UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

TD 3 : applications linéaires

*Les exercices * sont des exercices de base à maîtriser absolument pour avoir l'UE.*
*Les exercices ** sont plus avancés mais peuvent être exigés lors d'un examen.*
*Les exercices *** sont des compléments pour aller plus loin ou pour la culture.*

Exercice 1* : Parmi les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par les relations suivantes, lesquelles sont linéaires ?

$$f_1(x,y) = (x+y, x-y) \quad f_2(x,y) = (|x|+|y|, 2) \quad f_3(x,y) = (x,-y)$$
$$f_4(x,y) = (xy, y) \quad f_5(x,y) = (x-y+1, x) \quad f_6(x,y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

Exercice 2* : Pour chacune des applications ci-dessous, démontrer qu'elle est linéaire, et determiner son noyau, son image ainsi qu'une base de chacun de ces sous-espaces.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, 3x-y) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, -4x-6y) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z) \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, 2x+y-z) \end{array}$$

Exercice 3 :** Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de F. On note φ l'unique application linéaire de E dans F telle que $\varphi(e_i) = u_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

1. Déterminer l'image par ϕ d'un point de E de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base B ;
2. Démontrer que φ est injective si et seulement si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille libre ;
3. Démontrer que φ est surjective si et seulement si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille génératrice de F.

Exercice 4 :** Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

1. Rappeler la définition de "f est injective" (resp. surjective, bijective).
2. Montrer que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.
3. On suppose dans cette question que $n = m$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.
4. Montrer que si f est injective alors $n \leqslant m$.
5. Montrer que si f est surjective alors $n \geqslant m$.
6. Les réciproques des deux implications précédentes sont elles vraies ? On justifiera sa réponse par des démonstrations ou des exemples.

Exercice 5 :** . Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. On définit par récurrence $f^{\circ k}$ de la façon suivante : $f^{\circ 0} = \mathrm{Id}_E$ et, si $n \geq 1$, $f^{\circ n} = f \circ f^{\circ(n-1)}$. On dit que f est *nilpotente* s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $f^{\circ k}$ est l'application constante nulle. L'ordre de nilpotence de f est alors le plus petit entier $m \geq 1$ tel que $f^{\circ m} = 0$.

1. Démontrer que $f \circ f$ est l'application constante nulle si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.
2. On suppose que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$. Démontrer que la dimension de E, n, est un entier pair.
3. On suppose maintenant que $n \geq 1$ et que f est nilpotente d'ordre m. Démontrer qu'il existe un vecteur $v \in E$ tel que $f^{\circ m}(v) \neq 0_E$. Pour un tel vecteur v, démontrer que la famille $(v, f(v), ..., f^{\circ m}(v))$ est libre.
4. En déduire que si f est nilpotente, alors $f^{\circ n}$ est l'application constante nulle.

Exercice 6 :** Rappelons que $\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que la dérivation $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer son image.
3. Déterminer son noyau.
4. L'application D est-elle surjective, injective, bijective ?
5. En utilisant un raisonnement par l'absurde, déduire de la question précédente que l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 7* :** Les transformations usuelles qui servent dans les logiciels de graphisme ou de gestion d'images sont en partie des transformations linéaires du plan $\mathbb{R}^2$. Par exemple, la rotation d'un quart de tour à droite est donnée par l'application linéaire $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (y, -x) \in \mathbb{R}^2$. Pour chaque application linéaire ci-dessous, décrire la transformation géométrique correspondante.

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (-x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x/2, y/2) \in \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (2x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x + y, y) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 8* :** On veut apprendre à une intelligence artificielle à jouer à un jeu. Lors d'une des étapes d'apprentissage, l'IA doit être capable d'associer à deux points du plan $\mathbb{R}^2$ un certain score. Dans une première version simple, le programme de l'IA va supposer que ce score dépend linéairement des points du plan, c'est-à-dire que le score est donné par une fonction

$$((x, y), (x', y')) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ \longmapsto \ S(x, y, x', y') = ax + by + a'x' + b'y' \ .$$

Lors de la phase d'apprentissage, on donne à l'IA des exemples de scores dans des situations connues

$$\begin{array}{lll} (x, y) = (0, 1) & (x', y') = (0, 1) & S = 0 \\ (x, y) = (1, 0) & (x', y') = (0, 1) & S = 4 \\ (x, y) = (1, 1) & (x', y') = (1, 0) & S = 4 \\ (x, y) = (2, 0) & (x', y') = (1, 1) & S = 9 \ . \end{array}$$

Trouver les paramètres du score linéaire collant à ces exemples et prédire le score calculé par l'IA dans le cas inconnu

$$(x, y) = (0, 3) \qquad (x', y') = (2, 1) \ .$$

Exercice 9* : Polynômes d'interpolation de Lagrange.** Soit $d \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}[X]_{\leq d}$ l'ensemble des applications $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe des nombres réels $(a_0, \ldots, a_d)$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k.$$

On note $\boldsymbol{t} = (t_0, \ldots, t_d)$ une famille de $d+1$ nombres réels deux à deux distincts. On note $\text{év}_{\boldsymbol{t}}$ l'application de $\mathbb{R}[X]_{\leq d}$ dans $\mathbb{R}^{d+1}$ qui envoie une application P sur le $(d+1)$-uplet $(P(t_0), P(t_1), \ldots, P(t_d))$.

1. Démontrer que $\mathbb{R}[X]_{\leq d}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Démontrer que $(1, \ldots, X^d)$ est une base de $\mathbb{R}[X]_{\leq d}$, quelle est la dimension de cet espace ?
3. Démontrer que $\text{év}_{\boldsymbol{t}}$ est linéaire.
4. On considère l'application polynomiale P_i donnée par

$$t \longmapsto \prod_{\substack{0 \leq k \leq d \\ k \neq i}} \frac{t - t_k}{t_i - t_k}$$

   (a) Déterminer $\text{év}_{\boldsymbol{t}}(P_i)$.
   (b) Que peut-on en déduire sur l'application $\text{év}_{\boldsymbol{t}}$?
   (c) Que peut-on dire de la famille $(P_0, \ldots, P_d)$?

Exercice 10* :** Dans l'exercice , on a défini l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ formé des suites de nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$ est fini. Soit $P = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un élément de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. On note $p \in \mathbb{N}$ un entier tel que $a_k = 0$ si $k > p$. On considère l'application f_P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $x \mapsto \sum_{i=0}^{p} a_i x^i$. Démontrer que l'application $P \mapsto f_P$ définit un isomorphisme d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ sur l'espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11* :** On note $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont deux fois dérivables et dont la dérivée seconde f'' est continue. On note a, b des nombres réels.

1. Démontrer que $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'application $f \mapsto f'' + af' + bf$ est linéaire.
   On note E le noyau de cette application linéaire.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. À quelle condition $t \mapsto e^{\alpha t}$ appartient-elle à l'espace E ?
4. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}^2$ qui à une application f associe le couple $(f(0), f'(0))$. Démontrer que φ une application linéaire.
5. On suppose que l'équation $X^2 + aX + b = 0$ a deux solutions réelles distinctes. Démontrer que φ est surjective.
6. Soit f un élément du noyau de φ.
   (a) Que vaut $f''(0)$?
   (b) Démontrer qu'il existe une constante $\eta < 1$ telle que pour tout $x \in]-\eta, \eta[$, on ait $|f'(x)| \leq |x|$ et $|f(x)| \leq \frac{1}{2}|x|^2$.
   (c) Notons $C = |a| + |b|$. Déduire de la question précédente que $|f''(x)| \leq C|x|$ pour $x \in]-\eta, \eta[$.
   (d) Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-\eta, \eta[$, $|f(x)| \leq C^n |x|^{n+2}$
   (e) Démontrer qu'il existe un intervalle contenant 0 tel que la restriction de f à I soit la fonction constante nulle

7. Soit $f \in E$ et $a \in \mathbb{R}$ soit $T_a(f)$ l'application $t \mapsto f(t-a)$.
   (a) Démontrer que $T_a(f) \in E$.
   (b) Démontrer que T_a est linéaire. Quel est son noyau ? Quelle est la composée $T_{-a} \circ T_a$? Quelle est son image ?
   (c) Exprimer simplement $\varphi(T_a(f))$.
8. soit $f \in \ker(\varphi)$. On considère

$$A = \{ t \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in [0,t], f(x) = f'(x) = 0 \}$$

   (a) Démontrer que $A = \mathbb{R}_+$ (On pourra raisonner par l'absurde et considérer la borne supérieure de A).
   (b) Démontrer que f est l'application constante nulle.
9. Démontrer que φ est injective.
10. Que peut-on en déduire sur la dimension de l'espace E ?
11. On suppose maintenant que l'équation $X^2 + aX + b$ n'a pas de solutions réelles. Soit $\alpha + i\theta$ une des deux solutions complexes.
    (a) Donner l'autre solution complexe.
    (b) Vérifier que l'application $t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\theta t)$ appartient à l'espace E.
    (c) Donner dans ce cas une base de l'espace vectoriel E.
12. Étudier le cas où l'équation $X^2 + aX + b$ n'a qu'une solution.