Chapitre 3 : Fonctions réelles

1 Notions de base

Soient E et F deux ensembles. Une *fonction* f de E dans F est définie par l'association à tout élément x de E d'un élément $y = f(x)$ de F. On peut donc la définir par la donnée des couples associés $(x,y) \in E \times F$ avec la règle que pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x,y) \in E \times F$ dans cette liste. L'ensemble

$$\mathcal{G}_f = \{(x,y) \in E \times F \ , \ y = f(x)\} \ \subset \ E \times F$$

est appelé *graphe* de f. Toute fonction est donc équivalente à la donnée d'un ensemble $\mathcal{G}_f \subset E \times F$ tel que pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $(x,y) \in \mathcal{G}_f$ et tel que si (x,y) et (x,y') sont dans $\mathcal{G}_f$, alors $y = y'$.

Nous allons travailler avec des fonctions réelles, c'est-à-dire que E et F seront des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Une fonction f réelle est donc définie par la donnée d'un ensemble $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ appelé *domaine de définition de* f et la donnée pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ d'une unique image $y \in \mathbb{R}$. Le graphe de f est un ensemble de $\mathcal{D}_f \times \mathbb{R}$ et donc un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ tel qu'il y a au plus un élément par ligne verticale $\{x\} \times \mathbb{R}$. La notation complète pour f sera du type

$$f \ : \ x \in \mathcal{D}_f \ \longmapsto f(x) \in \mathbb{R} \qquad \text{ou} \qquad f \ : \ \begin{pmatrix} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix} .$$

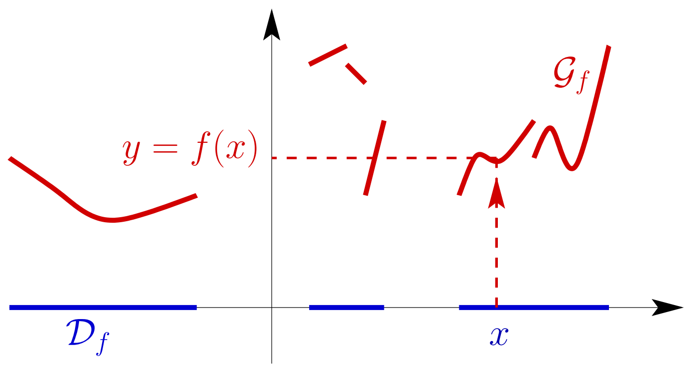


Figure 3.1 – *Le graphe $\mathcal{G}_f$ d'une fonction réelle est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ définissant la fonction. À tout point x de $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, on associe l'unique point $y = f(x)$ tel que (x,y) soit dans $\mathcal{G}_f$.*

Dans certains cours, il est fait une différence entre « fonction » et « application » suivant que l'on ne regarde la fonction que sur $\mathcal{D}_f$ ou sur $\mathbb{R}$ en autorisant un x à ne pas avoir d'image. Nous ne ferons pas cette distinction ici.

! Pour clarifier au maximum les raisonnements, on essayera au mieux de bien distinguer la fonction f de l'image $f(x)$ du point x. Par exemple, il est formellement incorrect de parler de « la fonction x^2 ». Il faudrait dire « la fonction $x \mapsto x^2$ ». On voit bien que la notation x^2 sous-entend qu'un certain x est déjà connu alors que dans la notation $x \mapsto x^2$, x est une variable muette et $t \mapsto t^2$ ou $\theta \mapsto \theta^2$ désigneraient la même fonction.

Exemples :

- f est donnée par n'importe quel procédé définissant une unique image pour x. Par exemple, $f(x)$ peut être un température au temps x en degrés Celsius, une altitude en fonction de la distance x, un nombre tiré au hasard par un jet de dé à chaque rationnel…

- l'image $f(x)$ est donnée par un calcul exact à partir de x, par exemple f est définie par $f(x) = x/(1+x^2)$.

- l'image $f(x)$ est associée à x par une certaine construction ou un algorithme de calcul. C'est le cas des fonctions usuelles comme la racine carrée, les sinus et cosinus etc. Par exemple la racine carrée est définie par $\mathcal{D}_f = [0,+\infty[$ et $y = \sqrt{x}$ est l'unique nombre positif tel que $y^2 = x$. On sait même calculer y avec une précision aussi bonne que voulue par la méthode de Héron. Mais $y = \sqrt{x}$ ne correspond pas à un calcul exact. Plusieurs fonctions de ce type sont utiles. On leur donne donc un nom et une notation et on a des moyens de calculer leur valeur de façon approchée. On les appelle *fonctions usuelles*, dont la liste peut dépendre des utilisation de chacun. Des rappels sur les fonctions usuelles de ce cours seront faits au chapitre suivant.

- l'image $f(x)$ est donnée par une formule combinant les opérations standards et les fonctions usuelles, comme $f(x) = \frac{1}{x^2}\ln(\cos x)$. Dans ce cas, on sous-entendra en général que le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est le plus grand domaine pour lequel la formule a un sens. Il faudra donc chercher les problèmes, ce qui nous amènera aux questions :

  - si on divise par quelque chose, quand est-ce que ce quelque chose est nul ?
  - si on écrit $\sqrt{\text{truc}}$, est-ce que ce truc est bien positif ou nul ?
  - si on écrit $\ln(\text{machin})$, est-ce que ce machin est strictement positif ?

  En excluant toutes les situations problématiques, on obtient le domaine de définition de la formule et donc de f.

- l'image $f(x)$ est associée à x en recollant plusieurs formules ou constructions. On commence donc par l'instruction « si x est dans l'ensemble [...] alors [...], sinon, si x est dans… ».

- on a déjà vu l'exemple d'une suite (u_n) qui est une fonction définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}$ par $f : n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) = u_n$.
- si $A \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble de réels, on appelle *fonction caractéristique de* A la fonction χ_A définie sur $\mathbb{R}$ par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ sinon (χ étant la lettre grecque chi, il faut prononcer « ki de A »).

Les définitions suivantes sont sans surprise.

Définition 3.1

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $A \subset \mathcal{D}_f$ un sous-ensemble où f est définie. On dit que

- f est **croissante** sur A si $\forall x,y \in A,\ x \leq y \ \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- f est **décroissante** sur A si $\forall x,y \in A,\ x \leq y \ \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- f est **strictement croissante** sur A si $\forall x,y \in A,\ x < y \ \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- f est **strictement décroissante** sur A si $\forall x,y \in A,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- f est **monotone** (resp. strictement monotone) sur A si elle est soit croissante sur A, soit décroissante sur A (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Définition 3.2

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $A \subset \mathcal{D}_f$ un sous-ensemble où f est définie. On dit que

- f est **majorée** sur A s'il existe un majorant $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A,\ f(x) \leq M$.
- f est **minorée** sur A s'il existe un minorant $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A,\ f(x) \geq m$.
- f est **bornée** sur A si elle est majorée et minorée sur A.

Si f est majorée sur A non vide, on appelle **sup de f sur A** le nombre

$$\sup_A f := \sup_{x \in A} f(x) := \sup\{f(x),\, x \in A\} \ .$$

Si f est minorée sur A non vide, on appelle **inf de f sur A** le nombre

$$\inf_A f := \inf_{x \in A} f(x) := \inf\{f(x),\, x \in A\} \ .$$

Définition 3.3

L'**image** de $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est $f(\mathcal{D}_f) = \{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathcal{D}_f,\ y = f(x)\}$. Soit $B \subset \mathbb{R}$, l'**image réciproque** de B par f est $f^{-1}(B) = \{x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \in B\}$.

Définition 3.4

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f admet un **maximum global** (resp. un **minimum global**) en $x_0 \in A$ si $f(x_0)$ majore (resp. minore) f sur $\mathcal{D}_f$.
On dit que f atteint un **maximum local** (resp. un **minimum local**) en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x_0) \geq f(x)$ (resp. $f(x_0) \leq f(x)$) pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap \mathcal{D}_f$.

Définition 3.5

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à 0 (i.e. $\mathcal{D}_f = -\mathcal{D}_f$). On dit que f est **paire** (resp. **impaire**) si $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

Définition 3.6

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **périodique de période** $T > 0$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$.

Définition 3.7

Une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ est

- **injective dans** A si pour tout $x \neq x'$ dans A, $f(x) \neq f(x')$.
- **surjective sur** B si pour tout $y \in B$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.
- **bijective de** A **sur** B si f est injective et surjective.

Si f est bijective, alors la fonction $f^{-1} : B \to A$ qui a $y \in B$ associe $x = f^{-1}(y)$ l'unique $x \in A$ tel que $f(x) = y$ est appelée la **réciproque** de f.

Définition 3.8

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et soit $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}_f$. On appelle **restriction de** f **à** $\mathcal{D}'$ et on note $f_{|\mathcal{D}'}$ la fonction $x \in \mathcal{D}' \longmapsto f(x)$.
Si $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle et $\tilde{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une autre fonction telle que $\mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, alors on dit que $\tilde{f}$ est **un prolongement** ou **une extension** de f à $\mathcal{D}$.

Définition 3.9

Soient $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Si on suppose que l'image de g est incluse dans l'ensemble de définition de f, c'est-à-dire que $g(\mathcal{D}_g) \subset \mathcal{D}_f$, alors on peut définir la **fonction composée** par $f \circ g \;:\; x \in \mathcal{D}_g \longmapsto f(g(x)) \in \mathbb{R}$.

On peut démontrer facilement un grand nombre de résultats découlant de ces définitions. Nous allons nous contenter d'exemples simples pour illustrer.

Proposition 3.10

La composée de fonctions croissantes est croissante.

Démonstration : Soient $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes avec $g(\mathcal{D}_g) \subset \mathcal{D}_f$. Soient x et y dans $\mathcal{D}_g$ avec $x \leq y$. Comme g est croissante, alors $a := g(x) \leq g(y) =: b$. Mais comme $a \leq b$ sont dans $g(\mathcal{D}_g) \subset \mathcal{D}_f$ et que f est croissante, nous avons aussi $f(a) \leq f(b)$. On a bien montré que $f(g(x)) \leq f(g(y))$. □

Attention au piège de la multiplication. À cause du potentiel renversement des inégalités par la multiplication par un nombre négatif, il est faux que le produit de fonctions croissantes est croissant. Par exemple $f : x \mapsto x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f^2 : x \mapsto x.x = x^2$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ en entier (strictement décroissante sur $]-\infty{,}0]$ puis strictement croissante sur $[0,+\infty[$).

Proposition 3.11

La somme de deux fonctions bornées est bornée.

Démonstration : Soient $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées. Par définition, il existe M et M' tels que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \;,\; |f(x)| \leq M \qquad \text{et } \forall x \in \mathcal{D}_g \;,\; |g(x)| \leq M' \;.$$

On pose $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ le domaine sur lequel les deux fonctions sont définies et donc sur lequel la somme a un sens. On a pour tout $x \in \mathcal{D}$

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + M'$$

ce qui montre que $f + g$ est bornée sur $\mathcal{D}$ par $M + M'$. □

2 Limites

La définition de la limite dans le cas des fonctions suit exactement les mêmes principes que dans le cas des suites. Il y a beaucoup de cas différents donc plutôt que de les apprendre tous par cœur, l'important est de comprendre comment ils sont construits. Rappelons que :

- les voisinages d'un point $x \in \mathbb{R}$ sont du type $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$,
- les voisinages de $+\infty$ sont du type $]M, +\infty[$,
- les voisinages de $-\infty$ sont du type $]-\infty, M[$.

On peut retenir le principe général :

La définition de
« *$f(x)$ tend vers $\ell \in [-\infty, +\infty]$ quand x tend vers $\ell' \in [-\infty, +\infty]$* »
s'écrit
« *pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ, il existe un voisinage $\mathcal{V}'$ de ℓ' tel que $f(\mathcal{V}') \subset \mathcal{V}$* »
ce qui peut se comprendre comme
« *si x est suffisamment proche de ℓ', alors $f(x)$ reste aussi proche de ℓ que voulu* ».

On peut ainsi écrire les définitions suivantes.

Définition 3.12 (limites en $+\infty$)

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie près de $+\infty$, c'est-à-dire que pour tout $x_0 > 0$, $[x_0, +\infty[\cap \mathcal{D}_f$ est non vide. Alors

- On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ si
$$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \exists x_0 \in \mathbb{R} \;,\; \forall x \in [x_0, +\infty[\cap \mathcal{D}_f \;,\; |f(x) - \ell| < \varepsilon \;.$$
On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} \ell$.
- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si
$$\forall M \in \mathbb{R} \;,\; \exists x_0 \in \mathbb{R} \;,\; \forall x \in [x_0, +\infty[\cap \mathcal{D}_f \;,\; f(x) \geq M \;.$$
On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} +\infty$.
- On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si
$$\forall M \in \mathbb{R} \;,\; \exists x_0 \in \mathbb{R} \;,\; \forall x \in [x_0, +\infty[\cap \mathcal{D}_f \;,\; f(x) \leq M \;.$$
On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} -\infty$.

Ces définitions sont un peu lourdes pour pouvoir inclure le cas où f n'est pas définie partout, ni même dans un voisinage de $+\infty$. Par exemple, on notera que si f est définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, alors la notion de limite de f en $+\infty$ retombe bien sur la notion de limite pour la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$. C'est naturel puisqu'une suite n'est rien d'autre qu'une fonction définie sur $\mathbb{N}$.

Quand la fonction est définie sur tout $\mathbb{R}$, on peut plus simplement remplacer la partie « $\forall x \in [x_0, +\infty[\cap \mathcal{D}_f$ » par « $\forall x \geq x_0$ ».

De façon symétrique on écrit les limites en $-\infty$. On ne mentionne plus les notations qui sont évidemment celles qu'on imagine.

Définition 3.13 (limites en $-\infty$)

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie près de $-\infty$, c'est-à-dire que pour tout $x_0 < 0$, $]-\infty, x_0] \cap \mathcal{D}_f$ est non vide. Alors

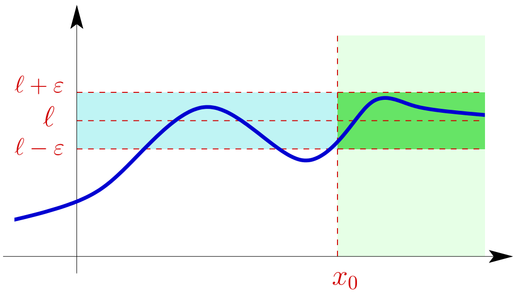
- On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $-\infty$ si
$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists x_0 \in \mathbb{R} \ , \ \forall x \in \,]-\infty, x_0] \cap \mathcal{D}_f \ , \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \ .$$
- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si
$$\forall M \in \mathbb{R} \ , \ \exists x_0 \in \mathbb{R} \ , \ \forall x \in \,]-\infty, x_0] \cap \mathcal{D}_f \ , \ f(x) \geq M \ .$$
- On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si
$$\forall M \in \mathbb{R} \ , \ \exists x_0 \in \mathbb{R} \ , \ \forall x \in \,]-\infty, x_0] \cap \mathcal{D}_f \ , \ f(x) \leq M \ .$$

Une nouveauté par rapport aux suites est qu'on est aussi intéressé par les limites en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Encore une fois, on inclut le cas où f n'est pas forcément définie partout autour du point x_0. C'est particulièrement intéressant ici car cela permet par exemple de regarder des limites en 0 de fonctions définies sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou sur un intervalle du type $]0,1]$.

Définition 3.14 (limites en $x_0 \in \mathbb{R}$)

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie autour de x_0 dans le sens où pour tout $\delta > 0$, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathcal{D}_f$ est non vide. Alors

- On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si
$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \ , \ \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathcal{D}_f \ , \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \ .$$
- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si
$$\forall M \in \mathbb{R} \ , \ \exists \delta > 0 \ , \ \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathcal{D}_f \ , \ f(x) \geq M \ .$$
- On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 si
$$\forall M \in \mathbb{R} \ , \ \exists \delta > 0 \ , \ \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathcal{D}_f \ , \ f(x) \leq M \ .$$



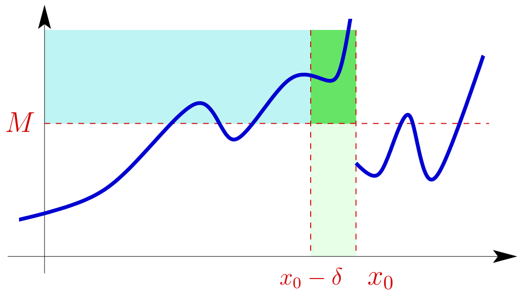


FIGURE 3.2 – *À gauche un exemple où $f(x) \to \ell$ quand $x \to +\infty$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point x_0 à partir duquel, pour $x \geq x_0$, $f(x)$ est toujours dans l'intervalle $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$. À droite un exemple où $f(x) \to +\infty$ quand $x \to x_0^-$: pour tout $M > 0$, il existe un intervalle $]x_0-\delta,x_0[$ tel que pour tout $x \in]x_0-\delta,x_0[$, $f(x)$ est toujours plus grand que M.*

On peut aussi regarder le comportement de $f(x)$ quand x tend vers x_0 par la droite ou par la gauche. Pour éviter de mettre encore 6 cas différents, nous allons nous limiter aux limites finies (sans compter qu'on peut inclure aussi le fait que ℓ est approchée par la droite ou la gauche).

Définition 3.15 (limites à gauche et à droite)

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si f est définie à droite de x_0 dans le sens où pour tout $\delta > 0$, $]x_0,x_0+\delta[\cap\mathcal{D}_f$ est non vide, alors on dit que f vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 à droite si

$$\forall\varepsilon > 0\ ,\ \ \exists\delta > 0\ ,\ \ \forall x \in]x_0,x_0+\delta[\cap\mathcal{D}_f\ ,\ \ |f(x)-\ell| < \varepsilon\ .$$

On note alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow x_0^+]{} \ell$.

Si f est définie à gauche de x_0 dans le sens où pour tout $\delta > 0$, $]x_0-\delta,x_0[\cap\mathcal{D}_f$ est non vide, alors on dit que f vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 à gauche si

$$\forall\varepsilon > 0\ ,\ \ \exists\delta > 0\ ,\ \ \forall x \in]x_0-\delta,x_0[\cap\mathcal{D}_f\ ,\ \ |f(x)-\ell| < \varepsilon\ .$$

On note alors $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow x_0^-]{} \ell$.

Si on regarde par exemple la limite à droite en 0 d'une fonction définie seulement sur $]0,+\infty[$, la définition de la limite à droite coïncide avec la définition de la limite tout court ci-dessus et on ne précisera pas forcément que la limite ne se fait qu'à droite de 0.

Les règles algébriques pour calculer les limites (sommes, produits...) et les propriétés basiques de la convergence (« croissante majorée converge »...) sont mutatis mutandis les mêmes que pour les suites. Il serait trop laborieux d'énoncer tous les cas ici. Un bon exercice est d'en énoncer et d'en démontrer un certain nombre tirés au hasard comme les exemples suivants.

Proposition 3.16

Si f et g sont deux fonctions définies de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow 0^+]{} +\infty \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow[x\longrightarrow 0^+]{} \ell \in \mathbb{R}\ ,$$

alors

$$f(x)+g(x) \xrightarrow[x\longrightarrow 0^+]{} +\infty\ .$$

Démonstration : Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme g tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ à droite de 0, il existe $\delta' > 0$ tel que $|g(x)-\ell| < 1$ pour tout $x \in]0,\delta'[$ et en particulier $g(x) \geq \ell - 1$ sur $]0,\delta'[$. Comme f tend vers $+\infty$ à droite de 0, il existe $\delta'' > 0$ tel que $f(x) \geq M - \ell + 1$ pour tout $x \in]0,\delta''[$. On pose $\delta = \min(\delta',\delta'')$, de telle sorte que nos estimations sont valables sur $]0,\delta[$. On a alors que pour tout $x \in]0,\delta[$, $f(x)+g(x) \geq M-\ell+1+\ell-1 = M$. Ceci montre bien que $f(x)+g(x)$ tend vers $+\infty$ à droite de 0. □

Proposition 3.17

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante et minorée. Alors $f(x)$ converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$.

Démonstration : Comme f est minorée, son image $\{f(x), x \geq 0\}$ est non vide et minorée et admet donc une borne inférieure $\ell := \inf_{x\geq 0} f(x)$. Comme ℓ est un minorant de l'image de f, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\ell + \varepsilon$ n'est plus un minorant de l'image de f, il existe $x_0 \geq 0$ tel que $f(x_0) < \ell + \varepsilon$. Mais comme f est décroissante, on a $f(x) < \ell + \varepsilon$ pour tout $x \geq x_0$. Au total, on a $\ell \leq f(x) < \ell + \varepsilon$ pour tout $x \geq x_0$, ce qui montre que f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$. □

Exemple :

On considère les étirements $y(t)$ d'un ressort de raideur k qui est soumis à un frottement d'intensité γ. La longueur $y(t)$ est solution de l'équation différentielle $my''(t)+\gamma y'(t) = -ky(t)$. Si on considère l'énergie $E(t) = \frac{1}{2}(m|y'(t)|^2 + k|y(t)|^2)$, on a $E'(t) = my'(t)y''(t)+ky(t)y'(t) = -\gamma|y'(t)|^2 \leq 0$. Donc $E(t)$ est décroissante (nous anticipons sur le paragraphe concernant la dérivation) et clairement positive, donc $E(t)$ admet une limite finie positive quand $t \to +\infty$. Ceci est la première étape pour montrer que l'énergie se dissipe jusqu'à ce que le ressort revienne à l'équilibre.

Par rapport aux suites, il y a un cas que l'on peut mettre en avant qui est celui de la composition. Là encore, on n'énonce qu'un seul cas possible mais il y a plusieurs autres situations qui donnent un résultat analogue (limites infinies, limites aux bords gauche ou droit des intervalles…).

Proposition 3.18

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soient $f : J \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $g(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$ et supposons que $g(x) \to y_0 \in J$ quand $x \to x_0$ et que $f(y) \to \ell \in \mathbb{R}$ quand $y \to y_0$. Alors la fonction composée $f \circ g : I \to \mathbb{R}$ est bien définie et $(f \circ g)(x) \to \ell$ quand $x \to x_0$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f(y) \to \ell \in \mathbb{R}$ quand $y \to y_0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $y \in J$ avec $|y - y_0| < \delta$, $|f(y) - \ell| < \varepsilon$. Mais comme $g(x) \to y_0$ quand $x \to x_0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ avec $|x - x_0| < \eta$, $|g(x) - y_0| < \delta$. Donc pour tout $x \in I$ avec $|x - x_0| < \eta$, $y = g(x)$ est tel que $|y - y_0| < \delta$ et donc $|f(y) - \ell| = |f(g(x)) - \ell| < \varepsilon$. $\square$

3 Continuité

3.1 Définitions et propriétés élémentaires

Pour les fonctions réelles, il y a plusieurs façons équivalentes de définir la continuité. On peut donc en choisir une comme définition de base et les autres comme caractérisations équivalentes. Nous allons faire le choix classique de prendre au départ la définition qui est celle qui est la plus facilement généralisable à des espaces plus complexes que $\mathbb{R}$.

Définition 3.19

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que f est **continue en** $x_* \in \mathcal{D}_f$ si on a

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta > 0 \ , \ \forall x \in \mathcal{D}_f \ , \ |x - x_*| < \delta \implies |f(x) - f(x_*)| < \varepsilon \ .$$

On dit que f est **continue sur un ensemble** $E \subset \mathcal{D}_f$ si f est continue en tout point de E.
On note $\mathcal{C}^0(E,F)$ l'ensemble des fonctions continues sur $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $F \subset \mathbb{R}$.

Exemples :

- Là où elles sont définies, les fonctions usuelles sont continues, sauf la partie entière. Donc toute fonction définie par une formule sera continue là où la formule fait sens (sauf dans le cas rare où la partie entière entre en jeu).
- Beaucoup de grandeurs physiques sont en général considérées comme continues, comme la température, la position, la vitesse… Si bien qu'on pourrait penser qu'il n'y a pas à s'embêter avec les fonctions discontinues. Mais dans

beaucoup de modèles, il est intéressant de prendre des fonctions discontinues. Par exemple, si on modélise un circuit électronique dont on allume le courant avec un interrupteur au temps $t = 0$, il est plus simple de penser que l'intensité est la fonction I définie par $I(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $I(t) = 1$ si $t > 0$ qui est discontinue en 0. En effet, même si la vraie intensité est possiblement continue à cause d'un passage de courant progressif quand l'interrupteur se ferme, cela est trop compliqué à modéliser et il est très probablement non pertinent de s'embêter avec cela. On préférera donc une fonction discontinue. De la même façon, si on regarde une bille qui fait un rebond parfait sur un mur, on supposera le choc élastique. Si la position varie continûment par rapport au temps, sa vitesse sera réfléchie instantanément lors du rebond et ne sera pas continue. Là encore, si on regarde tout en détail, le changement n'est pas immédiat, mais alors la conservation du moment cinétique obligerait à prendre en compte les déformations du mur, ce qui est trop difficile à faire.

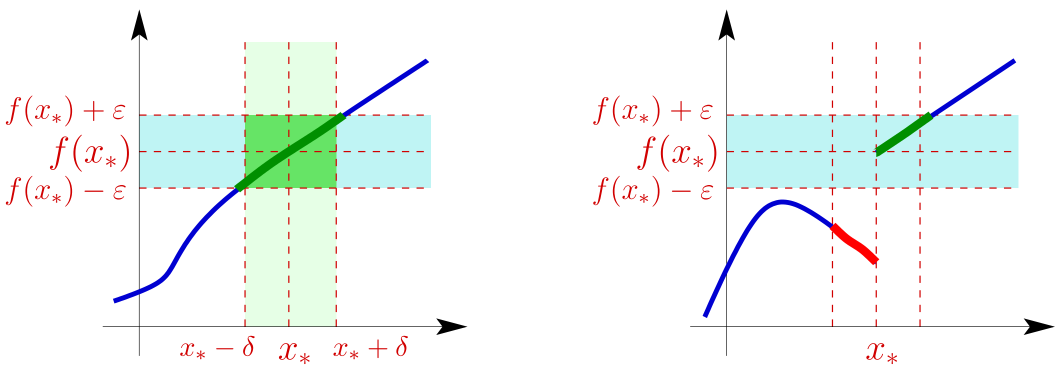


FIGURE 3.3 – *À gauche, une fonction continue en x_* : pour tout écart $\varepsilon > 0$, on peut trouver un petit intervalle $]x_* - \delta, x_* + \delta[$ autour de x_* dont l'image reste à distance moins de ε de $f(x_*)$. À droite, la fonction n'est pas continue en x_* : quand $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, il y a toujours des points aussi proches que l'on veut de x_* dont l'image est plus loin que ε de $f(x_*)$.*

On pourra utiliser à tout moment les caractérisations équivalentes suivantes.

Théorème 3.20 (critères équivalents pour la continuité)

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $x_* \in \mathcal{D}_f$. Les propositions suivantes sont équivalentes

i) f est continue en x_*, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in \mathcal{D}_f$ vérifie $|x - x_*| < \delta$ alors $|f(x) - f(x_*)| < \varepsilon$,

ii) pour toute suite $(x_n) \subset \mathcal{D}_f$ qui tend vers x_*, $f(x_n)$ tend vers $f(x_*)$,

iii) les limites à gauche et à droite de f en x_* existent, sont finies et égales à la valeur de f en x_*, c'est-à-dire, si ces limites ont un sens,

$$\lim_{x \to x_*^-} f(x) = \lim_{x \to x_*^+} f(x) = f(x_*) .$$

Démonstration : Nous allons procéder par une boucle d'implications.

Commençons par supposer que i) est vérifiée. Soit une suite (x_n) tendant vers x_* et soit $\varepsilon > 0$. Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in \,]x_* - \delta, x_* + \delta[$ alors $|f(x) - f(x_*)| < \varepsilon$. Comme (x_n) tend vers x_*, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x_*| < \delta$ pour $n \geq N$. Donc pour $n \geq N$, $|f(x_n) - f(x_*)| < \varepsilon$ et donc ii) est vérifiée.

Montrons que ii) implique iii) par contraposée. Imaginons que la limite à droite de f en x_* n'existe pas ou bien est différente de $f(x_*)$, c'est-à-dire que la phrase

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ \exists \delta > 0 \ , \ \ \forall x \in \,]x_*, x_* + \delta[\, \cap \mathcal{D}_f \ , \ \ |f(x) - f(x_*)| < \varepsilon$$

est fausse. On a donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \delta > 0 \ , \ \ \exists x \in \,]x_*, x_* + \delta[\ , \ \ |f(x) - f(x_*)| \geq \varepsilon \tag{3.1}$$

En appliquant (3.1) à $\delta = 1$, on trouve un point x_1 dans $]x_*, x_* + 1[$ tel que $|f(x_1) - f(x_*)| \geq \varepsilon$. Puis en appliquant (3.1) à $\delta = 1/2$, on trouve un point x_2 dans $]x_*, x_* + 1/2[$ tel que $|f(x_2) - f(x_*)| \geq \varepsilon$ et on recommence ainsi : pour $\delta = 1/n$, on trouve un point x_n dans $]x_*, x_* + 1/n[$ tel que $|f(x_n) - f(x_*)| \geq \varepsilon$. On a ainsi une suite (x_n) qui tend vers x_* et telle que $f(x_n)$ reste à distance plus grande que $\varepsilon > 0$ de $f(x_*)$. Ceci contredit ii). La démonstration est similaire si le problème vient de la limite à gauche.

Supposons finalement que iii) est vraie. Pour tout $\varepsilon > 0$, d'après les définitions des limites à gauche et à droite, il existe δ_+ et $\delta_- > 0$ tels que pour tout $x \in \,]x_* - \delta_-, x_*[$ et pour tout $x \in \,]x_*, x_* + \delta_+[$, $|f(x) - f(x_*)| < \varepsilon$. On pose $\delta = \min(\delta_-, \delta_+)$, on a donc $|f(x) - f(x_*)| < \varepsilon$ pour tout $x \in \,]x_* - \delta, x_* + \delta[$ (le cas $x = x_*$ s'incluant de façon triviale). □

D'après les caractérisations précédentes, la continuité d'une fonction peut se vérifier à l'aide de limites de suites. De ce fait, les règles sur les limites nous permettent d'obtenir des règles sur la continuité sans efforts supplémentaires.

Proposition 3.21 (opérations sur la continuité)

Soient f et g deux fonctions réelles continues en un point $x_* \in \mathbb{R}$. Alors,

- si λ et μ sont deux réels, la combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ est continue en x_*,
- le produit fg est continu en x_*,
- si $g(x_*) \neq 0$, alors le quotient f/g est continu en x_*.

Démonstration : Si (x_n) est une suite convergeant vers x_*, alors par hypothèse $f(x_n) \to f(x_*)$ et $g(x_n) \to g(x_*)$. On sait que, pour les suites, la limite de la somme est la somme des limites et la multiplication par des scalaires commute avec les limites. Donc $\lambda f(x_n)+\mu g(x_n) \to \lambda f(x_*)+\mu g(x_*)$, ce qui montre que $\lambda f + \mu g$ est continue en x_*. Les autres démonstrations sont similaires. $\square$

Proposition 3.22 (composée de fonctions continues)

Soient f et g deux fonctions réelles. On suppose que g est continue en x_* et f est continue en $g(x_*)$. Alors $f \circ g$ est continue en x_*.

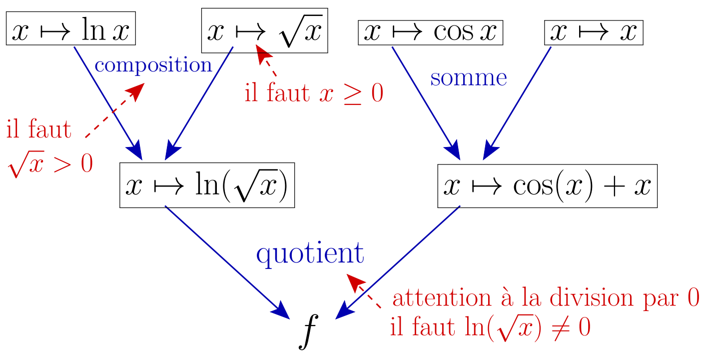
Démonstration : Si $x_n \to x_*$, alors, comme g est continue en x_*, $y_n := g(x_n) \to g(x_*)$. Mais comme f continue en $g(x_*)$ et que $y_n \to g(x_*)$, on a $f(y_n) \to f(g(y_*))$, c'est-à-dire que $(f \circ g)(x_n) \to (f \circ g)(x_*)$. $\square$

Exemple :

On utilisera souvent une phrase comme « la fonction est continue comme composée, somme et produit de fonctions continues ». Regardons très précisément un exemple pour comprendre le mécanisme (on pourra aller bien plus vite avec l'habitude). On considère la fonction f donnée par la formule

$$f(x) = \frac{\cos(x) + x}{\ln(\sqrt{x})}$$

On doit détailler la construction de cette formule pour savoir où elle est définie et continue.



À chaque fonction ou opération, on fait la liste de ce qu'il faut vérifier. Les points d'attention concernent la racine carrée, le log et les quotients. On liste les problèmes à chaque étape en faisant bien attention à ce qui apparaît dans la condition. Par exemple, le quotient de notre exemple ne demande pas que l'on vérifie $x \neq 0$ mais $\ln(\sqrt{x}) \neq 0$ car c'est par ce nombre qu'on divise. On regroupe ensuite toutes les conditions. Dans notre exemple, la racine carrée demande que $x \geq 0$, puis la composition avec le log que $\sqrt{x} > 0$, ce qui revient à $x > 0$. Enfin, il faut $\ln(\sqrt{x}) \neq 0$, c'est-à-dire $\sqrt{x} \neq 1$ et donc $x \neq 1$. Notre fonction est donc bien définie sur

$$\mathcal{D}_f \ = \ ]0,1[\ \cup\ ]1,+\infty[\ .$$

Par ailleurs, les fonctions impliquées sont continues et les théorèmes précédents nous montre que la construction de la formule garde cette propriété tant que la formule fait sens. Donc f est bien continue sur $\mathcal{D}_f$. Encore une fois, rappelons que la fonction *partie entière* est la seule fonction usuelle non continue.

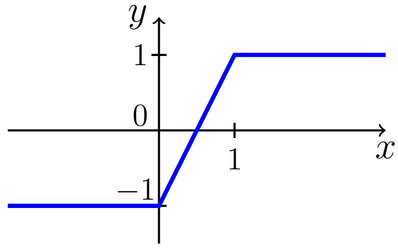
3.2 Raccords et prolongements

Une conséquence utile de la caractérisation de la continuité par les limites à gauche et à droite est le principe de raccord. Soit f une fonction définie sur plusieurs intervalles, disons $[a,b]$ et $]b,c]$ pour fixer les notations, par une formule $f(x) = f_1(x)$ sur $[a,b]$ et une autre formule $f(x) = f_2(x)$ sur $]b,c]$. Si ces formules définissent des fonctions continues sur $[a,b]$ et $]b,c]$, alors f est continue sur $[a,c]$ tout entier si et seulement si $\lim_{x\to b^+} f_2(x) = f_1(b)$. Quand la formule f_2 est même définie et continue en b, cela revient juste à vérifier que $f_1(b) = f_2(b)$.

Exemple :

On souhaite créer une fonction continue faisant une transition entre -1 et 1. Plus précisément, on souhaite avoir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue avec $f(x) = -1$ pour tout $x \leq 0$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \geq 1$. Une façon simple de faire est de connecter les deux morceaux par une fonction affine $h(x) = ax + b$ sur $]0,1[$. Pour obtenir une fonction continue, il faut et il suffit que $h(0) = b = -1$ et que $h(1) = a + b = 1$. On trouve donc une fonction f continue décrite par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



La caractérisation de la continuité d'un raccord donne très facilement le résultat suivant.

Proposition 3.23

La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : La fonction $f : x \mapsto |x|$ est définie par $f(x) = x$ sur $[0,+\infty[$, qui est clairement continue. De même, la formule $f(x) = -x$ est celle d'une fonction continue sur $]-\infty,0[$. Pour que f soit continue sur tout $\mathbb{R}$, il faut vérifier le raccord en $x = 0$, qui donne bien $0 = -0$. $\square$

Corollaire 3.24

Soit f une fonction continue de $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $|f|$ définie par $x \in E \mapsto |f(x)|$ est aussi continue sur E.
Si f et g sont deux fonctions continues de $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $x \in E \mapsto \max(f(x),g(x))$ et $x \in E \mapsto \min(f(x),g(x))$ sont aussi continues sur E.

Démonstration : La fonction $x \in E \mapsto |f(x)|$ est continue comme composée des fonctions f et $y \mapsto |y|$ qui sont continues. Les max et min de deux fonctions sont donc continus car

$$\max(f(x),g(x)) = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$$

et

$$\min(f(x),g(x)) = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

sont des composées et combinaisons linéaires de fonctions continues. □

Une autre application des caractérisations de la continuité par les limites est celle du *prolongement par continuité*.

Définition 3.25

Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur E. Supposons qu'il existe un domaine plus grand $F \supset E$ tel que, pour tout $x \in F \setminus E$, la limite de f en x est bien définie, existe et est finie. Alors le prolongement $\tilde{f} : F \to \mathbb{R}$ défini par $\tilde{f}(x) = \lim_{t\to x} f(t)$ est une fonction continue appelée **prolongement par continuité de f sur F.**

Remarquons que, si f est bien continue sur E, alors $\tilde{f}(x) = \lim_{t\to x} f(t)$ vaut $f(x)$ pour tout $x \in E$ et donc $\tilde{f}$ prolonge bien f. Par ailleurs, la définition par la limite implique la continuité de f. Ce n'est pas si trivial si $F \setminus E$ est compliqué, mais en pratique nous ne prolongerons que sur un point ou au pire sur un nombre fini de points.

Notons aussi que si la limite $\lim_{t\to x} f(t)$ n'a pas de sens ou vaut $\pm\infty$, alors la caractérisation de la continuité par les limites implique qu'on ne peut créer de prolongement continu.

Exemples :

- On considère la fonction f définie par la formule $f(x) = e^{-1/x^2}$. Comme on ne peut pas diviser par 0, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mais si $x \to 0$, $1/x^2 \to +\infty$ et donc $f(x) \to 0$. On peut donc prolonger f par continuité en $x = 0$ en posant

$$\tilde{f}(x) = e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad \tilde{f}(0) = 0 \ .$$

  La fonction $\tilde{f}$ est maintenant définie et continue sur tout $\mathbb{R}$.

- On considère la fonction g définie par la formule $g(x) = x/|x|$. Là encore, la division par 0 conduit à ne définir g que sur $\mathbb{R}^*$ a priori. On peut chercher à la prolonger en 0. Mais si $x < 0$, $g(x) = -1$ et si $x > 0$, $g(x) = 1$. Les limites à gauche et à droite ne peuvent être égales et donc on ne pourra jamais trouver un prolongement continu de g. Éventuellement, on peut décider de poser $\tilde{g}(0) = 0$ pour respecter la symétrie impaire, mais le résultat n'est pas continu.

3.3 Deux théorèmes fondamentaux

Le théorème des valeurs intermédiaires correspond à l'idée simple de la continuité comme « le tracé sans lever le crayon ». Dans ce sens, il peut paraitre simpliste mais c'est un théorème fondamental qui est plus profond qu'il paraît.

Théorème 3.26 (Théorème des valeurs intermédiaires dit T.V.I.)

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ une fonction continue sur $[a,b]$. Soit y une valeur strictement comprise entre les images de a et b, c'est-à-dire que soit $f(a) < y < f(b)$, soit $f(b) < y < f(a)$. Alors, il existe $x \in]a,b[$ tel que $y = f(x)$.

Démonstration : La fonction $g : x \mapsto f(x) - y$ est aussi continue sur $[a,b]$. Le problème revient alors à trouver un point $x \in [a,b]$ où g s'annule en sachant que $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes opposés.
On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$. Soit $m_0 = (a+b)/2$ le milieu du segment. Comme $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes opposés, on a soit que $g(m_0)$ est du même signe que $g(u_0) = g(a)$ et on pose alors $u_1 = m_0$ et $v_1 = b$, soit $g(m_0)$ est du même signe que $g(b)$ est on pose alors $u_1 = a$ et $v_1 = m_0$. Puis on reprend $m_1 = (u_1+v_1)/2$ le milieu du nouveau segment. Si $g(m_1) = 0$, on a trouvé notre x tel que $g(x) = 0$ et on peut s'arrêter. Si $g(m_1)$ est du même signe que $g(u_1)$ et on pose alors $u_2 = m_1$ et $v_2 = v_1$, si $g(m_1)$ est du même signe que $g(v_1)$ on pose alors $u_2 = u_1$ et $v_2 = m_1 \ldots$ On continue ainsi en coupant chaque segment en deux et en gardant le morceaux pour lequel les images des bords sont de signes opposés. Soit le processus s'arrête car on a trouvé un point x où g s'annule, soit il se poursuit infiniment. Mais dans ce dernier cas, cela nous construit deux suites (u_n) et (v_n) qui sont par construction adjacentes car (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $|u_n - v_n|$ est la taille de l'intervalle à l'étape n qui vaut $2^{-n}(b-a)$. Donc (u_n) et (v_n) convergent vers un même limite x. Comme $a = u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0 = b$, $x \in [a,b]$. Par ailleurs, $g(u_n)$ et $g(v_n)$ sont de signe opposés. Comme g est continue, $g(u_n)$ converge vers $g(x)$ et $g(x)$ est du même signe que $g(u_n)$ au sens large. Mais de même, $g(x)$ est du même signe que $g(v_n)$ au sens large. Le seul nombre que a les deux signes au sens large est $y = 0$. Donc $g(x) = y$ et on a trouvé le point cherché.
Il reste juste à remarquer que x n'est pas seulement dans $[a,b]$ mais en fait dans $]a,b[$. En effet, $g(a)$ et $g(b)$ sont supposés non nuls, donc x ne peut être ni a, ni b. $\square$

Exemples :

- Soit $P : x \mapsto ax^3+bx^2+cx+d$ un polynôme de degré 3, c'est-à-dire que $a \neq 0$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Supposons $a > 0$. Quand x tend vers $+\infty$, $P(x)$ tend vers $+\infty$ donc pour x assez grand $P(x) > 0$: il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $P(b) > 0$. Quand x tend vers $-\infty$, $P(x)$ tend vers $-\infty$ donc il existe a assez négatif pour que $P(a) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe $x \in]a,b[$ tel que $P(x) = 0$. Le cas $a < 0$ est symétrique. On obtient donc le résultat que tout polynôme réel de degré 3 admet au moins une racine réelle. Notons qu'il existe des polynômes de degré 2 sans racines réelles (comme $P(x) = x^2 + 1$).

- Soit $d(t)$ la distance d'un solide à un point de référence, il est naturel de considérer $d(t)$ comme une fonction continue du temps. Si à $t = 0$ le solide était sur le point de référence et si à $t = T > 0$, il était à distance $d(T) = 100\,\text{m}$, alors à un moment entre 0 et T, il a été à distance $d(t) = 10\,\text{m}$.

- Un récipient contient une quantité de liquide que l'on vide progressivement dans un autre récipient qui était vide au départ. Il existe un moment où les deux récipients contiennent exactement le même volume de liquide. En effet, si $V(t)$ est la quantité de liquide dans le récipient d'origine, alors on a au départ $V(0) > 0$ et à la fin $V(T) = 0$. Comme $V(t)$ est naturellement une quantité physique continue, il existe un temps $t \in]0,T[$ tel que $V(t) = V(0)/2$.

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x \geq 0$ n'est pas continue en $x = 0$. Les valeurs entre $f(-1) = 0$ et $f(1) = 1$ ne sont pas prises par la fonction. Celle-ci ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires.

- Une bille de vitesse $V > 0$ subit un choc élastique contre un mur et rebondit en repartant à vitesse $-V < 0$. Pourtant la bille n'a jamais été au repos car son énergie cinétique étant conservée, elle vaut toujours $\frac{1}{2}mV^2 \neq 0$. C'est parce que dans cette modélisation, la vitesse passe brutalement de V à $-V$: elle est discontinue et ne vérifie pas forcément le T.V.I.

Le deuxième résultat théorique important concernant la continuité est lié à ce qu'on appelle la compacité. Il permet non seulement de borner une fonction mais il garantit l'existence d'extrema. On lui associe parfois le nom de Karl Weierstrass (1815-1897, Allemagne).

Théorème 3.27 (théorème des valeurs extrêmes)

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé et borné et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ une fonction réelle continue sur $[a,b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$. Autrement dit, il existe $x_{\max}$ et $x_{\min}$ tels que

$$f(x_{\max}) = \max_{x\in[a,b]} f(x) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(x_{\min}) = \min_{x\in[a,b]} f(x) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)\ .$$

Démonstration : On va montrer que f est majorée sur $[a,b]$ et atteint son maximum. Le cas du minimum est symétrique.
Supposons que f ne soit pas majorée sur $[a,b]$, alors par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un point $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) \geq n$ et en particulier $f(x_n) \to +\infty$. D'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass (corollaire 2.32 du chapitre précédent), on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite $\ell \in [a,b]$. On a que $f(x_{\varphi(n)})$ tend vers $+\infty$ car c'est une sous-suite

de $f(x_n)$ mais aussi que $f(x_{\varphi(n)})$ tend vers $f(\ell)$ par continuité de f. Comme $f(\ell)$ est un nombre fini, c'est contradictoire et donc f est majorée sur $[a,b]$.
On pose $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M - 2^{-n}$ n'est plus un majorant et il existe donc $x_n \in [a,b]$ tel que $M - 2^{-n} < f(x_n) \leq M$. Donc $f(x_n)$ tend vers M. Mais comme précédemment, on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite $x_{\max} \in [a,b]$. Et par continuité $f(x_{\varphi(n)})$ tend vers $f(x_{\max})$. Donc $f(x_{\max}) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ est le maximum cherché. □

! Comme on le voit dans les exemples ci-dessous, il est important que f soit continue mais aussi que $[a,b] \subset \mathbb{R}$ soit un intervalle fermé et borné, c'est-à-dire qu'il inclut ses bornes a et b qui sont des réels (finis).

Exemples :

- Soit $d(t)$ la distance d'un solide à un point de référence, il est naturel de considérer $d(t)$ comme une fonction continue du temps. Pendant un intervalle de temps $[0,T]$, le solide s'est éloigné au maximum d'une distance D et il existe un temps $t_0 \in [0,T]$ où il était pile à distance D.
- La fonction $f : x \mapsto x$ est continue sur $[0,+\infty[$ mais n'est pas majorée dessus. On ne peut pas appliquer le théorème précédent car $[0,+\infty[$ n'est pas un intervalle borné.
- La fonction $f : x \mapsto 1/x$ est continue sur $]0,1]$ mais n'est pas majorée dessus. On ne peut pas appliquer le théorème précédent car $]0,1]$ n'est pas un intervalle fermé.
- La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ si $x \in]0,1]$ n'est pas majorée sur $[0,1]$. Même si $[0,1]$ est fermé et borné, on ne peut pas appliquer le théorème précédent car f n'est pas continue.

En rassemblant les deux énoncés de cette partie, on obtient ce qu'on pourra appeler dans les prochaines années d'études « l'image d'un intervalle compact est un intervalle compact ».

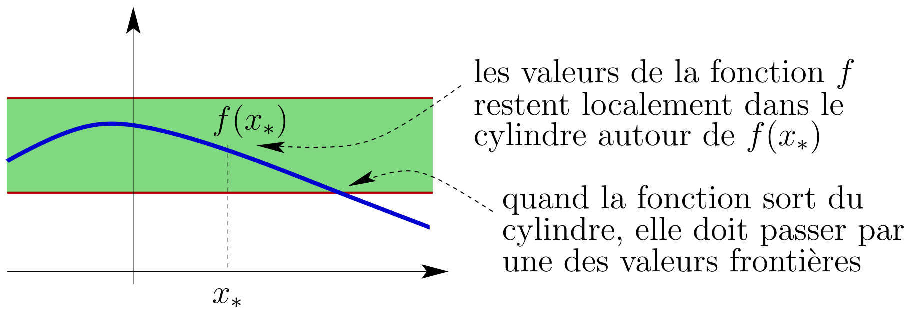
Corollaire 3.28

L'image d'un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$.

Démonstration : Le théorème 3.27 nous dit que l'image par f continue d'un intervalle $[a,b]$ est bornée et que les bornes sont atteintes. Donc $\alpha = \min_{[a,b]} f$ et $\beta = \max_{[a,b]} f$ sont dans l'image de f, atteints aux points $x_{\min}$ et $x_{\max}$ respectivement. Par définition de ces extrema, l'image de f est incluse dans $[\alpha,\beta]$. Mais le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur l'intervalle $[x_{\min},x_{\max}]$ (ou $[x_{\max},x_{\min}]$) nous dit que toutes les valeurs de $[\alpha,\beta]$ sont atteintes. □

3.4 Quelques applications

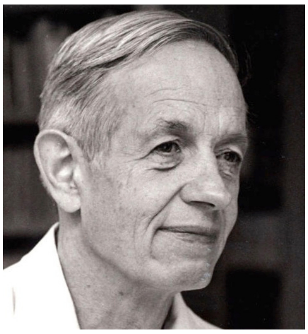
• **Cylindre de contrôle :** soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $x_* \in I$. Pour toutes valeurs α et β telles que $\alpha < f(x_*) < \beta$, la définition de la continuité implique qu'il existe un petit intervalle $]x_* - \delta, x_* + \delta[$ tel que $\alpha < f(x) < \beta$ reste vérifié pour $x \in]x_* - \delta, x_* + \delta[$. Mieux, grâce aux valeurs intermédiaires, si f est continue sur tout un intervalle I, alors $f(x)$ ne peut s'échapper de l'intervalle $]\alpha,\beta[$ qu'en passant par un des bords α ou β. Par exemple, si f est continue et $f(x_*) > 0$, alors on est certain que f reste positive sur un petit intervalle autour de x_*. Par ailleurs, si elle devient négative, c'est qu'elle est passée par la valeur $f(x) = 0$.



• **Méthode de dichotomie :** si on regarde bien la preuve du théorème des valeurs intermédiaires, elle fournit une méthode simple, constructive et explicite pour chercher les zéros d'une fonction continue, c'est-à-dire pour trouver une solution à une équation $f(x) = 0$. Supposons que f soit continue sur un intervalle $[a,b]$ et que l'on sache que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés. Alors on coupe l'intervalle $[a,b]$ en deux et on garde l'intervalle où f admet des valeurs de signes opposés au bord. Puis on recoupe cette intervalle en deux etc. On sait par le T.V.I. qu'il existe bien une solution de $f(x) = 0$ dans chacun des intervalles et plus on avance, plus ces intervalles sont petits et plus on obtient une bonne approximation de cette solution. Attention toutefois que cette méthode ne garantit pas de trouver toutes les solutions même si elle permet d'en trouver au moins une. L'algorithme est schématiquement :

```
Tant que (a-b)/2 > précision faire boucle
       pose m=(a+b)/2
       si f(a)f(m)<0
             alors pose b=m
             sinon pose a=m
       fin si
fin boucle
Écrit ‘‘la solution vaut’’ (a+b)/2 ‘‘avec la précision ±’’ précision
```

• **Un théorème de point fixe :** les points fixes d'une fonction f, c'est-à-dire les solutions de l'équation $f(x) = x$, jouent un rôle important dans beaucoup de théories et applications. Par exemple, leur interprétation en tant qu'équilibres d'une dynamique $u_{n+1} = f(u_n)$ se retrouve en théorie des jeux et donc en économie. En se limitant aux fonctions à une seule variable réelle, cela revient souvent à prendre des modèles simplistes, mais essayons d'en comprendre le principe général. Imaginons un agent économique qui peut produire une quantité x de biens et en tirer un profit $h(x,y)$ qui dépend de sa production x et de l'état du marché y. Il va tenter de maximiser ses gains et donc produire la quantité x_* telle que $h(x_*,y) = \max_x h(x,y)$. On peut supposer que x_* dépend continûment de l'état du marché y. Mais l'état du marché dépend aussi de la production x de l'agent (une surproduction peut baisser les prix etc.), c'est donc aussi une fonction continue $y(x)$. L'agent ne sera satisfait que si sa production est celle lui apportant le gain maximum dans l'état du marché, c'est-à-dire si $x_* = h(x_*,y(x_*))$. On est amené à chercher un point fixe de la fonction $f : x_* \mapsto \max_x h(x,y(x_*))$. C'est un *équilibre de Nash* du nom du mathématicien John Nash, lauréat du prix dit Nobel d'économie et du prix Abel.



John Nash
1928-2015
États-Unis

Théorème 3.29

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],[a,b])$ une fonction continue envoyant $[a,b]$ sur lui-même. Alors f a au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x_* \in [a,b]$ tel que $f(x_*) = x_*$.

Démonstration : Si $f(a) = a$, c'est gagné, donc supposons que l'on a $f(a) \neq a$, ce qui implique $f(a) > a$ car $f(a) \in [a,b]$. De même, si $f(b) = b$, c'est gagné, donc supposons que l'on a $f(b) \neq b$, ce qui implique $f(b) < b$. On considère la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[a,b]$ comme somme de fonctions continues. Par ailleurs, les hypothèses ci-dessus nous donnent que $g(a) = f(a) - a > 0$ et $g(b) = f(b) - b < 0$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on voit qu'il existe $x_* \in \,]a,b[$ tel que $g(x_*) = 0$. Mais cela veut dire que $f(x_*) - x_* = 0$ et donc x_* est un point fixe de f. □

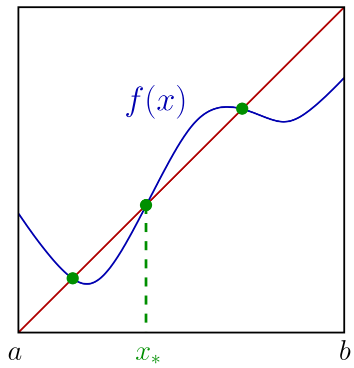
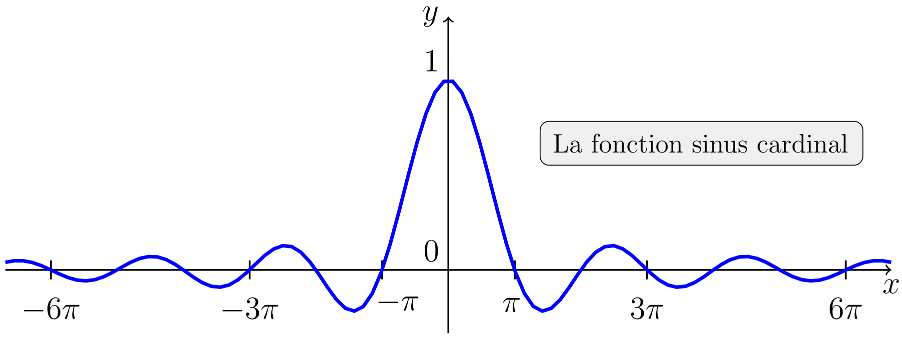


FIGURE 3.4 – *Une illustration du théorème 3.29 : le graphe de la fonction continue f doit forcément intersecter la droite $y = x$ et donc f a forcément au moins un point fixe (ici elle en a trois).*

• **Le sinus cardinal :** en physique ondulatoire et en théorie du signal, la fonction $x \mapsto (\sin x)/x$ apparaît très fréquemment. Une des raisons est qu'elle est liée aux filtres passe-bas c'est-à-dire au fait de tronquer les hautes fréquences dans une onde, par exemple pour ne garder que les fréquences audibles principales d'un signal sonore. Elle peut être considérée comme suffisamment usuelle pour avoir un nom : on l'appelle *sinus cardinal* et on la note sinc. Pour $x \neq 0$, la fonction $x \mapsto (\sin x)/x$ est bien définie et est continue. Le problème, c'est qu'elle n'est pas définie en $x = 0$ à cause de la division par x. Mais comme $\sin x$ est équivalent à x quand x tend vers 0, on obtient facilement que $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. On peut donc prolonger la fonction par continuité en $x = 0$. C'est en fait ce prolongement qui est appelé sinus cardinal. On pose donc

$$\mathrm{sinc}(x) \;=\; \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et on obtient une fonction continue et définie sur $\mathbb{R}$.



• **Le minimum d'un puits de potentiel :** on considère un potentiel continu $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = +\infty$. Cela veut dire que ce potentiel est un *potentiel puits* qui a tendance à ramener notre système vers une zone bornée. Par les résultats ci-dessus, nous pouvons montrer que V admet un minimum global, c'est-à-dire un point x_* où l'énergie potentielle est la plus petite possible et donc pour lequel, un système dans cet état x_* resterait stable proche de cette énergie minimale. En effet, soit $M = V(0) + 1$. Comme $\lim_{x\to-\infty} V(x) = +\infty$, il existe x_- tel que si $x \leq x_-$ alors $V(x) \geq M$. De même, comme $\lim_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$, il existe x_+ tel que si $x \geq x_+$ alors $V(x) \geq M$. Donc pour tout x en dehors de $[x_-,x_+]$, $V(x)$ est minoré par $V(0) + 1$, et en particulier $0 \in [x_-,x_+]$ puisque $V(0) < V(0) + 1$. Par ailleurs, comme V est continue sur l'intervalle fermé borné $[x_-,x_+]$, V y est minoré et atteint son minimum en un point x_*. On a donc que pour tout $x \in [x_-,x_+]$, $V(x) \geq V(x_*)$. Mais comme $0 \in [x_-,x_+]$, pour tout $x \notin [x_-,x_+]$, $V(x) \geq V(0) + 1 > V(0) \geq V(x_*)$. Au total, on a bien que $V(x) \geq V(x_*)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et V admet un minimum global en x_*.

4 Dérivation

4.1 Définition et propriétés élémentaires

Si $d(t)$ est la distance parcouru par un véhicule au cours du temps, alors entre les temps a et b, le véhicule a parcouru $d(b) - d(a)$. Sa vitesse moyenne est donc

$(d(b) - d(a))/(b - a)$. L'idée de la dérivée est simplement d'aller chercher la vitesse instantanée en faisant tendre b vers a.

Définition 3.30

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et soit $I \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle. Pour tout $a \neq b$ dans I, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le **taux d'accroissement de f entre a et b**. Si la limite

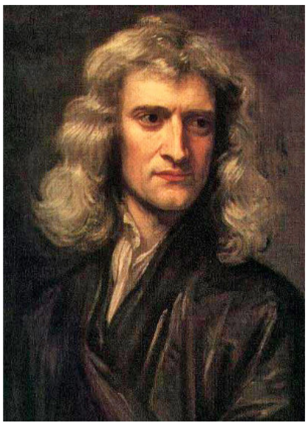
$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

existe et est finie, on l'appelle **nombre dérivé de f en a** que l'on note $f'(a)$ et on dit que f est **dérivable** en a. Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I et la fonction $f' : x \in I \mapsto f'(x)$ est appelée la **dérivée de f** sur I.

Dans la définition ci-dessus, on peut considérer les points $a = x$ et $b = x + h$, ce qui fait qu'on peut écrire la définition de la dérivée comme

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \ .$$

Il existe aussi d'autres notations pour la dérivée, chacune venant d'un des grands fondateurs du calcul infinitésimal. La notation f' vient de Lagrange. Leibniz utilisait la notation $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ pour la dérivée de f au point x. Cette notation est pratique quand f dépend de plusieurs variables et elle fait le lien avec les notations des intégrales. Newton utilisait le point, qui est beaucoup utilisé en physique, par exemple $\dot{x}(t)$ pour la vitesse comme dérivée de la position $x(t)$. Cette notation est évidemment moins pratique pour des lettres hautes comme le f.



Sir Isaac Newton
1642-1727
Angleterre

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646-1716
Allemagne

Joseph-Louis Lagrange
1736-1813
Italie-France

Exemple :

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$. On a $f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$. Donc $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x + h \to 2x$ quand $h \to 0$. Donc f est dérivable et sa dérivée est $f'(x) = 2x$. En utilisant la formule du binôme, on trouve de même que

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{1}{h}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k} - x^n\Big)\\ &= \frac{1}{h}\Big(\binom{n}{0}x^n - x^n\Big) + \binom{n}{1}x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}x^{n-k}\\ &= nx^{n-1} + o(1) \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} nx^{n-1}\end{aligned}$$

montrant le résultat bien connu que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$.

Définition 3.31

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est dérivable, on note f'' (ou $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ ou $\ddot{f}$) la **dérivée seconde** de f, c'est-à-dire la dérivée de la dérivée.
Si on peut appliquer la dérivation k fois de suite sur f, on dit que f est k fois dérivable sur I et on note $f^{(k)}$ ou $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$ la fonction obtenue, appelée **dérivée k-ième**.
Si f est k fois dérivable sur I et que sa dérivée k-ième est continue sur I, alors on dit que f est **de classe $\mathcal{C}^k$** sur I. On note $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Si f est infiniment dérivable, on dit qu'elle est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** et on note $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) = \cap_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$.

! Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ si elle est dérivable et si sa dérivée f' est continue. La fonction $f : x \mapsto x^2\sin(1/x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée est $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f'(0) = 0$ et f' n'est pas continue en $x = 0$. Donc f peut être dérivable sans être de classe $\mathcal{C}^1$.

En se basant sur les notions de limites à gauche et à droite, il est possible de parler de dérivabilité à gauche et à droite.

Définition 3.32

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle $[a,b] \subset \mathcal{D}_f$. On dit que f est **dérivable à droite** en $x = a^+$ si la limite $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie. Symétriquement, on dit que f est **dérivable à droite** en $x = b^-$ si la limite $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$ existe et est finie.

Par les arguments similaires à ceux de la preuve du théorème 3.20, on montre qu'une fonction est dérivable en x si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite de x et si ces deux dérivées sont égales.

Exemple :

On considère la valeur absolue $f : x \mapsto |x|$. Pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) = x$ et donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $f' \equiv 1$ et f est dérivable à droite de 0 avec 1 pour dérivée à droite en 0. Symétriquement, pour tout $x \leq 0$, on a $f(x) = -x$ et donc f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ avec $f' \equiv -1$ et f est dérivable à gauche de 0 avec -1 pour dérivée à gauche en 0.
En $x = 0$, les dérivées à droite et à gauche sont différentes, donc la valeur absolue n'est pas dérivable en $x = 0$.

L'implication suivante est classique mais on prendra garde à ne pas utiliser sa réciproque qui est fausse. On pourra se rappeler de l'exemple ci-dessus de la valeur absolue qui est continue mais pas dérivable en 0.

Proposition 3.33

Si f est dérivable en $x \in \mathcal{D}_f$, alors f est continue en x.

Démonstration : Si f est dérivable en x, alors la limite $\lim_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ existe et est finie. Par règle algébrique sur les limites, on a alors

$$f(y) = (y - x)\frac{f(y) - f(x)}{y - x} + f(x) \xrightarrow[y \longrightarrow x]{} f(x)$$

ce qui montre par le théorème 3.20 que f est continue en x. $\square$

On pourra retenir que toutes les fonctions usuelles sont dérivables sur leur domaine de définition sauf la partie entière (qui n'est tout simplement pas continue sur les entiers) et la valeur absolue qui n'est pas dérivable en $x = 0$. Pour obtenir la dérivée de fonctions construite à l'aide des fonctions usuelles, il nous faut les règles de calculs que nous apprenons au lycée.

Proposition 3.34

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors

- Si λ et μ son deux réels, alors la combinaison linéaire $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
- Le produit fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + g'f$.
- Le quotient f/g est dérivable là où $g \neq 0$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2}$.

Démonstration : Pour donner un exemple de preuve, traitons le cas du produit. On commence par noter que puisque g est dérivable en $x \in I$, alors g est continue sur I et $g(x + h) \to g(x)$ quand $h \to 0$. Les règles de manipulation des limites donnent

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} &= \frac{1}{h}\big(f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)\big)\\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &\xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

□

Les règles pour la composition et la fonction réciproque s'énoncent ainsi.

Proposition 3.35

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $g : I \to J$ et $f : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors la composée $f \circ g$ est dérivable sur I et $(f \circ g)' = (f' \circ g).g'$.

Démonstration : Soit $x \in I$. Comme g est dérivable en x, g est continue en x. Par ailleurs, f est dérivable en $g(x)$ par hypothèse. On a

$$\begin{aligned}\frac{(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x)}{h} &= \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\ &= \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \times \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &\xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} f'(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

où on a utilisé la définition de la dérivée de f en $a = g(x)$ avec b égal à $g(x+h)$ qui tend vers a quand h tend vers 0. □

Proposition 3.36

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to J$ une fonction dérivable et bijective de I dans J. Alors si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable et $(f^{-1})'(x) = 1/f'(f^{-1}(x))$.

Démonstration : Comme f est dérivable, elle est continue. Nous allons supposer connu le fait que la réciproque d'une fonction continue est continue pour nous concentrer sur la partie dérivation. On pourra donc utiliser que $f^{-1}(x+h)$ tend vers $f^{-1}(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)}{h} &= \frac{f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)}{(x+h)-x} = \frac{f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)}{f(f^{-1}(x+h))-f(f^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(x+h))-f(f^{-1}(x))}{f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)}} \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\end{aligned}$$

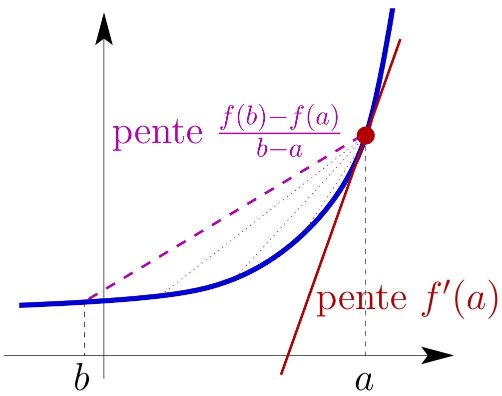
où on a utilisé la définition de la dérivée de f en $a = f^{-1}(x)$ avec b égal à $f^{-1}(x+h)$ qui tend vers a quand h tend vers 0 (continuité admise). $\square$

Notons quelques astuces pour les calculs. Tout d'abord, en cas de doute sur les formules, on pourra regarder l'homogénéité. Si f et g sont en mètres et x en seconde, alors la dérivation multiplie l'unité par s^{-1}. La formule de $(fg)'$ par exemple doit être en $m^2.s^{-1}$ et aussi symétrique en f et g car $fg = gf$. Cela ne laisse pas beaucoup de choix et montre que $(fg)' \neq f'g'$ car $f'g'$ est en $m^2.s^{-2}$.

Ensuite, l'écriture $(f \circ g)' = (f' \circ g).g'$ est meilleure que $(f \circ g)' = g'.(f' \circ g)$ dès qu'on enchaîne plusieurs calculs. Ainsi si on calcule $(f \circ g \circ h)'$, on commence par réfléchir à f' et on écrit $f' \circ g \circ h$ puis on oublie f et on peut se concentrer sur la dérivation de $g \circ h$ etc.

4.2 Tangente et linéarisation

Nous avons vu la dérivée comme la limite du taux d'accroissement et ce dernier comme une sorte de vitesse moyenne. Ce taux d'accroissement a aussi une interprétation géométrique : c'est la pente de la droite reliant les points $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$. La dérivée f' est donc la limite de ces pentes quand b tend vers a. Géométriquement, la droite limite est la *tangente* à la courbe de f en a. On peut simplement prendre comme définition de la tangente qu'il s'agit de la droite de pente $f'(a)$ et passant par le point $(a,f(a))$.



Définition 3.37

Si f est dérivable en a, on définit la **tangente à la courbe de f en** a comme la droite d'équation

$$y \;=\; f'(a)(x-a) + f(a)\ .$$

Pour retrouver cette équation, c'est facile : la pente est $f'(a)$ donc l'équation est du type $y = f'(a)x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Puis la droite doit passer par $(a,f(a))$ donc $f'(a)a + c = f(a)$ donne la constante manquante.

Le point clef de cette tangente est qu'il s'agit de la meilleure approximation de f par une droite si on est proche de a, dans le sens où la différence entre $f(x)$ et la tangente $f'(a)(x-a) + f(a)$ est d'ordre plus petit que linéaire. On peut voir cette propriété comme la définition même de la dérivée.

Théorème 3.38

Une fonction f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ avec pour nombre dérivé $f'(a)$ si et seulement si

$$f(x) \ = \ f(a) + f'(a)(x-a) + r(x) \quad \text{avec} \quad \frac{r(x)}{(x-a)} \to 0 \ \text{ quand } x \to a \ . \tag{3.2}$$

Démonstration : Supposons que f est dérivable en a. Alors si on pose $r(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$, on a

$$\frac{r(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} f'(a) - f'(a) = 0 \ .$$

Ce qui donne le développement (3.2) souhaité.
Supposons maintenant que (3.2) est vraie (sans savoir que $f'(a)$ est le nombre dérivé mais juste un nombre donné). On a alors

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f'(a)(x-a)+r(x)}{x-a} = f'(a) + \frac{r(x)}{x-a} \xrightarrow[x \longrightarrow a]{} f'(a)$$

ce qui montre que le taux d'accroissement a une limite finie qui est bien le nombre $f'(a)$. □

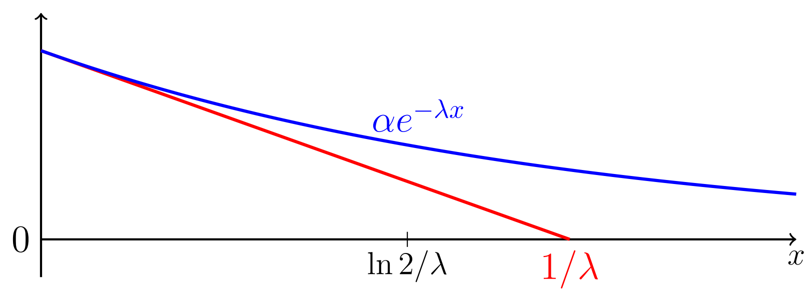
Dans le chapitre suivant, on verra la notation $o(x-a)$ pour un terme $r(x)$ tel que $r(x)/(x-a) \to 0$ quand $x \to a$. On écrira alors (3.2) sous la forme

$$f(x) \ = \ f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

ce qui évite d'introduire une notation pour le reste. Ce genre d'écriture sera vu plus en détail dans chapitre sur les développements limités.

Exemples :

- En $x=0$, une exponentielle $f(x) = \alpha e^{-\lambda x}$ a pour dérivée $f'(0) = -\alpha\lambda$ et donc pour tangente $-\alpha\lambda x + \alpha$. Cette tangente s'annule en $x = 1/\lambda$. Cela donne un moyen géométrique de récupérer le coefficient λ ou la demi-vie $\ln 2/\lambda$ où l'exponentielle a été divisée par deux.



- Près de $x=0$, comme $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, on retrouve que $\sin(x) = x + r(x)$ avec $r(x)/x \to 0$ quand $x \to 0$, ce qui est équivalent à dire que $\sin x \sim x$ près de 0.

- On considère un pendule qui peut osciller autour d'un axe. On note $\theta(t)$ l'angle qu'il forme avec la verticale ($\theta = 0$ étant l'équilibre stable où le pendule pend vers le bas). On trouve comme équation $\ddot{\theta}(t)+\omega^2\sin(\theta(t)) = 0$ avec $\omega = \sqrt{g/\ell}$. Il est impossible de trouver des solutions explicites à cette équation, mais pour des petits oscillations, (θ proche de 0) on peut procéder à une **linéarisation** en remplaçant $\sin\theta$ par θ car $\sin x \sim x$ près de 0. Il peut être très difficile de donner un sens rigoureux à ce procédé, c'est-à-dire de comprendre dans quel sens l'équation originale et sa version linéarisée sont proches. Mais en première approximation, on peut déjà regarder l'équation linéarisée $\ddot{\theta}(t) + \omega^2\theta(t) = 0$. Cette équation a pour solution les oscillations de la forme $\alpha\sin(\omega t)+\beta\cos(\omega t)$, ce qui correspond bien à ce qu'on peut observer et justifie a posteriori que la linéarisation est sans doute raisonnable dans ce cas.

4.3 Les accroissements finis

Dans cette partie, nous allons voir plusieurs résultats fondamentaux qui donnent toute la puissance de l'outil dérivation. Tout d'abord, nous pouvons l'utiliser pour chercher des extrema locaux.

Proposition 3.39

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset \mathcal{D}_f$. Si la fonction f admet un maximum ou un minimum local en x_0 et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration : Supposons que f admet en x_0 un maximum local (le cas du minimum est symétrique). Il existe un petit intervalle $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ sur lequel $f(x) \leq f(x_0)$. On a donc pour tout $h \in]0,\eta[$, $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$. Comme f est dérivable en x_0, on peut passer à la limite $h \to 0$ et obtenir $f'(x_0) \leq 0$. Mais pour tout $h \in]-\eta,0[$, on a aussi $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$ (attention au changement de sens de l'inégalité car h est négatif). En passant à la limite, on obtient $f'(x_0) \geq 0$. Au total, on a forcément $f'(x_0) = 0$. $\square$

Cette proposition bien connue est très utile pour trouver les maximums ou minimums d'une fonctions. On prendra garde à ne pas mal l'utiliser comme illustrer dans les exemples suivants.

Exemples :

- Le polynôme $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et de dérivée $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. D'après le résultat ci-dessus, les extrema locaux de f sont des points où f' s'annule. Il y a donc deux candidats : $x_0 = 1$ et $x_0 = -1$. Il faudra étudier les variations de la fonction pour savoir s'il s'agit bien d'extrema locaux ou non. Dans tous les cas, il ne s'agira pas d'extrema globaux puisque f tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$.

- Un point où f' s'annule n'est pas forcément un extremum local. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^3$ a une dérivée qui s'annule en $x = 0$. Pourtant, elle est toujours croissante et donc il n'y a aucun extremum local en $x = 0$.

- Si on est « au bord » de l'ensemble de définition, c'est-à-dire qu'on ne peut trouver un intervalle $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ dedans, alors la proposition devient fausse. Par exemple, la fonction $x \in [0,1] \mapsto x$ admet un minimum global en 0 et un maximum global en 1 mais sa dérivée ne s'annule jamais.

Le résultat suivant a été formulé par Michel Rolle (1652-1719, France). Il peut sembler élémentaire et est souvent qualifié simplement de « lemme ». Mais on va voir plus bas sa généralisation appelée théorème des accroissements finis qui est un résultat fondamental de l'analyse infinitésimal. À l'époque de Rolle, la dérivation était à ses débuts et Rolle n'avait traité en fait que le cas des polynômes.

Proposition 3.40 (lemme de Rolle)

Soient $a < b$ deux réels et soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$. Si $f(a) = f(b)$ et si f est dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration : D'après le théorème 3.27, la fonction f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes. Si $f(a) = f(b)$ est à la fois les valeurs minimale et maximale de f sur $[a,b]$, alors c'est que f est constante sur ce segment et d'après la proposition 3.39, $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a,b[$ puisque $f(c)$ est un maximum de f. Sinon, c'est qu'il existe un $c \in]a,b[$ tel que f atteint son maximum ou son minimum en c. De nouveau, on applique la proposition 3.39 pour avoir $f'(c) = 0$. □

Le théorème le plus important de cette partie est le suivant. On remarquera que le lemme de Rolle correspond au cas $f(b) = f(a)$.

Théorème 3.41 (théorème des accroissements finis dit T.A.F.)

Soient $a < b$ deux réels et soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$. Si f est dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

Démonstration : On considère la fonction auxiliaire

$$g \ : \ x \in [a,b] \ \longmapsto \ f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \ .$$

Par les hypothèses sur f, la fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On a aussi $g(a) = f(a)$ et

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a) \ .$$

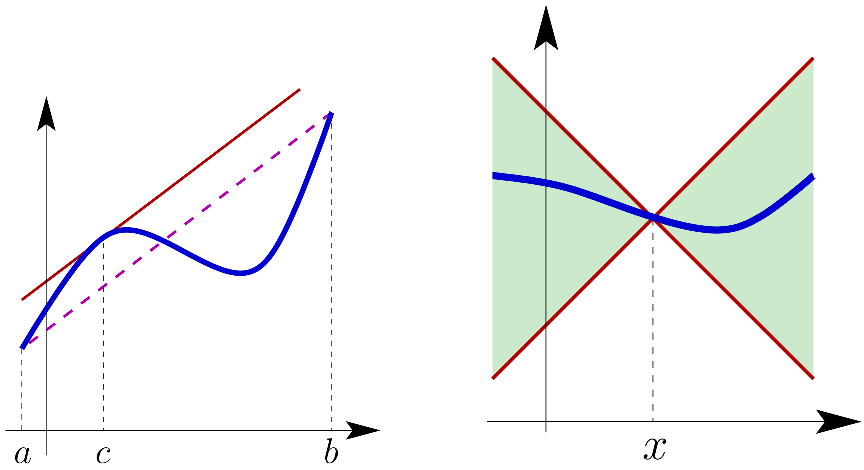


FIGURE 3.5 – *Des illustrations des accroissement finis. À gauche, le taux d'accroissement* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *est la pente de la sécante entre* a *et* b*, alors que* $f'(c)$ *est la pente de la tangente en* c*. Le T.A.F. nous dit qu'il existe* c *tel que ces deux pentes sont égales et donc que la tangente est parallèle à la sécante. À droite, si on connaît une borne* M *sur la dérivée d'une fonction, alors l'I.A.F. nous fournit un cône de pointe* $(x,f(x))$ *et de pentes* M *duquel la fonction ne peut s'échapper.*

On peut donc appliquer le lemme de Rolle à g et on trouve qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Comme $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, le point c est bien celui cherché. □

En corollaire immédiat, on obtient diverses inégalités comme ci-dessous. La forme en inégalités est celle qui est la plus utilisée dans la vie de tous les jours puisque c'est elle qui dit que si on n'a pas dépassé le 80 km/h, alors on n'a pas parcouru plus de 80 km en une heure. Ou plutôt la contraposée utilisée par les radars-tronçons : si vous avez mis moins d'une heure pour faire 80 km, c'est qu'à au moins un moment, vous avez dépassé les 80 km/h. Tout ceci est très logique, et c'est exactement ce qu'exprime le résultat suivant, mais sous une forme complètement générale : si $f(x)$ est une position en fonction du temps x, $(f(b) - f(a))$ est la distance parcourue, $(b - a)$ est l'intervalle de temps et f' la vitesse.

Corollaire 3.42 (inégalités des accroissements finis dit I.A.F.)

Soient $a < b$ deux réels et soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$. Si f est dérivable sur $]a,b[$ et si f' est bornée sur $]a,b[$, alors

$$(b-a) \cdot \inf_{x \in]a,b[} f'(x) \leq f(b) - f(a) \ \leq \ (b-a) \cdot \sup_{x \in]a,b[} f'(x) \ .$$

En particulier, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur intervalle I et si $x,y \in I$, alors

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \cdot \max_{t \in [x,y]} |f'(t)|$$

Démonstration : Le théorème des accroissements finis nous dit qu'il existe c tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$. Pour obtenir la première estimation, il ne reste plus qu'à borner $f'(c)$ en remarquant que $b - a > 0$ pour garder le sens de l'inégalité. Dans la deuxième version, on passe d'abord à la valeur absolue pour avoir $|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |f'(c)|$, ce qui permet de ne pas se soucier du signe de $x - y$. Puis on utilise que si la dérivée est continue sur $[x,y]$ (car f est de classe $\mathcal{C}^1$), alors c'est aussi le cas de $|f'|$ qui admet donc un maximum par le théorème 3.27. □

Exemple :

Montrons que $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour cela, on applique une inégalité des accroissements finis. On prend la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et les points $a = n$ et $b = n+1$. On a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ sur $[a,b]$. On obtient alors

$$\left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0\ .$$

C'est toute l'essence des inégalités des accroissements finis : si la vitesse de croissance de la fonction diminue et tend vers 0, l'écart des valeurs entre n et $n+1$ doit aussi tendre vers 0.

Le théorème des accroissements finis permet de retrouver tout ce qu'on apprend au lycée concernant le lien entre dérivation et sens de variation.

Proposition 3.43

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

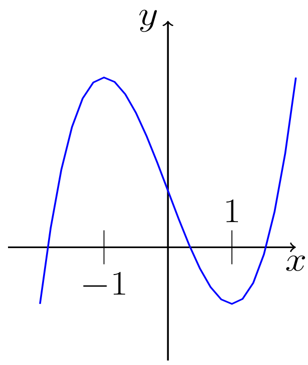
- si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I,
- si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I,
- si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I,
- si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.

Démonstration : Détaillons deux cas. Supposons que $f'(x) \geq 0$ sur I. Soient $a \leq b$ deux points de I. Si $a = b$, on a $f(b) \geq f(a)$ trivialement. Si $a < b$, le théorème 3.41 implique qu'il existe $c \in]a,b[\subset I$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Les hypothèses de signe nous donnent donc que $f(b) - f(a) \geq 0$ soit $f(b) \geq f(a)$ et f est donc croissante sur I.
Supposons maintenant que $f'(x) < 0$ sur I. Soient $a < b$ deux points de I, le théorème 3.41 implique qu'il existe $c \in]a,b[\subset I$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Les hypothèses de signe nous donnent donc que $f(b) - f(a) < 0$ soit $f(b) < f(a)$ et f est donc strictement décroissante sur I. □

4.4 Quelques applications

• **Étude de fonctions :** on retrouve les tableaux de variations que l'on apprend à faire au lycée. Reprenons notre exemple du polynôme de degré trois $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$. Sa dérivée est un polynôme de degré deux $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ dont le signe est facile à trouver. On obtient alors facilement une allure de la fonction.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			3				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-1		



Nous avions vu que ± 1 était potentiellement deux extrema locaux, sans en avoir la certitude. Maintenant, nous pouvons bien dire que la fonction f a exactement deux extrema locaux : $x = -1$ est un maximum local et $x = 1$ est un minimum local.

• **Estimations :** par essence, les inégalités des accroissements finis sont la source de nombreuses estimations. Par exemple, comme $|\cos x| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$, on sait que $|\sin x - \sin 0| \leq 1.|x - 0|$, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \quad |\sin x| \leq |x| \ .$$

Regardons maintenant le log. Il a pour dérivée $1/x$ et $1/x \leq 1$ pour tout $x \geq 1$. Donc $(\ln x - \ln 1) \leq 1.(x - 1)$ pour tout $1 \leq x$. Si $x \in]0,1[$, on a $1/x > 1$ et $(\ln 1 - \ln x) > 1.(1 - x)$ pour tout $x \leq 1$. Dans les deux cas, on retrouve la même inégalité (attention au changement de sens quand on passe de $(1 - x)$ à $(x - 1)$ si $x < 1$) :

$$\forall x > 0 \ , \quad \ln x \leq x - 1 \ .$$

On peut aussi utiliser l'étude de fonctions. Par exemple, on considère la fonction $f : x \mapsto e^x - x - 1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - 1$. Connaissant les valeurs de l'exponentielle, on obtient que la fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$: elle atteint son minimum en 0 où $f(0) = 0$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \quad e^x \geq x + 1 \ .$$

• **Caractérisation des fonctions constantes :** le résultat suivant est assez élémentaire mais fournit une façon simple de vérifier qu'une fonction est constante.

Proposition 3.44

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors f est une fonction constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Démonstration : Si f est constante sur I, alors tout taux d'accroissement $(f(a) - f(b))/(a - b)$ vaut zéro (car $f(a) = f(b)$) et donc f est dérivable de dérivée nulle.
Si f est dérivable et $f' \equiv 0$, alors pour tout a et b dans I, le théorème des accroissement finis nous donne l'existence de c dans I tel que $f(a) - f(b) = f'(c)(a - b)$. Puisque $f'(c) = 0$, on a $f(a) = f(b)$ pour tout a et b dans I. □

Notons que ce résultat n'est pas si trivial. Par exemple, si I n'est pas un intervalle, il n'est plus vrai. Ainsi considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. On a que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $f' \equiv 0$. Pourtant f n'est pas constante car elle prend deux valeurs. Par contre, on peut dire que f est constante sur chaque intervalle $]-\infty,0[$ et $]0, +\infty[$.

Exemple :

La proposition ci-dessus permet de démontrer rapidement des formules. Par exemple, si on part de la propriété du logarithme que $\ln 1 = 0$ et que $\ln'(x) = 1/x$. Pour tout $a > 0$, considérons la fonction $f : x \mapsto \ln(ax) - \ln(x)$. On a

$$f'(x) = \frac{1}{ax}a - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

et donc f est une fonction constante. On sait que $f(1) = \ln(a) - \ln 1 = \ln a$ et on obtient donc que pour tout $x > 0$, $f(x) = \ln a$. Ceci montre la formule

$$\forall x > 0, \forall a > 0 \ , \quad \ln(ax) = \ln a + \ln x \ .$$

• **Règle de L'Hôpital :** il s'agit d'une règle qui peut être utile. Elle a été publiée par le marquis de L'Hôpital (1661-1704, France), mais on pense qu'elle a été découverte par Jean Bernoulli (1667-1748, Suisse). Le marquis de L'Hôpital payait ce dernier pour faire de la recherche en mathématique et avait le droit de publier en son nom les résultats trouvés.

Proposition 3.45 (règle de L'Hôpital)

Si deux fonctions g et h sont continues et dérivables dans un voisinage de a avec $g(a) = h(a) = 0$ et que la limite de $g'(x)/h'(x)$ existe quand $x \to a$, alors la limite de $g(x)/h(x)$ existe aussi et

$$\lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} \ .$$

Démonstration : La preuve consiste à appliquer le théorème de Rolle à la fonction

$$\phi(x) = \big(g(x) - g(a)\big)\big(h(b) - h(a)\big) \ - \ \big(h(x) - h(a)\big)\big(g(b) - g(a)\big)$$

et trouver $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)} = \frac{g'(c)}{h'(c)} \; .$$

quand b tend vers a, c tend aussi vers a, ce qui donne la limite voulue. Le détail est laissé au lecteur (voir exercices de TD). □

Il existe d'autres versions (en $\pm\infty$, pour des limites infinies etc.) qu'on pourra trouver dans d'autres cours en ligne.

Exemple :

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x+\sin x}{e^{3x}-1}$. Cette fonction n'est pas définie en $x = 0$ à cause de la division par $e^0 - 1 = 0$. Peut-on la prolonger par continuité en zéro ? La limite est une forme indéterminée du type « 0/0 ». On applique la règle de L'Hôpital. La dérivée de $g : x \mapsto x + \sin x$ est $g'(x) = 1 + \cos x \to 2$ quand $x \to 0$. La dérivée de $h : x \mapsto e^{3x} - 1$ est $h'(x) = 3e^{3x} \to 3$ quand $x \to 0$. Comme $g'(x)/h'(x)$ tend vers $2/3$ quand x tend vers 0, on est bien dans le cadre d'application du résultat ci-dessus et

$$\frac{x+\sin x}{e^{3x}-1} \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} \frac{2}{3} \; .$$

• **Théorème de la limite de la dérivée :** voici un autre résultat qui peut être utile quand une fonction n'est pas clairement dérivable en un point. On donne ici l'énoncé « à droite » mais on peut aussi écrire symétriquement l'énoncé « à gauche » et les regrouper pour avoir la dérivation des deux côtés par le théorème 3.20.

Proposition 3.46 (limite de la dérivée)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b]$. Supposons que la dérivée f' admettent en outre une limite à droite en a quand $x \to a^+$. Alors f est dérivable à droite en a et $f'(a_+) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$.

Démonstration : Soit $x > a$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c(x) \in]a,x[$ tel que

$$f'(c(x)) = \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$$

(on notera que $c : x \mapsto c(x)$ n'est pas forcément continue). Quand x tend vers a, $c(x)$ tend aussi vers a car $c(x) \in]a,x[$. Par hypothèse, $f'(c(x))$ a donc une limite finie et il en est de même pour le taux d'accroissement $\frac{f(a)-f(x)}{a-x}$ quand $x \to a^+$. Par définition, on vient de montrer que f est dérivable à droite en a. □

Exemple :

On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}\sin(x)$. Il s'agit bien une fonction continue sur $[0,+\infty[$ mais la dérivabilité en 0 pose problème car la racine carrée n'est pas dérivable en 0 et donc on ne peut appliquer la proposition de dérivation des produits. Mais si $x > 0$, on a bien que f est dérivable et $f'(x) = \sqrt{x}\cos x + \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$. Comme $\sin x \sim x$ en 0, $f'(x) \to 0$ quand $x \to 0$. La proposition précédente nous dit donc que f est bien dérivable à droite en zéro et $f'(0) = 0$.

• **Calculs d'erreurs :** le principe de linéarisation nous dit que si f est dérivable en x et que $x + \delta x$ est proche de x, alors

$$f(x + \delta x) = f(x) + f'(x)\delta x + r(\delta x) \quad \text{avec } r(\delta x)/\delta x \to 0 \text{ quand } \delta x \to 0.$$

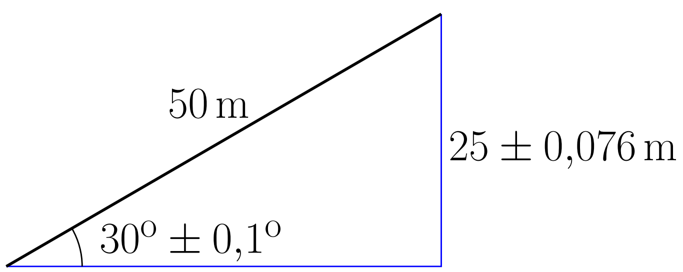
Si on connaît une erreur δx dans une mesure, l'erreur $\delta f = f(x + \delta x) - f(x)$ sur la quantité f vérifie donc $\delta f = f'(x)\delta x + r(\delta x)$. Dans les sciences appliquées, il est alors d'usage de négliger les termes d'ordre petit en δx. Dans ce cas, on retrouve l'estimation d'erreurs

$$\delta f \simeq f'(x)\delta x\ .$$

Notons que nos théorèmes mathématiques permettent de retrouver des principes connus de l'estimation d'erreur comme « *l'incertitude relative d'un produit est la somme des incertitudes relatives des facteurs* ». En effet, on a

$$\begin{aligned}\frac{\delta(fg)}{(fg)(x)} &\simeq \frac{1}{(fg)(x)}(fg)'(x)\delta x = \frac{1}{(fg)(x)}\big(f'(x)g(x) + g'(x)f(x)\big)\delta x \\ &= \frac{f'(x)\delta x}{f(x)} + \frac{g'(x)\delta x}{g(x)} \simeq \frac{\delta f}{f(x)} + \frac{\delta g}{f(x)}\ .\end{aligned}$$

Faisons pour finir une petite application numérique. Imaginons que l'on creuse un tunnel qui s'enfonce dans une montagne selon une pente montante de $30^{\text{o}} \pm 0{,}1^{\text{o}}$ pendant 50 m. On pense donc gagner en hauteur $50\sin(30^{\text{o}}) = 25$ m. Mais quelle est l'erreur possible à cause de l'imprécision de la pente ? Notre fonction mesurant l'altitude gagnée en fonction de l'angle est $f : x \mapsto 50\sin(\frac{\pi}{180}x)$. Attention : il est très important de passer en radian car les dérivées des fonctions trigonométriques que l'on apprend correspondent à ces fonctions avec des entrées en radians ! On peut donc calculer que $f'(30) = 50 \times \frac{\pi}{180}\cos(\frac{\pi}{6}) = 0{,}7557\ldots$. En multipliant ce facteur par $\delta x = 0{,}1$, on trouve alors notre gain en altitude en incluant l'erreur possible



5 Quelques applications supplémentaires

5.1 Point fixe stable

Nous allons montrer le critère suivant de stabilité de point fixe pour les suites itératives $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition 3.47

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f \in \mathcal{C}^1(I,I)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui laisse stable I. Supposons qu'il existe un point fixe $x_* \in I$ de f tel que $|f'(x_*)| < 1$. Alors x_* est asymptotiquement stable dans le sens où il existe $\delta > 0$ tel que, si $|u_0 - x_*| < \delta$, alors la suite (u_n) définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ reste dans $]x_* - \delta, x_* + \delta[$ et

$$u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} x_* \; .$$

Démonstration : Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, sa dérivée f' est continue. On a $|f'(x_*)| < 1$, donc il existe une petite marge $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(x_*)| + \varepsilon := \alpha < 1$. Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]x_* - \delta, x_* + \delta[$ on a $|f'(x) - f'(x_*)| < \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire, on a donc $|f'(x)| < \alpha < 1$ pour tout $x \in I \cap]x_* - \delta, x_* + \delta[$. L'inégalité des accroissements finis nous assure alors que

$$\forall x \in I \cap]x_* - \delta, x_* + \delta[\; , \quad |f(x) - f(x_*)| \leq \alpha |x - x_*| \; .$$

En utilisant que x_* est un point fixe, si $u_n \in I \cap]x_* - \delta, x_* + \delta[$ et si $u_{n+1} = f(u_n)$, on a donc

$$|u_{n+1} - x_*| \leq \alpha |u_n - x_*| \; .$$

Comme $\alpha < 1$, on a en particulier que $|u_{n+1} - x_*| < |u_n - x_*| < \delta$ et donc que $u_{n+1} \in I \cap]x_* - \delta, x_* + \delta[$. Par récurrence, on obtient que si initialement $u_0 \in I \cap]x_* - \delta, x_* + \delta[$, alors la suite (u_n) reste dans cet intervalle et

$$\forall n \geq 0 \; , \quad |u_n - x_*| \leq \alpha^n |u_0 - x_*| \; .$$

La suite (u_n) converge donc exponentiellement vite vers le point fixe x_*. $\square$

Exemple :

On reprend le cas de la suite logistique $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{5}{2}x(1-x)$. Pour le paramètre $\lambda = \frac{5}{2}$, on est dans la zone $]2,3]$ où on s'attend à avoir 0 comme point fixe répulsif et un autre point fixe $x_* \in]0,1[$ vers lequel toutes les suites non nulles convergent. Ce second point fixe est ici $x_* \neq 0$ tel que $x_* = f(x_*) = \frac{5}{2}x_*(1-x_*)$. On trouve donc que $x_* = \frac{3}{5}$. On a $f'(x_*) = \frac{5}{2}(1-2x_*) = -\frac{1}{2}$. Comme $|f'(x_*)| = \frac{1}{2} < 1$, le résultat ci-dessus montre bien que ce second point fixe est attractif. Il faudrait encore travailler un peu en étudiant plus globalement la fonction pour vérifier que son attraction s'exerce sur tout $]0,1[$ et pas seulement un petit voisinage $]x_* - \delta, x_* + \delta[$.

5.2 À la recherche d'un terrain plat

On note C le cercle unité, que l'on peut aussi voir comme le segment $[0{,}2\pi]$ dont on a recollé les extrémités, ou encore comme $\mathbb{R}$ quotienté par la relation d'équivalence modulo 2π. On a le résultat suivant.

Proposition 3.48

Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le cercle. Alors il existe deux points diamétralement opposés où f prend les mêmes valeurs. Autrement dit, il existe un angle $\theta_* \in C$ tel que $f(\theta_*) = f(\theta_* + \pi)$.

Démonstration : Si $f(0) = f(\pi)$, on a gagné. Sinon, on pose $g(\theta) = f(\theta + \pi) - f(\theta)$ qui est une fonction continue de l'angle θ. On a $g(0) = f(\pi) - f(0) := \alpha \neq 0$ mais aussi $g(\pi) = f(2\pi) - f(\pi) = f(0) - f(\pi) = -\alpha$. Comme α et $-\alpha$ sont de signes opposés, le théorème des valeurs intermédiaires nous fournit un angle intermédiaire θ_* tel que $g(\theta_*) = 0$, c'est-à-dire $f(\theta_*) = f(\theta_* + \pi)$. $\square$

Voici une illustration et application simple de ce résultat. Imaginons que nous voulons poser un objet avec deux pieds à plat sur un terrain accidenté. Par exemple, on essaye de se ternir droit les deux jambes tendues. On suppose que l'altitude du terrain est continue (pas de reliefs type muret). A priori, on peut avoir le pied droit plus haut que le gauche par exemple, et on va donc être déséquilibré. Mais si on fait un demi-tour, c'est l'inverse. La proposition plus haut nous dit juste qu'il existe donc une orientation où nos deux pieds seront à la même altitude et donc où on sera stable. C'est évident sur un terrain type plan incliné (on se met en face de la pente par exemple) mais moins clair si le terrain est bosselé.

Il existe d'autres généralisations à des dimensions plus grandes ou à des formes géométriques plus complexes que le cercle. Certaines ont des applications importantes en théorie des jeux (et donc en maths financières) ou en géométrie. Une généralisation du résultat précédent, appelée théorème de Borsuk-Ulam, nous dit par exemple que si on a deux fonctions continues sur une sphère, il existe deux points diamétralement opposés où les deux fonctions ont même valeurs. Ainsi, il existe toujours sur Terre deux endroits aux antipodes l'un de l'autre où il règne la même température et la même pression.

5.3 Cylindre de contrôle pour les équations différentielles

La technique du cylindre de contrôle est très utile pour montrer que les solutions d'une équation différentielle restent dans une zone donnée. Prenons l'exemple d'une équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$ modélisant un phénomène pour lequel $x(t)$ est censé rester positif (une concentration chimique par exemple). On part donc de $x(0) > 0$, mais est-ce que la solution engendrée par l'équation différentielle reste toujours positive ensuite ? Supposons que l'on ait $f(0) > 0$. Comme $x(t)$ est dérivable, elle est continue. La technique du cylindre que l'on a vu plus haut nous dit que $x(t)$ reste positif pour $t > 0$ petit (définition de la continuité) et que si $x(t)$ devient négatif à un moment, il existe $t_0 > 0$ tel que $x(t_0) = 0$ (propriété des valeurs intermédiaires). Prenons t_0 comme le premier temps où cela arrive (à cet endroit, on triche un peu car on admet son existence, mais il est possible de faire cela plus proprement). Pour ce t_0, on a $x'(t_0) = f(x(t_0)) = f(0) > 0$. Le lien entre dérivée et variations nous dit que $x(t)$ est donc strictement croissante près de t_0 et donc que $x(t) < 0$ pour $t < t_0$ proche de t_0. Mais alors c'est que $x(t)$ avait déjà quitté le cylindre $x \geq 0$ avant t_0, ce qui est contradictoire avec notre choix de t_0. On vient donc de justifier que $x(t)$ reste strictement positif pour tout $t > 0$, sans même avoir de formule pour cette solution.

5.4 Partage d'un gâteau - première version

On partage une bûche de longueur unité en la coupant à la position x. Autrement, pour $x \in [0,1]$, on coupe deux parts : la part $[0,x]$ et la part $[x,1]$ (la tranche pile sur x étant d'épaisseur nulle, ce n'est pas important de la compter dans les deux parts). On souhaite partager le gâteau entre deux personnes A et B de façon à ce qu'il n'y ait aucun jaloux. Le souci est que la bûche n'est pas homogène et que les préférences de A et B ne sont pas les mêmes (l'un peut vouloir la part avec le plus de chocolat, l'autre juste la plus grosse etc.). Pour chaque $x \in [0,1]$, on demande à A et B de noter le partage « A reçoit la part $[0,x]$ et B reçoit la part $[x,1]$ ». Soit $f(x)$ la note que A donne à la situation et $g(x)$ la note de B. On suppose que les deux notes sont continues et normalisées de façon à ce que $f(x) > 0$ veut dire que A préfère bien la part reçue et $f(x) < 0$ veut dire que A préférerait recevoir l'autre part (et idem pour g). Quand x vaut 0, il est clair que $f(0) < 0$ et que $g(0) > 0$ car chacun va préférer avoir tout le gâteau plutôt que rien. Inversement $f(1) > 0$ et $g(1) < 0$. On pose $h = g - f$ qui est une fonction continue sur $[0,1]$ et telle que $h(0) > 0$ et $h(1) < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une position de découpe $x \in [0,1]$ telle que $h(x) = 0$, c'est-à-dire que $f(x) = g(x)$. Si $f(x) = g(x) \geq 0$ alors les deux personnes préfèrent la part qu'on leur propose. Si $f(x) = g(x) < 0$ alors aucun des deux n'aime la répartition des parts proposée et il suffit d'inverser les parts pour que tout le monde soit content.

Pour la culture, il existe un théorème similaire avec autant de convives que voulu, mais il faut passer à une sorte de généralisation du théorème des valeurs intermédiaires à des dimensions plus grandes. Énoncer comme ceci, ce résultat paraît anodin, surtout si on le classe dans la branche des mathématiques appelée *théorie des jeux*. Mais il faut remplacer un partage de gâteau par des opérations boursières et les jeux ludiques par le jeu en bourse pour comprendre que ce type de résultat intervient en mathématiques financières (dans des versions plus développées).

5.5 Partage d'un gâteau - deuxième version

Nous voulons partager un cake à la confiture entre deux personnes, qui contient une masse a de pâte et b de confiture. Le problème est que la confiture n'est pas équitablement répartie dans le cake et qu'on souhaite vraiment que les deux personnes aient la même quantité de pâte et de confiture. Imaginons de nouveau que l'on tranche transversalement le gâteau et que l'on note la position $x \in [0,1]$ comme pour l'exemple précédent. Si la répartition entre pâte et confiture n'est pas équitable, il sera impossible de trancher transversalement le gâteau en deux avec une répartition parfaite. Mais on peut le faire en utilisant deux coupes (et donc trois parts).

On commence par remarquer qu'il existe une position $x_m \in]0,1[$ telle que la masse du morceau $[0,x_m]$ du cake soit la même que la masse du morceau $[x_m,1]$. Ces masses sont donc égales à $m = (a+b)/2$, qui est celle d'un demi-gâteau. Pour tout $x \in [0,x_m]$, on note $y(x)$ l'endroit de la deuxième coupe telle que le morceau $[x,y(x)]$ a pour masse m. On note $p(x)$ la masse de pâte dans le morceau $[x,y(x)]$, qui contiendra donc aussi $m - p(x)$ masse de confiture. Enfin, on admet que $y(x)$ et $p(x)$ dépendent continûment de x, ce qui est raisonnable physiquement.

Notre but étant la répartition équitable des masses, on veut trouver x tel que $p(x) = a/2$ (répartition égale de la pâte), ce qui impliquera alors que $m - p(x) = b/2$ (répartition égale de la confiture). Si $x = 0$ convient, il n'y a rien à faire. Sinon, cela veut dire que $p(0)$ est au-dessus ou en-dessous de la masse moitié $a/2$. Mais l'autre part correspond à la position $x = x_m$ et donc $p(x_m)$ est de l'autre côté de la masse moitié $a/2$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe une position $x_* \in [0,x_m]$ telle que la part $[x_*,y(x_*)]$ contient exactement la même quantité de pâte et de confiture que les parts $[0,x_*] \cup [y(x_*),1]$.

Indispensable à maîtriser avant même ce chapitre :

- Savoir manipuler les limites de fonctions
- Savoir calculer des dérivées et faire des tableaux de variation

À connaître en priorité :

- Les définitions « epsilon-delta » des limites et de la continuité.
- Les différents critères de continuité et leur utilisation aux prolongements et raccords.
- Définition de la tangente et la linéarisation du théorème 3.38.
- Les quatres résultats fondamentaux : théorèmes des valeurs intermédiaires, des valeurs extrêmes, des accroissements finis et les inégalités des accroissements finis.

Utile pour la suite :

- La règle de L'Hôpital ou le théorème de la limite de la dérivée, les propositions 3.45 et 3.46, sont parfois incluses comme des résultats de cours. Elles peuvent être très utiles et c'est donc bien de les connaître même si ce ne sont pas les résultats les plus fondamentaux de ce chapitre.
- Les autres exemples d'application ne sont pas du cours à connaître par cœur, mais peuvent être étudiés comme illustrations des méthodes et des théorèmes. Certains, comme l'existence du point fixe (théorème 3.29) ou le point fixe contractant (proposition 3.47) sont très classiques et il peut être utile de se rappeler les techniques utilisées dans leurs démonstrations.