Chapitre 6 : Notion d'intégrale de Riemann

1 Uniforme continuité

On appelle *intervalle compact* de $\mathbb{R}$ un intervalle fermé et borné du type $[a,b]$ avec $a \leq b$ deux réels. Le mot « compact » fait référence à la propriété de Bolzano-Weierstrass vue au premier chapitre. Dans ce chapitre, nous allons utiliser cette propriété topologique de compacité pour obtenir de la continuité uniforme.

Définition 6.1

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est **uniformément continue sur** I si

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ \exists \delta > 0 \ , \ \ \forall x,y \in I \ , \ \ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \ .$$

! Attention de ne pas confondre l'uniforme continuité avec la continuité tout court. Cette dernière s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ \forall x \in I \ , \ \ \exists \delta > 0 \ , \ \ \forall y \in I \ , \ \ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \ .$$

Donc pour la continuité, la marge δ ne donnant pas une erreur plus grande que ε pour les images peut dépendre de x. Ce n'est pas le cas quand on demande que la continuité soit uniforme. Une fonction uniformément continue est donc forcément continue, mais la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est continue sans être uniformément continue.

Le théorème suivant est attribué à Eduard Heine (1821-1881, Allemagne).

Théorème 6.2

Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors f est aussi uniformément continue.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde et supposons que f soit continue mais pas uniformément continue. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout n, il existe x_n et y_n avec $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ mais $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Par compacité, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de la suite (x_n) qui converge vers une limite $\ell \in [a,b]$. Par continuité, on a $f(x_{\varphi(n)})$ qui tend vers $f(\ell)$. Mais on a aussi $y_{\varphi(n)}$ qui tend vers ℓ donc $f(y_{\varphi(n)})$ tend aussi vers $f(\ell)$. Mais alors en passant à la limite dans $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon$, on aurait $0 \geq \varepsilon$ ce qui est absurde. Donc f est forcément uniformément continue. $\square$

2 Définition de l'intégrale de Riemann

Nous allons définir l'intégrale d'une fonction comme l'aire entre l'axe horizontal et sa courbe comptée algébriquement (positivement si la courbe est au-dessus de l'axe et négativement en-dessous). Le problème revient à définir proprement ce qu'est une aire d'une forme géométrique. Par définition, on peut supposer que l'aire des rectangles vaut longueur fois largeur. Puis par découpages et recollages, on peut définir l'aire des triangles et de tout polygone. Comment faire dans le cas d'une courbe ? Nous allons essayer d'encadrer la courbe avec des aires de polygones et voir si on peut obtenir une aire limite en faisant en encadrement de plus en plus précis. C'est déjà ainsi que les anciens ont calculé l'aire du disque et donc π : Archimède (IIIème siècle avant J.C., Syracuse) donne $\pi \simeq 3{,}14$ par des polygones à 96 côtés, Liu Hui (IIIème siècle après J.C., Chine) trouve une méthode itérative plus rapide et avec aussi 96 côtés donne $\pi \simeq 3{,}1416$. Deux siècles plus tard, Zu Chongzhi reprend l'algorithme pour obtenir π au millionième près avec l'équivalent d'un polygone a 12 288 côtés.

L'histoire de l'intégration d'un point de vue plus analyste remonte à Bonaventura Cavalieri (1598-1647, Italie) puis à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716, Allemagne). Bernhard Riemann (1826-1866, Allemagne) est un des premiers à formaliser proprement la théorie. Il existe plusieurs façons de définir et construire l'intégrale de Riemann. Elles sont toutes grosso-modo équivalentes. Nous allons voir ici une présentation allégée proche de celle de Gaston Darboux (1842-1917, France).

Définition 6.3

Soit $I = [a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Une fonction f est dite **en escalier** ou **constante par morceaux** sur I s'il existe un nombre fini de points $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_p = b$ tels que f est constante sur chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$. Les points x_i forment une *subdivision* de I.

Pour les fonctions en escalier, le calcul de l'aire sous la courbe est réduit à une addition ou soustraction d'aires de rectangles. On peut donc la définir sans aucun souci.

ht

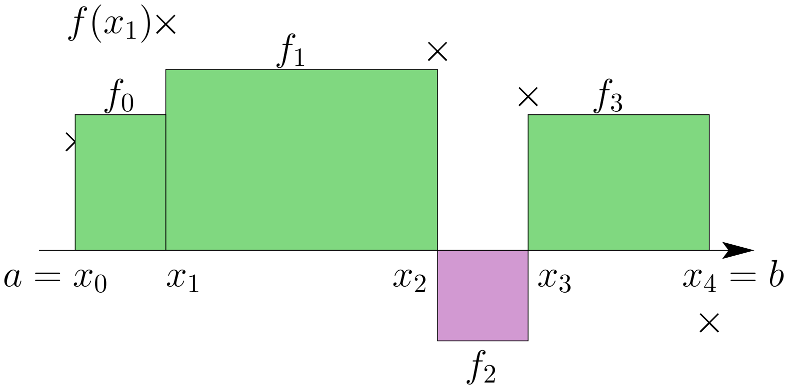


FIGURE 6.1 – *Un exemple de fonction en escalier. On notera qu'il n'y a pas de contrainte sur les valeurs aux points x_i, qui peuvent être différentes des valeurs des « marches » de l'escalier. L'intégrale sous la courbe est obtenue naturellement par la formule d'aire des rectangles.*

Définition 6.4

Soit f une fonction en escalier sur un intervalle $[a,b]$ qui est constante égale à f_i sur chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$ d'une subdivision $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_p = b$. Alors on appelle **intégrale de f sur** $[a,b]$ le nombre

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;=\; \sum_{i=0}^{p-1}(x_{i+1} - x_i) \times f_i \;.$$

Par exemple, on a que

$$\int_0^3 E(x)\mathrm{d}x \;=\; (1-0) \times 0 + (2-1) \times 1 + (3-2) \times 2 \;=\; 3 \;.$$

Pour définir l'intégrale dans un cas plus complexe, nous allons introduire des fonctions en escalier encadrant la valeur de l'intégrale.

Définition 6.5

Soit $[a,b]$ une intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **intégrable au sens de Riemann** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\underline{f_\varepsilon}$ et $\overline{f_\varepsilon}$ telles que

$$\forall x \in [a,b] \;,\;\; \underline{f_\varepsilon}(x) \leq f(x) \leq \overline{f_\varepsilon}(x)$$

et

$$\left| \int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \overline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x \right| \;\leq\; \varepsilon \;.$$

Ueber den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

4.

Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voraufzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x)\,dx$ zu verstehen?

Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen a und b der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ an und bezeichnen der Kürze wegen $x_1 - a$ durch δ_1, $x_2 - x_1$ durch $\delta_2, \ldots, b - x_{n-1}$ durch δ_n und durch ε einen positiven ächten Bruch. Es wird alsdann der Werth der Summe

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

von der Wahl der Intervalle δ und der Grössen ε abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und ε gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int_a^b f(x)\,dx$.

Le papier original de Riemann de 1867 (posthume mais présentant des travaux de 1854). Son but principal est de commenter les écrits de Joseph Fourier. Il a déjà écrit une quinzaine d'intégrales dans l'article en question, quand il pose soudainement la question « Qu'entend-on par $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$? ». Cela fait pourtant 250 ans que les gens écrivent pour des intégrales !

Le point clef de la théorie est de montrer que cette approximation par des fonctions en escalier est robuste : si la fonction est intégrable, peu importe la façon dont on fait l'approximation, on obtient toujours la même valeur de l'intégrale à la limite.

Proposition 6.6

Si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$, alors pour tout choix des familles de fonctions $(\underline{f_\varepsilon})$ et $(\overline{f_\varepsilon})$, on a existence et égalités des limites

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \overline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x \;.$$

En outre, cette limite est indépendante du choix des familles de fonctions en escalier. Cette limite est appelée *intégrale de f sur $[a,b]$ au sens de Riemann* et est notée

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;.$$

Démonstration : On ne va pas détailler la preuve complète, mais l'argument principal est le suivant. On considère $\underline{f_\varepsilon}$ et $\underline{f_{\varepsilon'}}$ deux fonctions en escalier sous f. On a forcément $\underline{f_{\varepsilon'}} \leq f \leq \overline{f_\varepsilon}$ et donc

$$\begin{aligned}\int_a^b \underline{f_{\varepsilon'}}(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x \;&=\; \int_a^b \underline{f_{\varepsilon'}}(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \overline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_a^b \overline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x \;\leq\; \varepsilon \;.\end{aligned}$$

Mais avec l'argument symétrique, on a

$$\int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f_{\varepsilon'}}(x)\mathrm{d}x \;\leq\; \varepsilon' \;.$$

Donc

$$\left| \int_a^b \underline{f_\varepsilon}(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \underline{f_{\varepsilon'}}(x)\mathrm{d}x \right| \;\leq\; \max(\varepsilon,\varepsilon') \;.$$

Ceci montre par exemple que les familles d'intégrales des fonctions en escalier vérifie le critère de Cauchy et donc converge. En prenant deux fonctions qui marchent pour le même ε, c'est aussi ainsi que l'on voit que l'écart entre les deux valeurs obtenues pour approcher l'intégrale devient négligeable. □

Exemple :

On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon. Une fonction constante par morceaux sous f sera forcément négative et une fonction constante par morceaux au-dessus de f sera forcément plus grande que 1. L'écart entre les intégrales sera donc au moins 1 et f n'est pas intégrable au sens de Riemann : ce n'est pas la bonne méthode pour donner un sens à l'intégrale de cette fonction.

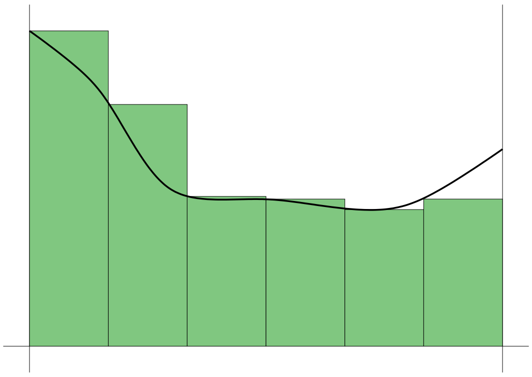
Après avoir vu un contre-exemple, voyons notre principal exemple qui marche : les fonctions continues.

Théorème 6.7

Soit $[a,b]$ un intervalle compact et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue. Alors f est intégrable au sens de Riemann. En outre, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ .$$

La dernière partie montre que l'intégrale peut s'approcher par la méthode des rectangles à gauche en pratiquant une subdivision régulière.



On découpe $[a,b]$ en n intervalles de largeur $\frac{b-a}{n}$. La somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big)$$

est appelée **somme de Riemann** et correspond à l'aire des rectangles verts dont la hauteur est prise comme la valeur de f à gauche de l'intervalle.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Divisons $[a,b]$ en n intervalles, posons $h = (b-a)/n$ le pas de la subdivision et notons $x_i = a + i \times h$ la subdivision avec $i = 0,\ldots,n$. On définit $\underline{f}$ et $\overline{f}$ comme des fonctions en escaliers qui sont constantes sur chaque $[x_i,x_{i+1}[$ et vérifient

$$\forall x \in [x_i,x_{i+1}[\ , \ \ \underline{f}(x) = \min_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]} f(\xi) \quad \text{et} \quad \overline{f}(x) = \max_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]} f(\xi) \ .$$

On rappelle que les minimums et maximums sont bien définis car f est continue sur $[x_i,x_{i+1}]$. On décide aussi que $\underline{f}(b) = \overline{f}(b) = f(b)$. Par construction, $\underline{f}$ et $\overline{f}$ sont bien des fonctions continues par morceaux qui encadrent f. Par ailleurs, leur différence est au pire de l'écart entre $f(x)$ et $f(y)$ pour x et y dans le même intervalle $[x_i,x_{i+1}]$. Par continuité uniforme, on peut trouver h assez petit tel que cet écart est plus petit que $\varepsilon/(b-a)$. On a alors que

$$\left|\int_a^b \underline{f}(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \overline{f}(x)\mathrm{d}x\right| \le \sum (x_{i+1} - x_i)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon \ .$$

Ceci montre que f est bien Riemann-intégrable. La convergence de la somme de Riemann découle simplement du fait que cette somme est encadrée par les deux intégrales de $\underline{f}$ et $\overline{f}$. $\square$

Exemples :

- La fonction $x \mapsto e^x$ est donc intégrable au sens de Riemann sur [0,1]. En utilisant la formule $\sum_{k=0}^{n-1} a^n = \frac{1-a^n}{1-a}$ pour $a = e^{1/n} \neq 1$, on obtient en outre que, quand $n \to +\infty$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{\frac{k}{n}} \ = \ \frac{1}{n} . \frac{1-e}{1-e^{1/n}} \ = \ \frac{1-e}{n(1-1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} \ = \ \frac{e-1}{1+o(1)} \ .$$

Donc, on faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x = e - 1 \ .$$

- La fonction $x \mapsto x + 1$ est continue donc intégrable au sens de Riemann sur [0,1]. En outre,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} (\frac{k}{n} + 1) = 1 + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = 1 + \frac{1}{n^2} \times \frac{(n-1)n}{2} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

où on a utilisé la formule $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ que l'on peut démontrer par récurrence. On note que le résultat obtenu pour l'aire sous la courbe de $x \mapsto x + 1$ est bien cohérent avec la formule d'aire d'un trapèze de hauteur 1 et de petite et grande bases 1 et 2.

Faisons un petit point sur les notations. La convergence

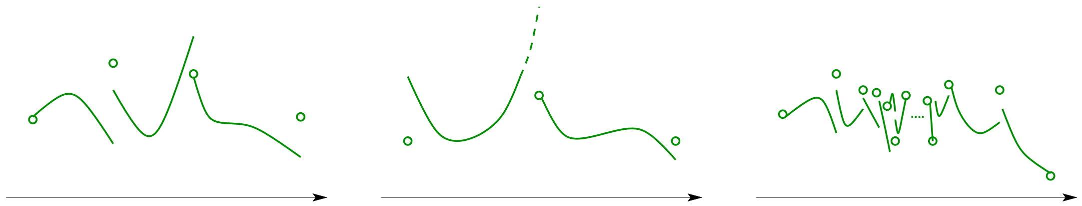
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \ .$$

donne une correspondance entre les éléments de la somme de Riemann (méthode des rectangles) et l'écriture intégrale. On peut commencer par remarquer que le symbole $\int$ est un « $\mathcal{S}$ » allongé. Il a été introduit par Leibniz et fait donc bien référence à l'intégrale comme une sorte de somme. L'autre point à remarquer, c'est que l'élément d'intégration dx correspond à la limite de la petite distance $h = \frac{b-a}{n}$ (symbole qu'on retrouve logiquement dans la dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ par passage à la limite de la pente de la corde). C'est donc un élément qui fait partie de la somme de l'intégrale et non un symbole servant juste à fermer l'intégrale (ce sera clair au moment des changements de variables).

En recollant plusieurs intervalles où on applique le résultat précédent, on peut généraliser ce théorème aux fonctions continues par morceaux.

Définition 6.8

Soit $I = [a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Une fonction f est dite **continue par morceaux** sur I s'il existe un nombre fini de points $a = x_0 < x_2 < \ldots < x_p = b$ tels que f est continue sur chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$ et que les limites à droite et à gauche de chaque intervalle existent et sont finies. L'ensemble des fonctions continue par morceaux sur $[a,b]$ est noté $\mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$.



une fonction continue par morceaux

une fonction non continue par morceaux car la limite à gauche n'existe pas au point central

une fonction non continue par morceaux car il y a un nombre infini de discontinuités

Théorème 6.9

Soit $[a,b]$ un intervalle compact et $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue par morceaux. Alors f est intégrable au sens de Riemann. En outre, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ .$$

De plus, les valeurs de f aux points de discontinuités ne change pas la valeur de l'intégrale.

Démonstration : Il suffit de recoller les arguments de la démonstration précédente appliquée sur chaque morceau. Pour la convergence de la somme de Riemann, l'argument est aussi le même. Il y a juste le problème des valeurs aux points de discontinuités mais celles-ci sont en nombre fini et leur influence disparaît au fur et à mesure que n tend vers $+\infty$. $\square$

On peut aussi facilement gérer les fonctions à valeurs complexes.

Définition 6.10

Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable au sens de Riemann si ses parties réelle et imaginaire le sont. On pose alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\mathrm{d}x + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\mathrm{d}x \ .$$

Nous allons admettre toutes les propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann, même si elles se démontrent assez facilement en partant de la définition.

Proposition 6.11 (Linéarité)

Soient f et g deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur un segment $[a,b]$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $f + \lambda g$ est intégrable au sens de Riemann et

$$\int_a^b (f+\lambda g)(x)\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \lambda \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \ .$$

Proposition 6.12 (Monotonie)

Soient f et g deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur un segment $[a,b]$ et à valeurs réelles. Si pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(x) \leq g(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;\leq\; \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \ .$$

On note que la valeur en un nombre fini de points n'influence pas la valeur de l'intégrale, donc on peut aussi supposer que $f(x) \leq g(x)$ sauf en un nombre fini de points.

Proposition 6.13 (Relation de Chasles)

Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,c]$ et soit $b \in]a,c[$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x \ .$$

Cette relation nous pousse à prendre comme convention que

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ .$$

Notons que la première convention est aussi cohérente avec la limite $b \to a$.

Proposition 6.14 (Inégalité triangulaire)

Soit f une fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \ .$$

Proposition 6.15 (Stricte positivité)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+)$ une fonction continue et positive. Alors s'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, on a

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \; > \; 0 \; .$$

En conséquent, si f est positive continue et d'intégrale nulle sur $[a,b]$, alors f est identiquement nulle sur $[a,b]$.

3 Lien avec la dérivation

Ce qui est appelé pompeusement « théorème fondamental de l'analyse » est le lien a priori inattendu entre l'intégration et la dérivation.

Théorème 6.16

Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{C})$ un fonction continue par morceaux. Alors

$$\xi \in [a,b] \;\longmapsto\; \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$

est une fonction continue de x.
Si en outre $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ est de plus continue sur $[a,b]$ alors

$$\xi \in [a,b] \;\longmapsto\; \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$

est une fonction dérivable et sa dérivée vaut

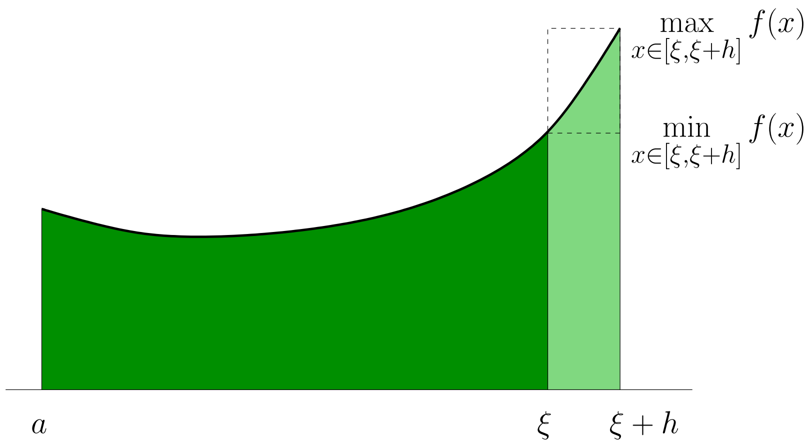
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x = f(\xi) \; .$$

En conséquence, $\xi \in [a,b] \longmapsto \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$ est l'unique primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a.

Démonstration : Par la relation de Chasles, on a

$$\int_a^{\xi+h} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x = \int_\xi^{\xi+h} f(x)\mathrm{d}x \; .$$

Si f est continue par morceaux, alors elle est bornée et l'aire sous la courbe entre ξ et $\xi+h$ est bornée par un rectangle de largeur h et de hauteur constante. Donc quand h tend vers 0, on obtient bien la continuité de l'intégrale par rapport à sa borne.



Affinons les choses en supposant que f est continue. Par monotonie de l'intégrale, on a

$$h \min_{x\in[\xi,\xi+h]} f(x) \;\leq\; \int_{\xi}^{\xi+h} f(x)\mathrm{d}x \;\leq\; h \max_{x\in[\xi,\xi+h]} f(x) \;.$$

Or, par continuité, $\min_{x\in[\xi,\xi+h]} f(x)$ comme $\max_{x\in[\xi,\xi+h]} f(x)$ tendent vers $f(\xi)$ quand h tend vers 0. On obtient donc par encadrement que

$$\frac{1}{h}\left(\int_a^{\xi+h} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right) \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} f(\xi)$$

ce qui donne par définition la dérivée recherchée. La dernière assertion vient de l'unicité de la primitive modulo les constantes. □

Le théorème montre aussi que toute fonction continue admet une primitive (et donc une infinité en y ajoutant une constante). Si la fonction f est seulement continue par morceaux, on peut obtenir une sorte de primitive mais qui ne sera dérivable qu'à droite et à gauche aux points de discontinuité de f.

Corollaire 6.17

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue et soit $F \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ une primitive de f sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \;=\; F(b) - F(a) \;:= [F(x)]_a^b\,.$$

Démonstration : On pose $\tilde{F}(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x$. On sait que $F = \tilde{F} + C$ avec C une constante. On a alors

$$F(b) - F(a) = (\tilde{F}(b) + C) - (\tilde{F}(a) + C) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - 0\;.$$

□