Contrôle continu 1

le 26 octobre 2017 de 12h30 à 14h30

Les documents, calculatrices, téléphones portables ainsi que tous les autres dispositifs électroniques sont strictement interdits. Seule une feuille recto-verso manuscrite est autorisée. Toutes les réponses doivent être justifiées et la qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Autour du cours (2 points).

1. Que signifie « *la série de réels* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)$ *converge* » ?
2. Soient $\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 0} b_n\right)$ deux séries à termes positifs. On suppose que pour tout n on a l'inégalité $a_n \leq b_n$. Démontrer le critère de comparaison suivant :

$$\textit{Si } \left(\sum_{n\geq 0} b_n\right) \textit{ converge alors } \left(\sum_{n\geq 0} a_n\right) \textit{ converge.}$$

Exercice 2. (4 points) Dire si les séries suivantes sont convergentes et, dans l'affirmative, calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{\ln(\frac{32}{13}\pi)}{3^{n-2}}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n+1}{n!}$

Exercice 3. (6 points) Déterminer la nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{n^3 + \ln(n) + 5^n}$
2. $u_n = \dfrac{n}{e^n}$
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$
4. $u_n = \left(1 - \dfrac{3}{n^2}\right)^n$
5. $u_n = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{n^3}$
6. $u_n = (-1)^n \sin(1/n)\sqrt{n}$

Exercice 4. (4 points) Pour tout $a > 0$, discuter la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + a^n}$.

Exercice 5. (5 points) Posons $u_1 := 1$. Pour tout $n \geq 1$ on définit par récurrence u_{n+1} par la formule

$$u_{n+1} := \frac{1}{n}e^{-u_n} .$$

1. Montrer que pour tout n, $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire un équivalent de u_n.
3. Déterminer la convergence de la série de terme général u_n.
4. Déterminer la convergence de la série de terme général $\frac{u_n}{n}$.
5. Déterminer la convergence de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Exercice 6. (4 points) En comparant à une intégrale, donner un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2$.

(Indication : une primitive de $x \mapsto (\ln x)^2$ est $x \mapsto x(2 - 2\ln x + (\ln x)^2)$.)

Contrôle continu 1

le 26 octobre 2017 de 12h30 à 14h30

Documents, calculators, telephones and any other electronic device is strictly forbidden. A recto-verso handwritten sheet is authorized. All the answers have to be justified, and the quality of the redaction will be taken into account.

Exercise 1. About the lectures (2 points).

1. What does it mean « *the series of real numbers* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)$ *converges* » ?
2. Let $\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)$ and $\left(\sum_{n\geq 0} b_n\right)$ be two series with positive general terms. We assume that for all n we have the inequality $a_n \leq b_n$. Prove the following comparison criterion :

$$\textit{If } \left(\sum_{n\geq 0} b_n\right) \textit{ converges, then } \left(\sum_{n\geq 0} a_n\right) \textit{ converges too.}$$

Exercise 2. (4 points) Are the following series convergent ? If yes, compute their sum :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{\ln(\frac{32}{13}\pi)}{3^{n-2}}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n+1}{n!}$

Exercise 3. (6 points) Give the nature of the series with general term u_n in the following cases :

1. $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{n^3 + \ln(n) + 5^n}$
2. $u_n = \dfrac{n}{e^n}$
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$
4. $u_n = \left(1 - \dfrac{3}{n^2}\right)^n$
5. $u_n = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^{n^3}$
6. $u_n = (-1)^n \sin(1/n)\sqrt{n}$

Exercise 4. (4 points) For all $a > 0$, give the nature of the series $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + a^n}$.

Exercise 5. (5 points) Let $u_1 := 1$. For all $n \geq 1$ we define u_{n+1} inductively by the formula

$$u_{n+1} := \frac{1}{n} e^{-u_n} .$$

1. Show that for all n, $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$.
2. Deduce an equivalent of u_n.
3. Determine the nature of the series with general term u_n.
4. Determine the nature of the series with general term $\frac{u_n}{n}$.
5. Determine the nature of the series with general term $(-1)^n u_n$.

Exercise 6. (4 points) Comparing with an integral, give an equivalent of $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2$.

(Hint : a primitive of $x \mapsto (\ln x)^2$ is $x \mapsto x(2 - 2\ln x + (\ln x)^2)$.)

Corrigé

Exercice 1.

1. Pour $n \geq 0$, on pose $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$. Par définition, la série $(\sum_{n\geq 0} a_n)$ converge si la suite de nombres réels $(S_n)_{n\geq 0}$ converge.
2. Comme on a $a_n \geq 0$ pour tout entier n, la suite $S_n := \sum_{n\geq 0} a_k$ est non décroissante. Donc la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si elle est bornée et dans ce cas la limite coïncide avec $\sup_n S_n$. Montrons qu'elle est bornée. Posons $S'_n = \sum_{n\geq 0} b_k$. La suite $(S'_n)_{n\geq 0}$ est encore non décroissante. Par hypothèse, $(S'_n)_{n\geq 0}$ converge et, comme tous les termes sont positifs, pour tout n on a
$$S_n \;\leq\; S'_n \;.$$
Cela entraine que $\sup_n S_n \leq \sup_n S'_n$, comme $\sup_n S'_n < +\infty$, nous venons de démontrer que S_n est bornée. Donc $(\sum_n a_n)$ est convergente.

Exercice 2.

Dire si les séries suivantes sont convergentes et, dans l'affirmative, calculer leur somme :

1. Le terme $\ln(\frac{32}{13}\pi)$ est juste une constante. Donc $\left(\sum_{n\geq 3} \frac{\ln(\frac{32}{13}\pi)}{3^{n-2}}\right)$ converge si, et seulement si, $\left(\sum_{n\geq 3} \frac{1}{3^{n-2}}\right)$ converge. Or, on a
$$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{3^{n-2}} \;=\; \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots \;=\; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^n} \;.$$
Maintenant on sait par le cours que la série géométrique $(\sum_{n\geq 0} x^n)$ converge si, et seulement si, on a $|x| < 1$, et que dans ce cas on a $\sum_{n\geq 0} x^n = (1-x)^{-1}$. On a donc
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^n} \;=\; -1 + \sum_{n\geq 0} (1/3)^n \;=\; -1 + \frac{1}{1-(1/3)} \;=\; 1/2 \;.$$
Conclusion :
$$\sum_{n\geq 3} \frac{\ln(\frac{32}{13}\pi)}{3^{n-2}} \;=\; \frac{\ln(\frac{32}{13}\pi)}{2} \;. \tag{1}$$
2. Pour montrer la convergence, nous pouvons appliquer la règle de d'Alembert. Les termes de la série étant positifs, on peut éviter les valeurs absolues :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \;=\; \frac{\frac{n+2}{(n+1)!}}{\frac{n+1}{n!}} \;=\; \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \;=\; \frac{n+2}{(n+1)^2} \;=\; \frac{n(1+\frac{2}{n})}{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} \;.$$
On a donc $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ et la série converge. Pour le calcul de la somme on peut séparer les termes comme ci de suite :
$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 2} \frac{n+1}{n!} \;&=\; \sum_{n\geq 2} \frac{n}{n!} + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n!} \;=\; \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} - (1+1) \\ &=\; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} + e - 2 \;=\; \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} - 1 + e - 2 \;=\; 2e - 3 \;. \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. Le terme général $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{n^3 + \ln(n) + 5^n}$ est positif, nous pouvons donc utiliser l'équivalence. On a $2^n+3^n \sim 3^n$ car $\lim_n \frac{2^n+3^n}{3^n} = \lim_n \frac{3^n((\frac{2}{3})^n+1)}{3^n} = 1$. D'autre part on a $n^3+\ln(n)+5^n \sim 5^n$ car $\lim_n \frac{n^3+\ln(n)+5^n}{5^n} = \lim_n \frac{n^3}{5^n} + \frac{\ln(n)}{5^n} + 1 = 1$. Donc on a
$$u_n \sim \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$
Comme $3/5 < 1$, la série $(\sum_n (3/5)^n)$ converge et par équivalence $(\sum u_n)$ aussi.
2. Pour montrer la convergence, nous pouvons appliquer la règle de Cauchy. Les termes de la série étant positifs, on peut éviter les valeurs absolues :
$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{n}}{e} = \frac{1}{e}\,.$$
Pour la dernière égalité on peut remarquer que $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$ et que $\lim_n \frac{\ln(n)}{n} = 0$ de sorte que $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$. Maintenant, comme $1/e < 1$, le critère de Cauchy entraine la convergence de la série $(\sum_n n/e^n)$.
3. Le terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$ a des signes alternés. Son module $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ tend vers zéro. Il est de plus décroissant car
$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n} \implies \sqrt{n+1}+1 > \sqrt{n}+1 \implies \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} < \frac{1}{\sqrt{n}+1}\,.$$
Le critère des signes alternés de Leibnitz s'applique et montre que la série est convergente.
4. Le critère de Cauchy ne permet pas de conclure car $\sqrt[n]{u_n} = 1 - \frac{3}{n^2}$ tend vers 1. On va démontrer en effet que $\lim_n u_n = 1$ ce qui entraine que la série $(\sum u_n)$ est divergente. Pour tout n on a $u_n > 0$, on peut donc écrire
$$u_n = e^{\ln(u_n)} = e^{\ln\left(\left(1-\frac{3}{n^2}\right)^n\right)} = e^{n\cdot\ln(1-\frac{3}{n^2})}$$
Maintenant $n \cdot \ln(1-\frac{3}{n^2}) \sim n \cdot (-\frac{3}{n^2})$ et on a donc $\lim_n n \cdot \ln(1-\frac{3}{n^2}) = 0$ ce qui entraine $\lim_n u_n = \lim_n e^{n\cdot\ln(1-\frac{3}{n^2})} = 1$.
5. Le critère de la racine donne
$$\sqrt[n]{u_n} = \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2\cdot\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)}$$
et $n^2 \cdot \ln\left(1-\frac{2}{n}\right) \sim n^2 \cdot (-\frac{2}{n}) \to -\infty$. On a donc $\lim_n \sqrt[n]{u_n} = \lim_n e^{n^2\cdot\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)} = 0$. Le critère de Cauchy entraine alors que $\sum_n u_n$ est convergente.
6. Le terme général $u_n = (-1)^n \sin(1/n)\sqrt{n}$ a des signes alternés. Son module tend vers zéro car $|u_n| = \sin(1/n)\sqrt{n} \sim \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Pour vérifier la décroissance de la suite $n \mapsto |u_n|$ (éventuellement à partir d'un certain rang) nous considérons la fonction $f(x) := \sin(1/x)\sqrt{x}$. On a
$$f'(x) = \cos(1/x) \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot \sqrt{x} + \sin(1/x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
Pour $x > 0$, on a $\sin(1/x) < 1/x$; et quand x est très grand on a $\cos(1/x) > 1/2$. Cela entraine que pour x très grand
$$f'(x) < \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x^{3/2}} + \frac{1}{2x^{3/2}} = 0$$

Plus précisément, on peut trouver $M > 0$ tel que pour tout $x > M$ on ait $f'(x) < 0$. Si $n > M$, la suite $|u_n|$ est alors décroissante et le critère de Leibnitz entraine la convergence de la série $(\sum_n u_n)$.

Exercice 4. Pour tout $a > 0$ posons $u_n := \frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+a^n}$.
Le terme général u_n est positif et on peut utiliser l'équivalence et la comparaison avec une autre série.
Pour $a = 1$ nous avons $\lim_n \frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+1} = 1$, donc la série de terme général $\frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+1}$ diverge.
Si $0 < a \leq 1$, alors

$$u_n = \frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + a^n} \geq \frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + 1}$$

et comme on vient de voir que la série de terme général $\frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+1}$ diverge, cela montre que $(\sum_n u_n)$ diverge aussi par comparaison.
Supposons maintenant $a > 1$. Dans ce cas, on a $2^{\sqrt{n}} + a^n \sim a^n$. En effet on a

$$\frac{2^{\sqrt{n}} + a^n}{a^n} = 1 + \frac{2^{\sqrt{n}}}{a^n} = 1 + \frac{e^{\sqrt{n}\ln(2)}}{e^{n\ln(a)}} = 1 + e^{\sqrt{n}\ln(2)-n\ln(a)}$$

et comme $a > 1$ on a $\ln(a) > 0$ et donc $\lim_n(\sqrt{n}\ln(2) - n\ln(a)) = \lim_n \sqrt{n} \cdot (\ln(2) - \sqrt{n}\ln(a)) = -\infty$ ce qui entraine $\lim_n \frac{2^{\sqrt{n}}+a^n}{a^n} = 1$. On a donc montré que

$$u_n \sim \frac{2^{\sqrt{n}}}{a^n} . \tag{2}$$

On peut maintenant appliquer le critère de Cauchy

$$\sqrt[n]{\frac{2^{\sqrt{n}}}{a^n}} = \frac{2^{\frac{\sqrt{n}}{n}}}{a} = \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{a} \to \frac{1}{a} < 1 .$$

Le critère de Cauchy nous dit que, si $a > 1$, la série de terme général $\frac{2^{\sqrt{n}}}{a^n}$ converge et, par équivalence, cela entraine que la série de terme général u_n converge aussi quand $a > 1$.

Conclusion : on a divergence pour $0 < a \leq 1$ et convergence pour $a > 1$.

Exercice 5. Posons $u_1 := 1$. Pour tout $n \geq 1$ on définit par récurrence u_{n+1} par la formule

$$u_{n+1} := \frac{1}{n}e^{-u_n} .$$

1. Pour $n = 1$, on a $u_2 = 1/e$ et l'encadrement $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$ est vrai. Supposons par récurrence que $0 < u_{n+1} \leq 1/n$. C'est à dire $0 < u_n \leq \frac{1}{n-1}$. En particulier, $-u_n < 0$ et, comme la fonction e^x est strictement croissante et positive, on a $0 < e^{-u_n} < e^0 = 1$. En divisant par n chaque terme, l'encadrement reste vrai. Donc $0 < e^{-u_n}/n = u_{n+1} < 1/n$, comme souhaité. Par récurrence l'encadrement est vraie pour tout n.
2. Par le théorème des gendarmes, l'encadrement du point précédent montre que $\lim_n u_n = 0$. Donc $\lim_n e^{-u_n} = 1$. Par conséquence

$$\lim_n \frac{e^{-u_n}/n}{1/n} = \lim_n e^{-u_n} = 1 .$$

   Cela montre que u_{n+1} est équivalent à $1/n$ qui est équivalent à $1/(n+1)$. Donc $u_n \sim 1/n$.
3. Comme les deux séries $\sum u_n$ et $\sum 1/n$ sont à termes positifs, on peut utiliser l'équivalence. Il en suit que $\sum u_n$ diverge car $\sum 1/n$ diverge.

4. Comme $u_n \sim 1/n$, alors $u_n/n \sim 1/n^2$. Les termes généraux u_n/n et $1/n^2$ sont encore positifs et on peut encore utiliser l'équivalence. Donc $\sum u_n/n$ converge car $\sum 1/n^2$ converge.
5. Puisque $u_n > 0$ pour tout n, le terme général $(-1)^n u_n$ est à signes alternés. Il ne suffit pas de savoir que u_n est équivalent à $1/n$ pour déduire la convergence de la série $\sum(-1)^n u_n$, ni la décroissance de la suite u_n.

   Nous allons utiliser un DL. Sachant que u_n tends vers 0 on peut utiliser le DL de e^x en 0 : $e^x = 1 + x + \sigma(x)$, où $\sigma(x)$ est une fonction qui vérifie $\lim_{x\to 0} \frac{\sigma(x)}{x} = 0$. On trouve

$$(-1)^{n+1}u_{n+1} \;=\; (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot(1-u_n+\sigma(u_n)) \;=\; -\frac{(-1)^n}{n} + (-1)^n\frac{u_n}{n} + \frac{\sigma(u_n)}{n}$$

   Remarquons que cela est une <u>égalité</u> et non pas une approximation/équivalence. La fonction σ est inconnue, mais on arrive à en gérer la convergence (voir (c) ci plus bas).

   Maintenant :

   (a) La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère de Leibnitz.

   (b) La série de terme général $\frac{(-1)^n u_n}{n}$ converge absolument car son module est u_n/n qui est équivalent à $1/n^2$ (comme expliqué au point 4).

   (c) La série de terme général $\sigma(u_n)/n$ converge absolument. [1] Plus précisément, nous allons démontrer maintenant qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $|\sigma(u_n)/n| \leq 1/n^2$. Par comparaison, cela va entrainer la convergence absolue de $\sum \sigma(u_n)/n$.

   En effet, l'inégalité $|\sigma(u_n)/n| \leq 1/n^2$ équivaut à $n^2|\sigma(u_n)/n| \leq 1$. Or, nous savons que $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma(x)}{x} = 0$ et cela entraine que $\lim_n |\sigma(u_n)/u_n| = 0$. Par ailleurs, nous savons que $u_n \sim \frac{1}{n}$ et donc $n|u_n| \to 1$ et donc

$$\lim_n \left(n^2\cdot\left|\frac{\sigma(u_n)}{n}\right|\right) \;=\; \lim_n n\cdot|\sigma(u_n)| \;=\; \lim_n \frac{|\sigma(u_n)|}{|u_n|}\cdot n\cdot|u_n| \;=\; 0$$

   In existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $n^2\cdot\left|\frac{\sigma(u_n)}{n}\right| \leq 1$.

   Comme expliqué, cela entraine que $\sum \sigma(u_n)/n$ converge absolument.

   Une somme de séries convergentes étant convergente, on déduit des points (a), (b) et (c) que $\sum(-1)^n u_n$ est convergente.

Exercice 6. La suite $(\ln(k))^2$ n'est pas décroissante, on ne peut donc pas appliquer le théorème du cours. Elle est quand même croissante (pour $k \geq 1$), et cela permet d'imiter la preuve donnée en cours pour trouver un équivalent. Soient

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x)^2\,, \\ F(x) &= x(2-2\ln(x)+(\ln(x))^2)\,, \\ S_n &= \sum_{k=1}^{n}\ln(k)^2\,. \end{aligned}$$

On a $F' = f$ et $\int_1^X f(x)dx = F(X) - F(1) = F(X) - 2$.
Maintenant pour tout $k \geq 1$ on a

$$f(k) \;\leq\; \int_k^{k+1} f(t)dt \;\leq\; f(k+1)\,.$$

1. La stratégie exposée au point (c) est la méthode standard du processus d'utilisation des DL, modulo le fait de considérer le DL d'un ordre suffisamment grand.

Donc
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \ \leq \ \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)dt \ \leq \ \sum_{k=1}^{n} f(k+1) \ ,$$
c'est-à-dire
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \ \leq \ \int_{1}^{n+1} f(t)dt \ \leq \ \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \ .$$
Or on a $\int_1^{n+1} f(t)dt = F(n+1) - 2$. L'inégalité précédente s'écrit alors comme
$$S_n \ \leq \ F(n+1) - 2 \ \leq \ S_{n+1} - f(1) = S_{n+1} \ .$$
dont on déduit que pour tout $n \geq 2$ on a
$$F(n) - 2 \ \leq \ S_n \ \leq \ F(n+1) - 2 \ .$$
Or on a $F(x) \sim x(\ln x)^2$, donc la suite $F(n)$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. On a alors $F(n)-2 \sim F(n)$, et de même on a $F(n+1) - 2 \sim F(n+1)$.
Par ailleurs, on a
$$\frac{F(n+1)}{F(n)} \ = \ \frac{(n+1)(2 - 2\ln(n+1) + (\ln(n+1))^2)}{n(2 - 2\ln(n) + (\ln(n))^2)} \ \sim \ \frac{(n+1)(\ln(n+1))^2}{n(\ln n)^2} \to 1,$$
donc $F(n) \sim F(n+1)$. Par encadrement on a alors $S_n \sim F(n)$, et par conséquent
$$S_n \sim n(\ln n)^2.$$