient un nombre infini d'éléments de $(x_n)$. On pose $x_{\varphi(0)}$ comme étant le premier d'entre eux et on ne regarde maintenant plus que ce qui se passe dans le segment moitié. On recoupe ce segment en deux et on sélectionne de nouveau la moitié dans laquelle il y a un nombre infini de $x_n$. On pose $x_{\varphi(1)}$ comme le premier tel que $\varphi(1) > \varphi(0)$ et on continue. Au fur et à mesure, les éléments de la suite extraite se retrouvent confinés dans des intervalles de longueurs de plus en plus petites. C'est exactement dire que la suite extraite vérifie le critère de Cauchy et donc elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. En outre, comme $a \leq x_n \leq b$ pour tout $n$, on a forcément $\ell \in [a,b]$. $\square$

Ce résultat est associé aux théorèmes du nom de Bolzano-Weierstrass et de Borel-Lebesgue

- Bernard Bolzano (1781-1848, Prague)
- Karl Weierstrass (1815-1897, Allemagne)
- Émile Borel (1871-1956, France)

- Henri Lebesgue (1875-1941, France)

Dans ce cours, ce résultat nous sera surtout utile pour montrer l'uniforme continuité.

**Définition 5.2.** *Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est uniformément continue sur $I$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \ , \ \forall x,y \in I \ , \ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \ .$$

Attention de ne pas confondre l'uniforme continuité avec la continuité tout court. Cette dernière s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \forall x \in I \ , \ \exists \delta > 0 \ , \ \forall y \in I \ , \ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \ .$$

Donc pour la continuité, la marge $\delta$ ne donnant pas une erreur plus grande que $\varepsilon$ pour les images peut dépendre de $x$. Ce n'est pas le cas quand on demande que la continuité soit uniforme. Une fonction uniformément continue est donc forcément continue, mais la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est continue sans être uniformément continue.

Le théorème suivant est attribué à Eduard Heine (1821-1881, Allemagne).

**Théorème 5.3.** *Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors $f$ est aussi uniformément continue.*

***Démonstration :*** Raisonnons par l'absurde et supposons que $f$ est continue mais pas uniformément continue. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n$, il existe $x_n$ et $y_n$ avec $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ mais $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Par compacité, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de la suite $(x_n)$ qui converge vers une limite $\ell \in [a,b]$. Par continuité, on a $f(x_{\varphi(n)})$ qui tend vers $f(\ell)$. Mais on a aussi $y_{\varphi(n)}$ qui tend vers $\ell$ donc $f(y_{\varphi(n)})$ tend aussi vers $f(\ell)$. Mais alors en passant à la limite dans $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon$, on aurait $0 \geq \varepsilon$ ce qui est absurde. Donc $f$ est forcément uniformément continue. □

On rappelle aussi le résultat suivant.

**Théorème 5.4.** *Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors $f$ est bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$.*

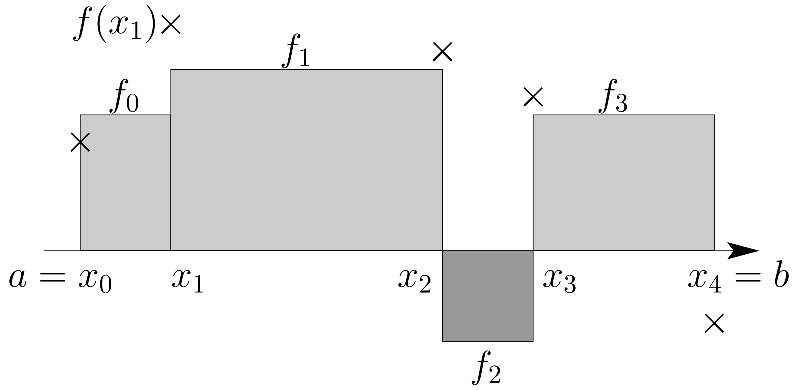
# 2 Définition de l'intégrale de Riemann

Nous allons définir l'intégrale d'une fonction comme l'aire entre l'axe horizontal et sa courbe comptée algébriquement (positivement si la courbe est au-dessus de l'axe et négativement en-dessous). Le problème revient à définir proprement ce qu'est une aire d'une forme géométrique. Par définition, on peut supposer que l'aire des rectangles vaut longueur fois largeur. Puis par découpages et recollages, on peut définir l'aire des triangles et de tout polygone. Comment faire dans le cas d'une courbe ? Nous allons essayer d'encadrer la courbe avec des aires de polygones et voir si on peut obtenir une aire limite en faisant en encadrement de plus en plus précis. C'est déjà ainsi que les anciens ont calculé l'aire du disque et donc $\pi$ : Archimède (IIIème siècle avant J.C., Syracuse) donne $\pi \simeq 3{,}14$ par des polygones à 96 côtés, Liu Hui (IIIème siècle après J.C., Chine) trouve une méthode itérative plus rapide et avec aussi 96 côtés donne $\pi \simeq 3{,}1416$. Deux siècles plus tard, Zu Chongzhi reprend l'algorithme pour obtenir $\pi$ au millionième près avec l'équivalent d'un polygone a 12 288 côtés.

L'histoire de l'intégration d'un point de vue plus analyste remonte à Bonaventura Cavalieri (1598-1647, Italie) puis à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716, Allemagne). Bernhard Riemann (1826-1866, Allemagne) est un des premiers à formaliser proprement la théorie. Il existe plusieurs façons de définir et construire l'intégrale de Riemann. Elles sont toutes grosso-modo équivalentes. Nous allons voir ici une présentation allégée proche de celle de Gaston Darboux (1842-1917, France).

**Définition 5.5.** *Soit $I = [a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Une fonction $f$ est dite* en escalier *ou* constante par morceaux *sur $I$ s'il existe un nombre fini de points $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_p = b$ tels que $f$ est constante sur chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$. Les points $x_i$ forment une* subdivision *de $I$.*

Notons que cette définition ne dit rien sur les valeurs ponctuelles en $x_i$ qui peuvent être différente des constantes. L'intégrale d'une fonction en escalier se définit naturellement par la formule d'aire des rectangles.




**Définition 5.6.** *Soit $f$ une fonction en escalier sur un intervalle $[a,b]$ qui est constante égale à $f_i$ sur chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$ d'une subdivision $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_p = b$. Alors on appelle intégrale de $f$ sur $[a,b]$ le nombre*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sum_{i=0}^{p-1}(x_{i+1} - x_i) \times f_i \;.$$

Par exemple, on a que

$$\int_0^3 E(x)\,\mathrm{d}x \;=\; (1-0)\times 0 + (2-1)\times 1 + (3-2)\times 2 \;=\; 3\ .$$

Pour définir l'intégrale dans un cas plus complexe, nous allons introduire des fonctions en escalier encadrant la valeur de l'intégrale.

**Définition 5.7.** *Soit* $[a,b]$ *une intervalle compact de* $\mathbb{R}$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que* $f$ *est* intégrable au sens de Riemann *si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe deux fonctions en escalier* $\underline{f_\varepsilon}$ *et* $\overline{f_\varepsilon}$ *telles que*

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ \ \underline{f_\varepsilon}(x) \le f(x) \le \overline{f_\varepsilon}(x)$$

*et*

$$\left|\int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x \;-\; \int_a^b \overline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x\right| \;\le\; \varepsilon\ .$$

**Proposition 5.8.** *Si* $f$ *est intégrable au sens de Riemann sur* $[a,b] \subset \mathbb{R}$*, alors pour tout choix des familles de fonctions* $(\underline{f_\varepsilon})$ *et* $(\overline{f_\varepsilon})$*, on a existence et égalités des limites*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \overline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

*En outre, cette limite est indépendante du choix des familles de fonctions en escalier. Cette limite est appelée* intégrale de $f$ sur $[a,b]$ au sens de Riemann *et est notée*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

***Démonstration :*** On ne va pas détailler la preuve complète, mais l'argument principal est le suivant. On considère $\underline{f_\varepsilon}$ et $\underline{f_{\varepsilon'}}$ deux fonctions en escalier sous $f$. On a forcément $\underline{f_{\varepsilon'}} \le f \le \overline{f_\varepsilon}$ et donc

$$\int_a^b \underline{f_{\varepsilon'}}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b \underline{f_{\varepsilon'}}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \overline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \overline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; \varepsilon\ .$$

Mais avec l'argument symétrique, on a

$$\int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x \;-\; \int_a^b \underline{f_{\varepsilon'}}(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; \varepsilon'\ .$$

Donc

$$\left|\int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x \;-\; \int_a^b \underline{f_{\varepsilon'}}(x)\,\mathrm{d}x\right| \;\le\; \max(\varepsilon,\varepsilon')\ .$$

**Ueber den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.**

**4.**

Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voraufzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x)\,dx$ zu verstehen?

Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen $a$ und $b$ der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ an und bezeichnen der Kürze wegen $x_1 - a$ durch $\delta_1$, $x_2 - x_1$ durch $\delta_2, \ldots, b - x_{n-1}$ durch $\delta_n$ und durch $\varepsilon$ einen positiven ächten Bruch. Es wird alsdann der Werth der Summe

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

von der Wahl der Intervalle $\delta$ und der Grössen $\varepsilon$ abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch $\delta$ und $\varepsilon$ gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze $A$ unendlich zu nähern, sobald sämmtliche $\delta$ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int_a^b f(x)\,dx$.

*Le papier original de Riemann de 1867 (posthume mais présentant des travaux de 1854). Son but principal est de commenter les écrits de Joseph Fourier. Il a déjà écrit une quinzaine d'intégrales dans l'article en question, quand il pose soudainement la question « Qu'entend-on par $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ? ». Cela fait pourtant 250 ans que les gens écrivent pour des intégrales !*

Ceci montre par exemple que les familles d'intégrales des fonctions en escalier vérifie le critère de Cauchy et donc converge. En prenant deux fonctions qui marchent pour le même $\varepsilon$, c'est aussi ainsi que l'on voit que l'écart entre les deux valeurs obtenues pour approcher l'intégrale devient négligeable. $\square$

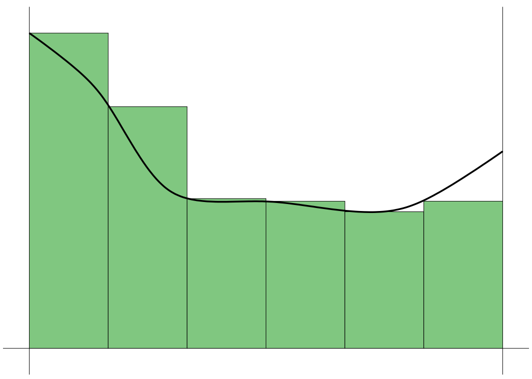
**Exemple :** On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon. Une fonction constante par morceaux sous $f$ sera forcément négative et une fonction constante par morceaux au-dessus de $f$ sera forcément plus grande que 1. L'écart entre les intégrales sera donc au moins 1 et $f$ n'est pas intégrable au sens de Riemann : ce n'est pas la bonne méthode pour donner un sens à l'intégrale de cette fonction.

Après avoir vu un contre-exemple, voyons notre principal exemple qui marche : les fonctions continues.

**Théorème 5.9.** *Soit $[a,b]$ un intervalle compact et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue. Alors $f$ est intégrable au sens de Riemann. En outre, on a*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

La dernière partie montre que l'intégrale peut s'approcher par la méthode des rectangles à gauche en pratiquant une subdivision régulière.



On découpe $[a,b]$ en $n$ intervalles de largeur $\frac{b-a}{n}$. La somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big)$$

est appelée *somme de Riemann* et correspond à l'aire des rectangles verts dont la hauteur est prise comme la valeur de $f$ à gauche de l'intervalle.

***Démonstration :*** Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Divisons $[a,b]$ en $n$ intervalles, posons $h = (b-a)/n$ le pas de la subdivision et notons $x_i = a + i \times h$ la subdivision avec $i = 0,\dots,n$. On définit $\underline{f}$ et $\overline{f}$ comme des fonctions en escaliers qui sont constantes sur chaque $[x_i,x_{i+1}[$ et vérifient

$$\forall x \in [x_i,x_{i+1}[\ ,\quad \underline{f}(x) = \min_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]} f(\xi) \quad \text{et} \quad \overline{f}(x) = \max_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]} f(\xi)\ .$$

On rappelle que les minimums et maximums sont bien définis car $f$ est continue sur $[x_i,x_{i+1}]$. On décide aussi que $\underline{f}(b) = \overline{f}(b) = f(b)$. Par construction, $\underline{f}$ et $\overline{f}$ sont bien des fonctions continues par morceaux qui encadrent $f$. Par ailleurs, leur différence est au pire de l'écart entre $f(x)$ et $f(y)$ pour $x$ et $y$ dans le même intervalle $[x_i,x_{i+1}]$. Par continuité uniforme, on peut trouver $h$ assez petit tel que cet écart est plus petit que $\varepsilon/(b-a)$. On a alors que

$$\left|\int_a^b \underline{f}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \overline{f}(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \sum (x_{i+1}-x_i)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon \ .$$

Ceci montre que $f$ est bien Riemann-intégrable. La convergence de la somme de Riemann découle simplement du fait que cette somme est encadrée par les deux intégrales de $\underline{f}$ et $\overline{f}$. □

**Exemples :**

- La fonction $x \mapsto e^x$ est donc intégrable au sens de Riemann sur [0,1]. En outre, quand $n$ tend vers $+\infty$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}.\frac{1-e}{1-e^{1/n}} = \frac{1-e}{n(1-1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} = \frac{e-1}{1+o(1)} \ .$$

  Donc, on faisant tendre $n$ vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e-1 \ .$$

- La fonction $x \mapsto x+1$ est continue donc intégrable au sens de Riemann sur [0,1]. En outre,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}(\frac{k}{n}+1) = 1 + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = 1 + \frac{1}{n^2} \times \frac{(n-1)n}{2} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

  où on a utilisé la formule $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ que l'on peut démontrer par récurrence. On note que le résultat obtenu pour l'aire sous la courbe de $x \mapsto x+1$ est bien cohérent avec la formule d'aire d'un trapèze de hauteur 1 et de petite et grande bases 1 et 2.

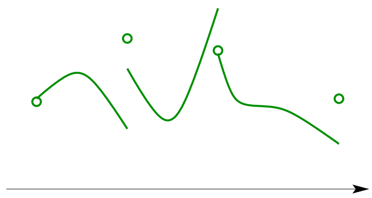
Faisons un petit point sur les notations. La convergence

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

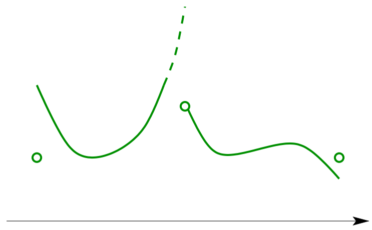
donne une correspondance entre les éléments de la somme de Riemann (méthode des rectangles) et l'écriture intégrale. On peut commencer par remarquer que le symbole $\int$ est un « $\mathcal{S}$ » allongé. Il a été introduit par Leibniz et fait donc bien référence à l'intégrale comme une sorte de somme. L'autre point à remarquer, c'est que l'élément d'intégration $\mathrm{d}x$ correspond à la limite de la petite distance $h = \frac{b-a}{n}$ (symbole qu'on retrouve logiquement dans la dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ par passage à la limite de la pente de la corde). C'est donc un élément qui fait partie de la somme de l'intégrale et non un symbole servant juste à fermer l'intégrale (ce sera clair au moment des changements de variables).

En recollant plusieurs intervalles où on applique le résultat précédent, on peut généraliser ce théorème aux fonctions continues par morceaux.

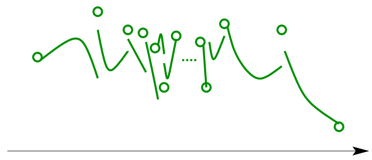
**Définition 5.10.** *Soit $I = [a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Une fonction $f$ est dite* continue par morceaux *sur $I$ s'il existe un nombre fini de points $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_p = b$ tels que $f$ est continue sur chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$ et que les limites à droite et à gauche de chaque intervalle existent et sont finies. L'ensemble des fonctions continue par morceaux sur $[a,b]$ est noté $\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$.*



une fonction continue par morceaux



une fonction non continue par morceaux car la limite à gauche n'existe pas au point central



une fonction non continue par morceaux car il y a un nombre infini de discontinuités

**Théorème 5.11.** *Soit $[a,b]$ un intervalle compact et $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue par morceaux. Alors $f$ est intégrable au sens de Riemann. En outre, on a*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

*De plus, les valeurs de $f$ aux points de discontinuités ne change pas la valeur de l'intégrale.*

***Démonstration :*** Il suffit de recoller les arguments de la démonstration précédente appliquée sur chaque morceau. Pour la convergence de la somme de Riemann, l'argument est aussi le même. Il y a juste le problème des valeurs aux points de discontinuités mais celles-ci sont en nombre fini et leur influence disparaît au fur et à mesure que $n$ tend vers $+\infty$. $\square$

On peut aussi facilement gérer les fonctions à valeurs complexes.

**Définition 5.12.** *Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable au sens de Riemann si ses parties réelle et imaginaire le sont. On pose alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{d}x \;+\; i\;\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,\mathrm{d}x\ .$$

Nous allons admettre toutes les propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann, même si elles se démontrent assez facilement en partant de la définition.

**Proposition 5.13. Linéarité**
*Soient $f$ et $g$ deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur un segment $[a,b]$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $f + \lambda g$ est intégrable au sens de Riemann et*

$$\int_a^b (f+\lambda g)(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

**Proposition 5.14. Monotonie**
*Soient $f$ et $g$ deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur un segment $[a,b]$ et à valeurs réelles. Si pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

On note que la valeur en un nombre fini de points n'influence pas la valeur de l'intégrale, donc on peut aussi supposer que $f(x) \leq g(x)$ sauf en un nombre fini de points.

**Proposition 5.15. Relation de Chasles**
*Soit $f$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,c]$ et soit $b \in ]a,c[$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Cette relation nous pousse à prendre comme convention que

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Notons que la première convention est aussi cohérente avec la limite $b \to a$.

**Proposition 5.16. Inégalité triangulaire**
*Soit $f$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, alors*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\ .$$

**Proposition 5.17. Stricte positivité**
*Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+)$ une fonction continue et positive. Alors s'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, on a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ > \ 0 \ .$$

*En conséquent, si $f$ est positive continue et d'intégrale nulle sur $[a,b]$, alors $f$ est identiquement nulle sur $[a,b]$.*

# 3 Lien avec la dérivation

Le théorème fondamentale de l'analyse est le lien a priori inattendu entre l'intégration et la dérivation.

**Théorème 5.18.** *Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$ un fonction continue par morceaux. Alors*

$$\xi \in [a,b] \ \longmapsto \ \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$$

*est une fonction continue de $x$.*

*Si en outre $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ est de plus continue sur $[a,b]$ alors*

$$\xi \in [a,b] \ \longmapsto \ \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$$

*est une fonction dérivable et sa dérivée vaut*

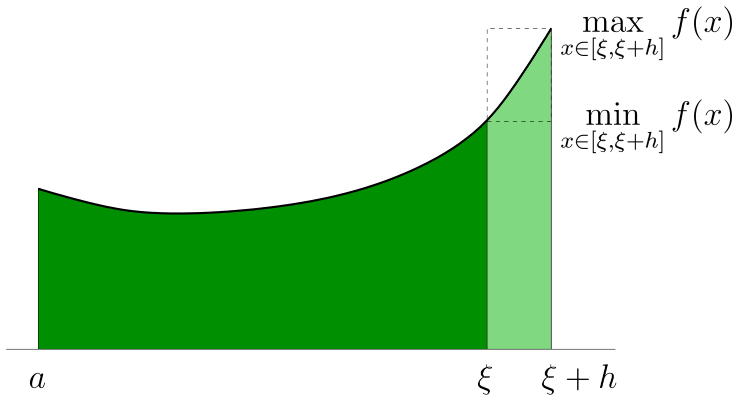
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \ .$$

*En conséquence, $\xi \in [a,b] \ \longmapsto \ \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'unique primitive de $f$ sur $[a,b]$ qui s'annule en $a$.*

***Démonstration :*** Par la relation de Chasles, on a

$$\int_a^{\xi+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\xi^{\xi+h} f(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

Si $f$ est continue par morceaux, alors elle est bornée et l'aire sous la courbe entre $\xi$ et $\xi+h$ est bornée par un rectangle de largeur $h$ et de hauteur constante. Donc quand $h$ tend vers 0, on obtient bien la continuité de l'intégrale par rapport à sa borne.




Affinons les choses en supposant que $f$ est continue. Par monotonie de l'intégrale, on a

$$h \min_{x\in[\xi,\xi+h]} f(x) \;\leq\; \int_{\xi}^{\xi+h} f(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; h \max_{x\in[\xi,\xi+h]} f(x)\ .$$

Or, par continuité, $\min_{x\in[\xi,\xi+h]} f(x)$ comme $\max_{x\in[\xi,\xi+h]} f(x)$ tendent vers $f(\xi)$ quand $h$ tend vers 0. On obtient donc par encadrement que

$$\frac{1}{h}\left(\int_a^{\xi+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} f(\xi)$$

ce qui donne par définition la dérivée recherchée. La dernière assertion vient de l'unicité de la primitive modulo les constantes. □

Le théorème montre aussi que toute fonction continue admet une primitive (et donc une infinité en y ajoutant une constante). Si la fonction $f$ est seulement continue par morceaux, on peut obtenir une sorte de primitive mais qui ne sera dérivable qu'à droite et à gauche aux points de discontinuité de $f$.

**Corollaire 5.19.** *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue et soit $F \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ une primitive de $f$ sur $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(b) - F(a) \;:= [F(x)]_a^b\,.$$

***Démonstration :*** On pose $\tilde{F}(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$ . On sait que $F = \tilde{F} + C$ avec $C$ une constante. On a alors

$$F(b) - F(a) = (\tilde{F}(b) + C) - (\tilde{F}(a) + C) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 0\ .$$

□

# Chapitre 6 : Des techniques d'intégration

Le but de ce chapitre est de présenter quelques techniques d'intégration permettant d'exprimer une intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ en une expression composée des fonctions usuelles (et sans le signe intégral). Le plus souvent, cela revient à trouver une primitive à $f$ mais cette opération est parfois difficile sans opérer des transformations de l'intégrale. Le but est donc de :

- connaître les transformations possibles,
- savoir dans quelle situation les utiliser pour simplifier le calcul.

Dans ce contexte, on pourra se souvenir qu'il n'est pas toujours possible d'avoir une expression de la primitive. Joseph Liouville (1809-1882, France) a ainsi montré que la primitive de $e^{-x^2}$ ne peut s'exprimer en fonctions des fonctions usuelles. Même si on donne le nom « Erf » à cette primitive, on aura encore des primitives non exprimables etc. Nous allons donc essayer de faire au mieux, mais une méthode générale ne sera pas possible.

## 1 Intégration par parties

La formule de l'intégration par parties correspond à la formule de dérivation du produit. Si $F$ et $g$ sont deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ de dérivées $f$ et $g'$, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Fg(x)\right) = f(x)g(x) + F(x)g'(x) .$$

On en déduit donc le résultat suivant.

**Théorème 6.1.** *Soit $a < b$. Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ et soit $g$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

*où $F$ est une primitive de $f$ sur $[a,b]$.*

***Démonstration :*** On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \left(F'(x)g(x) + F(x)g'(x)\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left(F(x)g(x)\right)'\,\mathrm{d}x \\ &= \left[F(x)g(x)\right]_a^b \ .\end{aligned}$$

□

On n'utilisera l'intégration par partie que si on identifie deux parties dans l'intégrande et qu'au moins une partie a une primitive connue. En outre, cette intégration par parties doit nous simplifier la tâche, c'est-à-dire aboutir à un intégrande plus simple. Nous allons voir quelques situations classiques.

**Le cas polynôme contre exponentielle.**
Si l'intégrande est du type $P(x)e^x$ avec $P$ un polynôme, alors une intégration par partie permet de dériver le polynôme et intégrer l'exponentielle. Intégrer l'exponentielle n'est pas coûteux et dériver le polynôme fait baisser son degré. En réitérant le processus, on finit par se ramener à $P$ =constante et on peut conclure. Cette idée fonctionne aussi pour les cas du type $P(x)\sin x$, $P(x)\cos x \ldots$

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = 1\ .$$

Mais aussi

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= \left[x^2\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi x\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\left[x\frac{(-1)}{2}\cos(2x)\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\left[\sin(2x)\right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2}\ .\end{aligned}$$

**Le cas** $\ln$ **ou** $\arctan$**.**
Quand une intégrale fait apparaître un log ou une arctangente, l'idée est d'essayer de faire une intégration par parties pour dériver ces fonctions. En effet, leur dérivées sont de type « fractions rationnelles », c'est-à-dire quotient de deux polynômes, et on sait intégrer toutes les fonctions de cette famille (voir ci-dessous).

Nous allons voir comment calculer une primitive du log. Pour cela, nous allons introduire une notation qui n'est pas universelle mais bien pratique. On sait que $\int_1^x \ln t \, \mathrm{d}t$ est la primitive du log qui s'annule en 1, mais $\int_2^x \ln t \, \mathrm{d}t$ est aussi une primitive du log etc. En fait, la borne inférieure n'est pas importante puisque dans tous les calculs, elle ne donnera que des constantes et la primitive est définie à une constante près. Plutôt que de s'encombrer des nombres qui viendront de cette borne inférieure, nous allons l'ignorer, ce qui donnera en quelque sorte la primitive la plus simple à écrire, c'est-à-dire la partie qui dépend de $x$ avec les fonctions usuelles. Par ailleurs, l'astuce est de faire une intégration par partie en dérivant le log. A priori, il n'y a rien à intégrer… sauf que l'on peut dire que le log est multiplier par 1 et intégrer cette constante.

$$\begin{aligned}\int^x \ln t \, \mathrm{d}t &= \int^x 1 \times \ln t \, \mathrm{d}t = [t \ln t]^x - \int^x t \times \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \\ &= x \ln x - \int^x \mathrm{d}t \\ &= x \ln x - x\end{aligned}$$

**Proposition 6.2.** *Une primitive de* $\ln$ *sur* $]0, +\infty[$ *est* $x \longmapsto x \ln x - x$.

On procède de même pour l'arctangente.

$$\begin{aligned}\int^x \arctan t \, \mathrm{d}t &= [t \arctan t]^x - \int^x t \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = x \arctan x - \frac{1}{2} \int^x \frac{2t}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \left[\ln |1+t^2|\right]^x = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\end{aligned}$$

L'astuce marche pour d'autres cas.

$$\begin{aligned}\int_1^2 x \ln^2 x \, \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln^2 x\right]_1^2 - \int_1^2 x^2 \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x \\ &= 2 \ln^2 2 - \int_1^2 x \ln x \, \mathrm{d}x = 2 \ln^2 2 - \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x\right]_1^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\ &= 2 \ln^2 2 - 2 \ln 2 + \frac{1}{4} \left[x^2\right]_1^2 \\ &= 2 \ln^2 2 - 2 \ln 2 + \frac{3}{4} \ .\end{aligned}$$

**L'astuce de la double intégration.**

Terminons par un calcul astucieux classique qui nécessite une double intégration par parties.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos x e^x \,\mathrm{d}x &= [\cos x e^x]_0^\pi + \int_0^\pi \sin x e^x \,\mathrm{d}x \\ &= -e^\pi - 1 + [\sin x e^x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x e^x \,\mathrm{d}x \\ &= e^\pi - 1 - \int_0^\pi \cos x e^x \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

On a l'impression de tourner en rond car la dernière intégrale est celle de départ. Mais le signe nous sauve miraculeusement et on peut faire passer l'intégrale de l'autre côté pour obtenir

$$\int_0^\pi \cos x e^x \,\mathrm{d}x = -\frac{1+e^\pi}{2} \ .$$

## 2 Décomposition en éléments simples

Le but de cette partie est d'intégrer toutes les fractions rationnelles, c'est-à-dire tous les quotients de deux polynômes. L'idée de la méthode peut se voir sur cet exemple élémentaire.

On souhaite intégrer la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$. On constate que

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

et donc une primitive de $f$ est

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\ln|1+x| + \ln|1-x|\right)$$

(on lèvera les valeurs absolues en fonction de l'intervalle où la primitive est considérée). On voit ici le point central de la méthode : décomposer la fraction en « éléments simples » que l'on sait facilement intégrer.

**Les éléments simples :** soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle où $P$ et $Q$ sont deux polynômes à coefficients réels. Le polynôme $Q(x)$ peut se factoriser sous la forme

$$Q(x) = C(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_p)^{k_p}(x^2+a_1x+b_1)^{l_1}\dots(x^2+a_qx+b_q)^{l_q}$$

où $x_i$ sont des racines réelles distinctes, $k_i$ et $l_i$ des puissances entières et $(x^2+a_ix+b_i)$ des facteurs irréductibles réels. Alors la fraction $P/Q$ peut se décomposer sous la forme d'une somme d'éléments de cette liste

- Un polynôme réel de degré égal à celui de $P$ moins celui de $Q$. Si $Q$ est de degré plus grand que $P$, il n'y a pas de tel terme.

- Pour chaque racine $x_i$ une somme de termes
$$\frac{\alpha_1}{(x-x_i)} + \frac{\alpha_2}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{k_i}}{(x-x_i)^{k_i}} \ .$$
- Pour chaque facteur irréductible $(x^2 + a_i x + b_i)$, une somme de termes
$$\frac{\alpha_1 x + \beta_1}{(x^2 + a_i x + b_i)} + \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{(x^2 + a_i x + b_i)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{l_i} x + \beta_{l_i}}{(x^2 + a_i x + b_i)^{l_i}} \ .$$

Voyons un exemple : si on considère la fonction
$$f(x) = \frac{x^5}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$$
alors on sait que l'on pourra écrire
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} + \frac{gx+h}{x^2+x+1} \ .$$

**Méthodes de décomposition :** il faut bien sûr commencer par factoriser $Q$ pour trouver quels sont les éléments simples qui vont intervenir. Une fois les éléments connus, la méthode la plus basique consiste à tout réduire au même dénominateur et identifier termes à termes. Par exemple, on écrit
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+2}{x^2-3x+2} = \frac{x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{(a+b)x - (2a+b)}{(x-1)(x-2)} \ . \end{aligned}$$
Par identification, on trouve que $(a+b) = 1$ et $(2a+b) = -2$. La résolution du système donne que $a = -3$ et $b = 4$ et donc
$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+2} = \frac{-3}{x-1} + \frac{4}{x-2} \ .$$
Il existe parfois astuces pour aller plus vite. Par exemple, le polynôme peut se trouver par division euclidienne. Si on n'a qu'un seul facteur simple sous la fraction, la division euclidienne permet d'avoir tous les termes. Par exemple,
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & & & x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -x^2 & & & x^2 - x + 1 \\ \cline{1-2}
 & -x^2 & & & \\
 & x^2 & +x & & \\ \cline{2-3}
 & & x & & \\
 & & -x & -1 & \\ \cline{3-4}
 & & & -1 &
\end{array}$$

Ce qui montre que
$$\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \ .$$
Une autre astuce quand on n'a que des facteurs simples du type $\frac{a_i}{x-x_i}$ à trouver est la suivante. Prenons par exemple le cas de la fraction
$$f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} \ .$$
Pour trouver $a$, on va tout multiplier par $x+1$ pour obtenir pour $x \neq -1$
$$\frac{2x+3}{x-1} = a + b\frac{x+1}{x-1}$$
on prend maintenant la limite $x \to -1$. En fait, on peut prolonger l'expression par continuité et cette limite revient à regarder la valeur en $x = -1$ qui donne $a = -1/2$. On voit que cette astuce permet de trouver $a$ en neutralisant $b$ dans un premier temps. Pour trouver $b$, on procède de même en multipliant l'expression de départ par $(x-1)$ et en prenant la valeur en $x = 1$ (ou plus rigoureusement en faisant la limite $x \to 1$ dans l'expression). On trouve ainsi
$$\frac{2x+3}{x+1} = a\frac{x-1}{x+1} + b$$
puis $b = 5/2$. On conclut donc que
$$f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x+1} + \frac{5}{x-1}\right) \ .$$

**Intégrations :** il ne reste plus qu'à intégrer les différents « éléments simples ». Evidemment, l'éventuelle partie polynomiale est facile, de même que les termes $1/(x-x_i)^{k_i}$. Par exemple, avec les décompositions déjà effectuées, on obtient
$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{2x+3}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^3 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{5}{x-1}\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left[-\ln(1+x) + 5\ln(x-1)\right]_2^3 \\ &= \frac{1}{2}(-\ln 4 + 5\ln 2 + \ln 3 - 5\ln 1) = \frac{1}{2}\ln(24) \ .\end{aligned}$$
L'intégration des termes correspondant à des facteurs irréductibles de degré deux est plus délicate. Nous n'allons voir que le cas des fractions du type $(\alpha x + \beta)/(x^2 + ax + b)$. Cette intégration est basée sur deux primitives usuelles :
$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \arctan x \quad \text{et} \quad \int^x \frac{2t+a}{t^2+at+b}\,\mathrm{d}t = \ln|t^2+at+b| \ .$$

Prenons un exemple concret. On souhaite intégrer

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2x+2} \ .$$

Commençons par éliminer le terme en $x$ du dessus en repérant le début de la dérivée du terme du dessous :

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{x^2+2x+2} \ .$$

Le premier terme est sous la bonne forme pour être intégrer avec un log. Le deuxième terme se met sous la bonne forme pour être intégrer avec une arctangente en repérant le début d'un carré : $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$. On a alors

$$\begin{aligned}\int^x \frac{t}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int^x \frac{2t+2}{t^2+2t+2}\,\mathrm{d}t - \int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2+1)} \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) \ .\end{aligned}$$

Nous n'avons pas vu l'intégration de tous les types de termes ni toutes les astuces qui servent à avoir rapidement la décomposition. Mais elles sont très bien implémentées dans les logiciels de calcul formel et nous ne faisons aujourd'hui à la main que les cas simples.

On pourrait vouloir passer aux complexes pour factoriser complètement le dénominateur et n'avoir que des éléments simples faciles à intégrer. La décomposition est parfaitement possible ainsi et permet parfois d'aller plus vite. Mais attention au moment de l'intégration, il faut revenir aux nombres réels ou être très prudent. En effet, si on se retrouve avec des nombres comme $\ln(1+i)$, il va falloir se poser la question du log des nombres complexes, ce qui est délicat. Par exemple, on voit que $\ln 1 = \ln(e^{2i\pi}) = 2i\pi \neq 0$ signifie qu'a priori log et nombres complexes ne font pas bon ménage.

**Exemple :** Reprenons la méthode entière dans un dernier exemple. On veut intégrer $f(x) = \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2+x}$. Faisons la décomposition en éléments simples. Tout d'abord, il n'y a pas de partie polynomiale car le degré du dénominateur est strictement plus grand que celui du numérateur. On factorise le dénominateur en $x^3-x^2+x = x(x^2-x+1)$. On sait donc que

$$f(x) = \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2+x} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} \ .$$

En multipliant tout par $x$ et en prenant $x=0$, on obtient $a=1$. Il suffit ensuite de calculer

$$f(x) - \frac{1}{x} = \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2+x} - \frac{1}{x} = \frac{2x}{x^2-x+1} \ .$$

et donc

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - x + 1} .$$

Pour intégrer le deuxième terme, on écrit

$$\frac{2x}{x^2 - x + 1} = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{4}{3}\frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}))^2 + 1}$$

d'où

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln|x| + \ln|x^2 - x + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2})\right) .$$

# 3 Linéarisation des polynômes trigonométriques

Parmi les familles de primitives que l'on peut faire systématiquement, il y a les polynômes trigonométriques, c'est-à-dire les combinaisons linéaires de puissances du type $\sin^p(x)\cos^q(x)$. Il y a plusieurs façons de faire. Par exemple les cas $\sin^p(x)\cos(x)$ se font facilement en voyant qu'une primitive est donnée par $\frac{1}{p+1}\sin^{p+1}(x)$. Si $q$ est impair, tout facteur $\sin^p(x)\cos^q(x)$ peut se ramener au cas précédent en utilisant les formules trigonométriques. Par exemple,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \sin^3(x)(1 - \sin^2(x))\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{4}\sin^4(x) - \frac{1}{6}\sin^6(x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

On n'oubliera pas aussi qu'il y a beaucoup de symétries dans les fonctions trigonométriques qui peuvent être utilisées. Ainsi,

$$\int_0^{\pi} \sin^3(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

car l'intégrande est impaire par rapport à $\pi/2$.

Comment faire le cas général ? Il suffit de linéariser le polynôme c'est-à-dire transformer les puissances $\sin^p(x)\cos^q(x)$ en combinaisons linéaires de $\sin(kx)$ et $\cos(lx)$. Pour ce faire, on utilise soit les formules trigonométriques, soit les formules d'Euler.

**Exemple :** On veut calculer $\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$. On a la formule trigonométrique $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ et donc

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos(2x))\,\mathrm{d}x = \pi\ .$$

où on a utilisé que l'intégrale de $\cos(2x)$ sur un nombre entier de périodes (ici la période est $\pi$ et l'intervalle de longueur $2\pi$) est nul.

**Exemple :** On veut calculer $\int_0^{\pi} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$. On a

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{-1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) \\
&= \frac{-1}{4}\left(\frac{e^{i3x}-e^{-3ix}}{2i} - 3\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)
\end{aligned}$$

Au passage on note que ce calcul ne fait intervenir les nombres complexes que pour les calculs intermédiaires : la fonction de départ est réelle et donc le résultat final l'est aussi. C'est l'utilisation initiale des « nombres imaginaires » qui n'avait qu'une existence formelle en tant que facilitateurs de calculs.

On obtient au final que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} 3\sin(x) - \sin(3x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\left[-3\cos(x) + \frac{1}{3}\cos(3x)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{4}\left(3 - \frac{1}{3} + 3 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

⚠ On notera qu'il y a des façons de contrôler le calcul linéarisant $\sin^p(x)\cos^q(x)$ en combinaisons linéaires de $\sin(kx)$ et $\cos(lx)$. Tout d'abord, le plus grand $k$ ou $l$ correspond à la puissance $p+q$. Par ailleurs, si le terme de départ est impair ($p$ impair) alors on n'aura un développement que sur les $\sin(kx)$ et inversement s'il est pair, on n'aura un développement que sur les $\cos(lx)$. Par ailleurs, à cause de l'autre symétrie $x \mapsto \pi - x$, les fréquences $k$ ou $l$ sautent de deux en deux.

# 4 Changement de variable

Quand on intégre une fonction sur un segment, la formule du changement de variable s'énonce simplement.

**Proposition 6.3.** *Soit* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *un segment compact, soit* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ *et soit* $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$*, on a*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \ .$$

***Démonstration :*** On note $F$ une primitive de $f$, alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $f\varphi'$ et donc

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \ .$$

□

Ce n'est donc qu'une façon de repérer les formes du type $(f \circ \varphi)\varphi'$ qui se primitivent facilement. Mais en pratique le changement se fait sans repérer cette forme. Il passe par plusieurs étapes :

1. poser la nouvelle variable $u = \varphi(x)$.
2. calculer le nouvel élément d'intégration $\mathrm{d}u = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$, formule cohérente avec $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x)$.
3. voir si on peut transformer tout l'intégrande de l'intégrale d'origine en remplaçant $x$ par $u$, y compris le $\mathrm{d}x$ par $\mathrm{d}u$.
4. changer les bornes par la méthode « quand $x$ valait $a$, alors $u$ vaut $\varphi(a)$ ».
5. effectuer toutes ces transformations dans l'intégrale.

**Exemple :** On considère un débit $f(t)$ d'une turbine en $m^3/h$ qui dépend du temps $t$ exprimé en heures. Le volume d'eau passée en une heure est $V = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. On veut regarder maintenant le temps exprimé en minutes. On pose $\tau = 60t$. On a $\mathrm{d}\tau = 60\,\mathrm{d}t$. Puis

$$V = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{60} f\big(\frac{\tau}{60}\big)\frac{\mathrm{d}\tau}{60} \ .$$

On note bien que $\frac{1}{60}f\big(\frac{\tau}{60}\big)$ est le débit minute par minute, en $m^3/min$. Le but de cet exemple est de bien mettre en valeur l'importance du terme $\mathrm{d}t$ ou $\mathrm{d}\tau$ qui intervient dans le calcul et donne l'unité d'intégration.

**Exemple :** Faisons un exemple plus complexe. On veut calculer

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x\ .$$

Pour cela, on va poser $u = e^x$. On a $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$. Le terme $e^x$ n'apparaît pas dans l'intégrande d'origine, nous allons donc le rajouter.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{e^x(1+e^x)}e^x\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{u(1+u)}\,\mathrm{d}u$$

Nous pouvons maintenant utiliser notre connaissance de la décomposition en éléments simples.

$$I = \int_1^e \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u = [\ln|u| - \ln(|1+u|]_1^e = 1 - \ln(1+e) + \ln 2$$

Ce dernier exemple illustre une généralité : toute fraction rationnelle d'exponentielles sous la forme $P(e^x)/Q(e^x)$ peut s'intégrer en posant $u = e^x$ puis en utilisant la décomposition en éléments simples.

Parmi les changements de variables classiques, on peut aussi s'attaquer aux fractions rationnelles de fonctions trigonométriques $P(\cos x, \sin x)/Q(\cos x, \sin x)$ par des changements de variables. Pour nous guider, Charles Bioche (1859-1949, France) proposa la règle suivante. On regarde le terme intégré $f(x)\,\mathrm{d}x$ dans son ensemble.

- s'il est invariant par $x \mapsto -x$, alors on pose $u = \cos x$,
- s'il est invariant par $x \mapsto \pi - x$, alors on pose $u = \sin x$,
- s'il est invariant par $x \mapsto \pi + x$, alors on pose $u = \tan x$,
- dans tous les cas $u = \tan(x/2)$ est un changement qui marchera, mais est très laborieux.

**Exemple :** Cherchons une primitive de $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, c'est-à-dire $F(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$. On voit que $\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ est invariant par $t \mapsto -t$. On pose donc $u = \cos t$. On a $\mathrm{d}u = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$ et donc

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = \int^{\cos x} \frac{-\mathrm{d}u}{1-u^2} &= \int^{\cos x} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|u-1| - \ln|u+1|\right]^{\cos x} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}\right| \\
&= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|
\end{aligned}$$

**Exemple :** Cherchons une primitive de $f(x) = \frac{1}{1+\sin x}$. On n'a aucun invariant intéressant. On va donc poser $u = \tan(x/2)$. Dans ce cas, il est utile de connaître les formules

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} \ .$$

On trouve donc

$$\begin{aligned}
\int^X \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x &= \int^{\tan(X/2)} \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= 2\int^{\tan(X/2)} \frac{1}{1+u^2+2u}\,\mathrm{d}u = 2\int^{\tan(X/2)} \frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{2}{1+\tan(X/2)}
\end{aligned}$$

**Exemple :** Finissons sur un exemple d'intégration d'un des éléments simples que nous avons mis de côté. On veut calculer

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \ .$$

Une astuce consiste à poser $x = \tan t$. On a $\mathrm{d}x = (1+x^2)\,\mathrm{d}t$ et donc

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^2 t} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \ .$$

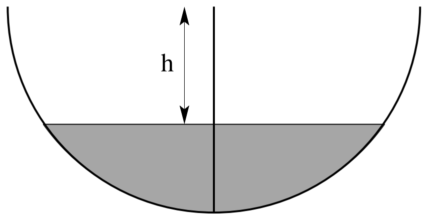
En utilisant les méthodes vues sur les polynômes trigonométriques, on obtient

$$I = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ .$$

# 5 Des exemples concrets

## 5.1 Aire d'un morceau de disque

On veut créer une jauge dans une cuve cylindrique. Le but est donc de connaître la surface grisée de la figure ci-contre en fonction de la profondeur $h$. On note $R$ le rayon de la cuve. En utilisant le théorème de Pythagore, on trouve que l'aire vaut




$$A(h) = \int_h^R 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \ .$$

Pour faire disparaître la racine carrée, une astuce consiste à paramétrer selon l'angle au centre, c'est-à-dire poser $x = R\sin\theta$, soit donc $\theta = \arcsin(x/R)$ et $\mathrm{d}x = R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$.

$$\begin{aligned}
A(h) &= 2\int_{\arcsin(h/R)}^{\pi/2} R^2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= R^2\int_{\arcsin(h/R)}^{\pi/2} 1+\cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= R^2\left[\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_{\arcsin(h/R)}^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi R^2}{2} - R^2\arcsin(\frac{h}{R}) - \frac{R^2}{2}\sin(2\arcsin(\frac{h}{R}))
\end{aligned}$$

On utilise alors que

$$\sin(2\arcsin(a)) = 2\cos(\arcsin a)\sin(\arcsin a) = 2a\sqrt{1-\sin^2(\arcsin a)} = 2a\sqrt{1-a^2}$$

en faisant bien attention qu'on se situe dans le cadre $a \in [0,\pi/2]$. On trouve au final que

$$A(h) = \frac{\pi R^2}{2} - R^2\arcsin(\frac{h}{R}) - h\sqrt{R^2-h^2} \ .$$

On peut vérifier au passage que le résultat est cohérent quand $h = 0$ ou $h = R$. Notons finalement que ce cas simple peut aussi se faire avec un peu de géométrie élémentaire en considérant qu'on regarde une portion du disque moins un triangle.

## 5.2 Réchauffement d'un objet

Un objet est placé dans un milieu dont la température augmente de façon homogène : par exemple un four ou une pièce où l'air est bien brassé. A $t = 0$, on suppose le tout à température nulle (quitte à changer d'échelle de température). La température extérieure sera supposée augmenter de façon constante selon la loi $T_{ext}(t) = \alpha t$. L'objet se réchauffe de façon homogène en suivant la loi de Joseph Fourier (1768-1830, France) :

$$T(0) = 0 \qquad T'(t) = \lambda(T_{ext}(t) - T(t))$$

où $\lambda > 0$ est un coefficient dépendant de la géométrie et de la matière de l'objet. On veut connaître $T(t)$. Pour cela, on utilise la méthode de la variation de la constante pour trouver que

$$T(t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} T_{ext}(s)\,\mathrm{d}s = \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} T_{ext}(s)\,\mathrm{d}s\ .$$

On peut en effet dériver cette formule et vérifier qu'elle satisfait l'équation différentielle. Calculons $T(t)$.

$$\begin{aligned} T(t) &= \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} T_{ext}(s)\,\mathrm{d}s = \alpha\lambda \int_0^t s e^{-\lambda(t-s)}\,\mathrm{d}s \\ &= \alpha \left[ s e^{-\lambda(t-s)} \right]_0^t - \alpha \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\,\mathrm{d}s \\ &= \alpha t - \alpha \left[ \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(t-s)} \right]_0^t \\ &= \alpha t - \frac{\alpha}{\lambda} \left( 1 - e^{-\lambda t} \right)\ . \end{aligned}$$

On trouve donc que pour $t$ assez grand, la différence de température entre le milieu extérieur et l'objet reste quasiment constant égal à $\alpha/\lambda$.

## 5.3 Evolution d'une population animale

Soit $p(t)$ une population animale adulte évoluant au cours du temps. Un modèle simpliste d'évolution de population est celui de Thomas Robert Malthus (1766-1834, Angleterre). Il s'agit de considérer que

$$p'(t) = \alpha p(t) - \beta p(t)$$

où $\alpha > 0$ est le taux de reproduction et $\beta > 0$ le taux de mortalité. On obtient comme solution $p(t) = p(0)e^{(\alpha-\beta)t}$ ce qui donne une croissance exponentielle ou une extinction suivant que $\alpha > \beta$ ou pas. Ce modèle est par exemple raisonnable pour la population humaine durant les dernières décennies. Il n'est par contre pas raisonnable pour une population qui a des contraintes d'environnement. Pour modéliser cela, Pierre François Verhulst (1804-1849, Belgique) propose de rajouter un terme $-\gamma p(t)^2$ qui est petit pour une population petite mais ajoute de la surmortalité si $p(t)$ devient trop grand. On trouve donc l'équation différentielle

$$p'(t) = \alpha p(t) - \beta p(t) - \gamma p(t)^2\ .$$

On la résoud par séparation des variables. Si $p(t)=0$ a un moment, alors $p(t)=0$ pour tout $t$ car $p(t)\equiv 0$ est une solution constante. De même, $p(t)\equiv\frac{\alpha-\beta}{\gamma}=\kappa$ est une autre solution constante. Supposons que $p(t)$ est différent de ces deux valeurs, on peut alors écrire

$$\frac{p'(t)}{(\alpha-\beta)p(t)-\gamma p(t)^2}=1\ . \tag{6.1}$$

Pour intégrer cette équation, il nous faut une primitive de

$$f(p)=\frac{1}{(\alpha-\beta)p-\gamma p^2}=\frac{1}{\gamma p(\kappa-p)}\ .$$

On utilise la décomposition en éléments simple

$$f(p)=\frac{1}{\gamma p(\kappa-p)}=\frac{A}{p}+\frac{b}{\kappa-p}\ .$$

Par notre méthode préférée, on obtient au final que

$$f(p)=\frac{1}{\gamma p(\kappa-p)}=\frac{1}{\gamma\kappa}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\kappa-p}\right)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\kappa-p}\right)\ .$$

D'où

$$\int^p f(s)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\ln|p|-\ln|\kappa-p|\right)=\frac{1}{\alpha-\beta}\ln\left(\frac{p}{|\kappa-p|}\right)\ .$$

En revenant à (6.1), on obtient donc que

$$\frac{1}{\alpha-\beta}\ln\left(\frac{p(t)}{|\kappa-p(t)|}\right)=t+\mathrm{cte}$$

et donc que

$$\frac{p(t)}{|\kappa-p(t)|}=Ce^{(\alpha-\beta)t}\ .$$

Il ne reste plus qu'à résoudre cette équation. Par exemple si $p(0)\in]0,\kappa[$, alors $p(t)$ reste dans cet intervalle et

$$p(t)=Ce^{(\alpha-\beta)t}(\kappa-p(t))$$

implique que

$$p(t)=\kappa\frac{Ce^{(\alpha-\beta)t}}{1+Ce^{(\alpha-\beta)t}}$$

et donc que

$$p(t)=\frac{\kappa p(0)}{p(0)+(\kappa-p(0))e^{-(\alpha-\beta)t}}\ .$$

Il se trouve que l'expression est la même si $p(0)>\kappa$, mais aussi si $p(0)=0$ ou $p(0)=\kappa$. A part pour $p(0)=0$, la population converge vers l'équilibre $\kappa$ avec une vitesse $e^{-(\alpha-\beta)t}$.