Conjectures uniformes sur les variétés abéliennes

Gaël RÉMOND

août 2017

Abstract. — We consider several conjectures on abelian varieties over number fields whose common feature is a bound that depends only on the dimension of the variety and the degree of the number field. For example, Coleman's conjecture predicts that only a finite number of rings can occur as endomorphism rings once these two parameters are fixed. We show that this conjecture implies the existence of a small polarization as well as a uniform isogeny conjecture (without Faltings height) which in turn implies the uniform torsion conjecture. We then discuss several variants of the Lang-Silverman conjecture on heights and implications between them. In particular, we show how a rather weak version is, under Coleman's conjecture, equivalent to much more precise versions. We build on Bertrand's work to give a bound explicit in terms of the polarization.

1 Introduction

1.1 Conjecture de Coleman

Nous considérons la conjecture suivante concernant les variétés abéliennes sur les corps de nombres.

Conjecture E *Pour tout couple d'entiers naturels non nuls (d, g) il existe un réel c tel que, si K est un corps de nombres de degré d et A une variété abélienne de dimension g sur K, alors le discriminant de l'anneau des endomorphismes* $\mathrm{End}A$ *est au plus c.*

Précisons qu'ici l'anneau $\mathrm{End}A$ est formé des endomorphismes de A définis sur K (voir les conventions générales à la fin de cette introduction) et que nous appelons discriminant la valeur absolue du déterminant de la matrice $s \times s$ de terme général $\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A}(\varphi_i\varphi_j)$ où $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ est une base quelconque de $\mathrm{End}A$ sur $\mathbb{Z}$.

Cette conjecture E peut être attribuée à Coleman d'après [BFGR] : la version citée dans cet article diffère de la nôtre (nombre fini d'anneaux $\mathrm{End}A$ à g, d fixés) mais lui est équivalente puisqu'à discriminant borné il n'y a qu'un nombre fini d'anneaux possibles (à isomorphisme près).

Signalons aussi une fois pour toutes que nous pourrions considérer une version affaiblie de la conjecture E en autorisant la borne c à dépendre non seulement de $d = [K : \mathbb{Q}]$ mais de K lui-même. Cette remarque concerne tous les énoncés qui suivent qui valent aussi lorsque la dépendance en d est partout remplacée par une dépendance moins précise en K.

Notre premier résultat montre que, sous la conjecture E, nous pouvons aussi borner de manière uniforme d'autres quantités associées à une variété abélienne.

Théorème 1.1 *Si la conjecture E vaut, pour tout couple d'entiers naturels non nuls (d, g) il existe un réel c tel que, si K est un corps de nombres de degré d et A une variété abélienne de dimension g sur K, alors*

(1) *il existe un faisceau inversible $\mathcal{L}$ ample et symétrique sur A tel que* $\deg_{\mathcal{L}} A \leq c$ *;*
(2) *pour toute variété abélienne A' sur K isogène à A sur K il existe une K-isogénie $\varphi: A \to A'$ avec* $\deg \varphi \leq c$ *;*
(3) $\mathrm{Card} A(K)_{\mathrm{tors}} \leq c$.

Les assertions (1) et (2) résultent assez directement des méthodes de [GR2]. Dans ce dernier texte sont établies des bornes explicites et inconditionnelles mais non uniformes c'est-à-dire qui, outre $g = \dim A$ et $d = [K : \mathbb{Q}]$, font apparaître la hauteur de Faltings stable $h_F(A)$ de A. Pour les rappeler rapidement, notons

$$\kappa(A) = \left((14g)^{64g^2} d \max(1, h_F(A), \log d)^2\right)^{1024g^3}.$$

Alors (1) et (2) valent avec $c = \kappa(A)$. En outre, les énoncés de [GR2] permettent aussi de montrer une version non uniforme de la conjecture E : le discriminant de $\mathrm{End} A$ est au plus $\kappa(A)^{2g}$ (voir proposition 2.12).

Le fait (3) que la conjecture E entraîne la conjecture uniforme de torsion nous demandera en revanche plus de travail. Nous montrerons l'énoncé plus précis suivant.

Proposition 1.2 *Soit A une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres K. Si c est un réel tel que, pour toute variété abélienne A' sur K isogène à A sur K, il existe une K-isogénie $\varphi: A \to A'$ avec $\deg \varphi \leq c$, alors $\mathrm{Card} A(K)_{\mathrm{tors}} \leq 4^g c^{4g^2+1} [K : \mathbb{Q}]^{4g}$.*

En particulier, pour $c = \kappa(A)$, nous obtenons une majoration explicite du nombre de points de torsion de A. Nous pouvons même montrer un peu plus précisément $\mathrm{Card} A(K)_{\mathrm{tors}} \leq \kappa(A)^{4g+1}$ (voir proposition 2.9). Même s'il existe plusieurs autres méthodes pour borner ce nombre, il ne semble pas qu'une expression totalement explicite ait jamais été publiée. Dans le cas d'une variété abélienne simple et principalement polarisée, David (voir [D1] et [D2]) a donné des bornes où les exposants du degré et de la hauteur sont meilleurs mais la dépendance en g n'est pas explicite.

La démonstration du théorème 1.1 est elle aussi explicite : elle fournit une formule en fonction de la constante de la conjecture E (voir proposition 2.13). On peut par exemple en déduire que si la conjecture E donne une borne polynomiale en d alors il en va de même des majorations produites par le théorème 1.1. L'argument peut aussi être limité à une classe de variétés abéliennes stable par isogénies et produits : si la conjecture E vaut pour les éléments d'une telle classe alors les bornes du théorème 1.1 s'en déduisent pour les éléments de cette classe.

Rappelons aussi que la conjecture uniforme de torsion est connue lorsque $g = 1$ par le résultat de Merel [Me] (rendu explicite par Parent [Par]) et dans le cas des variétés abéliennes CM (Silverberg [Si], voir aussi [GR3]). Pour celles-ci la conjecture E vaut également, comme conséquence du résultat de Tsimerman [Ts].

1.2 Minoration de hauteur

Nous allons maintenant décrire plusieurs versions de la conjecture de Lang-Silverman pour faire ensuite le lien entre elles sous la conjecture E. Le principe commun est de minorer des valeurs de la hauteur de Néron-Tate sur $A(K)$ en fonction d'une hauteur de A. Lang a d'abord formulé une conjecture pour les courbes elliptiques (voir [S2, p. 233]) puis Silverman a proposé une version générale [S1, p. 395]. Dans les deux cas, la hauteur de A employée était écrite comme la somme d'une hauteur modulaire et d'une contribution des places de mauvaise réduction.

Dans ce texte, nous utilisons plutôt la hauteur de Faltings relative (comme dans [CS, p. 263]). Pour cela, nous notons $h_{F,K}(A)$ la hauteur de Faltings de A sur K (c'est-à-dire calculée à l'aide d'un modèle de Néron sur l'anneau des entiers de K, sans faire d'extension pour avoir un modèle semi-stable) puis, pour alléger, $h_1(A) = \max(1, h_{F,K}(A))$.

Ensuite, pour minorer de manière intéressante la hauteur de Néron-Tate d'un point $P \in A(K)$, il faut bien entendu supposer que celle-ci n'est pas nulle c'est-à-dire que P n'est pas un point de torsion. Lorsque A est une courbe elliptique ou, plus généralement, une variété abélienne simple, il est raisonnable de se limiter à cette hypothèse. Pour une variété arbitraire en revanche, elle ne suffit pas comme l'on s'en convainc en considérant une variété produit $A = B \times C$ et un point $P = (Q, 0)$ où $Q \in B(K) \setminus B(K)_{\text{tors}}$: la hauteur de Q ne peut pas contrôler la hauteur de C. Pour cette raison, la conjecture énoncée par Silverman [S1, p. 395] est fausse. S. David [D2] suggère de remplacer l'hypothèse que P n'est pas de torsion par : P n'est pas torsion sur End$A$ (ce qui signifie que P n'est de torsion modulo aucune sous-variété abélienne stricte de A). Ceci élimine le problème précédent mais semble un peu trop fort : par exemple, si $A = A_0^n$ où A_0 est simple, il n'y a pas de raison d'aller au-delà des points de torsion (puisque les hauteurs de A et de A_0 sont comparables). Ainsi nous introduisons une hypothèse intermédiaire en ne considérant que la torsion sur le centre $Z(\mathrm{End}A)$ de l'anneau End$A$ (elle se traduit aussi en disant que P n'est pas de torsion modulo certaines sous-variétés abéliennes strictes — celles qui sont stables sous End$A$ — voir ci-dessous et le lemme 3.3).

Voici donc notre première version de la conjecture où $h_{\mathcal{L}}$ désigne la hauteur de Néron-Tate associée à une polarisation $\mathcal{L}$.

Conjecture 1.3 *Pour tout couple d'entiers naturels non nuls (d, g) il existe un réel $c > 0$ tel que, si K est un corps de nombres de degré d, A une variété abélienne de dimension g sur K, $\mathcal{L}$ une polarisation principale sur A et $P \in A(K)$ un point qui n'est pas de torsion sur $Z(\mathrm{End}A)$, alors $h_{\mathcal{L}}(P) \geq c^{-1} h_1(A)$.*

Dans un premier temps, nous avons donc conservé une polarisation principale comme Silverman [S1] et David [D2]. Pour traiter le cas général, nous sommes guidés par un résultat de Bertrand [B1] qui montre une minoration inconditionnelle proportionnelle à $(\deg_{\mathcal{L}} A)^{1/g}$ (sous l'hypothèse forte que P n'est pas de torsion sur End$A$). Toutefois ceci ne peut pas être combiné directement avec la hauteur : une minoration en $(\deg_{\mathcal{L}} A)^{1/g} h_1(A)$ serait fausse (voir paragraphe 3.4). Pour obtenir un énoncé plausible, nous introduisons les composantes isotypiques de A : ce sont les sous-variétés abéliennes de A isogènes à une puissance d'une variété abélienne simple et maximales pour l'inclusion.

Ceci posé, notre deuxième avatar de la conjecture est le suivant.

Conjecture 1.4 *Pour tout couple d'entiers naturels non nuls (d, g) il existe un réel $c > 0$ tel que, si K est un corps de nombres de degré d, A une variété abélienne de dimension g sur K, $\mathcal{L}$ une polarisation sur A et $P \in A(K)$ un point sans torsion sur* End$A$, *alors*

$$h_{\mathcal{L}}(P) \geq c^{-1} \sum_{i=1}^{s} (\deg_{\mathcal{L}} A_i)^{1/\dim A_i} h_1(A_i)$$

où $A_1, \ldots, A_s$ sont les composantes isotypiques de A.

Enfin, une autre façon d'envisager la question, inspirée par le résultat de David [D2], consiste à faire apparaître une sous-variété obstructrice : lorsque le point P ne satisfait pas la minoration voulue, on contrôle une sous-variété abélienne B telle que $P \in B + A_{\text{tors}}$. Ce point de vue nous conduit à la formulation suivante où la variété obstructrice B est en fait indépendante de P.

Conjecture 1.5 *Pour tout couple d'entiers naturels non nuls* (d, g) *il existe un réel* $c > 0$ *tel que, si* K *est un corps de nombres de degré* d*,* A *une variété abélienne de dimension* g *sur* K *et* $\mathcal{L}$ *une polarisation sur* A*, alors il existe une sous-variété abélienne stricte* B *de* A *vérifiant* $\deg_{\mathcal{L}} B \leq c \deg_{\mathcal{L}} A$ *et un entier naturel* N *avec* $1 \leq N \leq c$ *de sorte que, pour* $P \in A(K)$*, ou* $h_{\mathcal{L}}(P) \geq c^{-1} h_1(A)$ *ou* $NP \in B$*.*

Signalons que cette conjecture serait fausse avec une majoration de degré plus forte $\deg_{\mathcal{L}} B \leq c(\deg_{\mathcal{L}} A)^{1-\varepsilon}$ où $\varepsilon > 0$ (voir paragraphe 3.4).

Nous pouvons énoncer le second résultat principal de ce texte.

Théorème 1.6 *Si la conjecture E est vraie, alors les conjectures 1.3, 1.4 et 1.5 sont équivalentes.*

Cela signifie en particulier que si la conjecture E (conjecture de Coleman) et la conjecture 1.3 (variante assez proche de la conjecture de Silverman) sont vraies alors c'est également le cas des versions plus riches des conjectures 1.4 et 1.5.

Au cours de la preuve du théorème 1.6, nous introduirons encore d'autres formulations (par exemple cantonnées aux variétés simples) équivalentes sous la conjecture E et nous montrerons également quelques implications inconditionnelles. Nous verrons aussi que, si toutes les conjectures sont vraies, alors la variété obstructrice B de la conjecture 1.5 peut être explicitement choisie comme $B = A_2 + \cdots + A_s$ où $A_1, \ldots, A_s$ sont les composantes isotypiques de A ordonnées de sorte que $h_1(A_1) \geq h_1(A_i)$ pour $1 \leq i \leq s$. Par ailleurs, la condition de la conjecture 1.3 que P n'est pas de torsion sous $Z(\mathrm{End}A)$ s'exprime aussi plus concrètement à l'aide des composantes isotypiques $A_1, \ldots, A_s$ de A : elle est équivalente à $P \notin A_1 + \cdots + A_{i-1} + (A_i)_{\mathrm{tors}} + A_{i+1} + \cdots + A_s$ pour tout $1 \leq i \leq s$ (lemme 3.3).

De la même façon que dans le paragraphe précédent, toutes les implications que nous démontrons sont explicites. Par exemple, nous pouvons exprimer les constantes apparaissant dans les conjectures 1.4 et 1.5 en fonction de celles des conjectures E et 1.3 (lorsque nous supposons vraies ces deux dernières). Pour un énoncé intermédiaire de ce type, on consultera par exemple la proposition 4.12.

Comme nous nous intéressons seulement ici aux rapports entre les différentes formulations de la conjecture de Lang-Silverman, nous ne détaillons pas les résultats connus en direction de celle-ci. Rappelons simplement qu'à ce jour, elle n'est démontrée pour aucun couple (d, g) (quelle que soit la version). Nous renvoyons à [Paz] pour un passage en revue des résultats les plus significatifs (dont celui d'Hindry-Silverman en dimension 1 et celui de David en dimension quelconque).

1.3 Conventions et notations

Dans ce texte, nous ne faisons jamais d'extension de corps implicite. Cela signifie que lorsque A est un schéma sur un corps K nous ne considérons que les propriétés de A et non celles de ses extensions $A_{K'} = A \times_{\mathrm{Spec}K} \mathrm{Spec}K'$ où K' est un surcorps de K. Par exemple, si A est une variété abélienne sur K, elle est dite simple si elle n'a pas de sous-variété abélienne stricte non nulle, que $A_{\overline{K}}$ soit simple ou non. De même, deux variétés abéliennes A et B sur K sont dites isogènes lorsqu'il existe un morphisme de K-schémas en groupes $A \to B$ surjectif et de noyau fini. La notation $\mathrm{Hom}(A, B)$ désigne les morphismes de K-schémas en groupes (et non $\mathrm{Hom}(A_{\overline{K}}, B_{\overline{K}})$) comme $\mathrm{End}A = \mathrm{Hom}(A, A)$ et ainsi de suite. Ceci vaut pour toutes les notions introduites, par exemple pour les composantes isotypiques ($A_{\overline{K}}$ peut avoir plus de composantes isotypiques que A) même si nous rappellerons parfois pour le confort du lecteur que tel ou tel objet est défini sur K.

Deux cas particuliers doivent être signalés. D'une part, nous conservons la terminologie usuelle pour les variétés abéliennes de type CM, définie à l'aide de l'anneau des endomorphismes de $A_{\overline{K}}$. Cela nous amènera à parler de variété abélienne complètement CM lorsque de plus tous les endomorphismes de $A_{\overline{K}}$ proviennent d'endomorphismes de A (voir paragraphe 2.2).

D'autre part, nous commettons un léger abus de notations pour parler de polarisation. Une polarisation sur A est un morphisme $A \to A^\vee$ de K-schémas de A vers sa duale dont l'extension à $\overline{K}$ s'écrit $\phi_{\mathcal{L}}$ pour un faisceau inversible symétrique et ample $\mathcal{L}$ sur $A_{\overline{K}}$. Par abus de langage, nous parlons de $\mathcal{L}$ comme de la polarisation qu'il définit même s'il n'est défini qu'à 2-torsion près et n'est pas en général défini sur K (cependant $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ est uniquement déterminé par la polarisation et défini sur K). Ceci n'a pas d'incidence car les notions que nous utilisons ci-dessous sont définies par la polarisation : il s'agit de la hauteur de Néron-Tate $h_{\mathcal{L}}$ sur $A(K)$ et du degré $\deg_{\mathcal{L}} V$ d'un fermé V de A.

Nous employons la notation $Z(A) = (A \times \widehat{A})^4$ pour une variété abélienne A (pour mettre en œuvre l'astuce de Zarhin, voir lemme 4.6) et nous écrivons aussi $Z(\mathfrak{A})$ pour le centre d'un anneau $\mathfrak{A}$, aucune confusion n'étant possible.

Pour finir cette introduction, disons quelques mots des ingrédients de nos démonstrations. Dans la partie suivante, des résultats algébriques sur les ordres maximaux (proposition 2.4) nous permettent de donner un théorème de structure pour le noyau d'une isogénie $A \to A$ lorsque $\mathrm{End} A$ est un tel ordre, en nous appuyant notamment sur l'étude des variétés abéliennes ayant cette propriété présentée dans [R]. Nous en déduisons un critère pour qu'une isogénie cyclique soit minimale (proposition 2.6) dont la proposition 1.2 découle assez rapidement, modulo le résultat uniforme dans le cas CM. Pour passer au théorème 1.1, nous nous basons sur les énoncés de [GR2].

La partie 3 expose ensuite des résultats préparatoires en vue de la démonstration du théorème 1.6. En particulier, nous démontrons en détail des faits de base sur les composantes isotypiques (lemme 3.2), faute d'une référence adéquate. Nous exploitons aussi le théorème d'isogénie de [GR2] pour donner des comparaisons entre la hauteur d'une variété abélienne et celles de ses sous-variétés abéliennes (proposition 3.7). Nous concluons par un contre-exemple qui montre que certains renforcements de nos conjectures sont impossibles.

Enfin, dans la dernière partie, après avoir énoncé plusieurs variantes des conjectures de Lang-Silverman, nous établissons une série d'implications entre elles dont résulte en particulier le théorème 1.6. Les différentes démonstrations, assez imbriquées, reposent entre autres sur un argument de Bertrand (lemme 4.11) et l'astuce de Zarhin intervient plusieurs fois.

2 Polarisations, isogénies et points de torsion

Dans cette partie, nous démontrons la proposition 1.2 et le théorème 1.1. Nous commençons par des préliminaires d'algèbre non commutative.

2.1 Module fini sur un ordre maximal

Soient $n \geq 1$ un entier et G un groupe abélien fini. Nous disons que G est formé de n copies s'il existe un groupe G_0 et un isomorphisme $G \simeq G_0^n$. Bien entendu, si cette propriété vaut pour n, elle vaut pour ses diviseurs et elle vaut toujours pour $n = 1$. Dans la suite, cette locution ne s'applique qu'aux groupes abéliens c'est-à-dire que nous disons qu'un module est formé de n copies lorsque c'est le cas du groupe abélien sous-jacent. Voici un exemple simple.

Lemme 2.1 *Soient $\ell \geq 1$ un entier et k un corps fini de caractéristique p. Tout module à droite fini sur l'anneau de matrices $M_\ell(k)$ est formé de $\ell[k : \mathbb{F}_p]$ copies.*

Démonstration. Un tel module M s'écrit comme k-espace vectoriel

$$M = M\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \oplus M\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus M\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\simeq \left(M\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\right)^{\ell}$$

(on montre que les facteurs sont deux à deux isomorphes en faisant agir les matrices de transpositions). Ainsi il existe $n \geq 0$ tel que $M \simeq k^{n\ell}$ comme k-espace donc $M \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{n\ell[k:\mathbb{F}_p]}$ comme groupe. $\square$

Voici maintenant un critère pour qu'un groupe soit formé de n copies (qui permet en fait de supposer que le groupe est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$, comme c'était en particulier le cas dans le lemme précédent).

Lemme 2.2 *Soient $n \geq 1$ un entier et G un groupe abélien fini. Le groupe G est formé de n copies si et seulement si, pour tout nombre premier p et tout entier $i \geq 0$, le cardinal du quotient $p^iG/p^{i+1}G$ est une puissance de p^n.*

Démonstration. Si $G = G_0^n$ alors $p^iG/p^{i+1}G \simeq (p^iG_0/p^{i+1}G_0)^n$ et le cardinal de $p^iG_0/p^{i+1}G_0$ est une puissance de p puisque nous avons affaire à un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel. Réciproquement, il existe une unique famille (presque nulle) d'entiers naturels $e_{q,j}$ telle que $G \simeq \prod_{q,j}(\mathbb{Z}/q^j\mathbb{Z})^{e_{q,j}}$ où q parcourt les nombres premiers et j les entiers naturels non nuls. Alors $p^iG/p^{i+1}G \simeq \prod_{j>i}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{e_{p,j}}$ donc l'hypothèse affirme que n divise $\sum_{j>i} e_{p,j}$. Nous en déduisons qu'il divise tous les $e_{q,j}$ puis le résultat. $\square$

Pour le reste de ce paragraphe, nous nous plaçons dans la situation suivante. Soient D un corps de dimension finie sur $\mathbb{Q}$, Z son centre, $e = [D : Z]^{1/2}$ et $\mathcal{O}$ un ordre maximal de D. Le fait crucial suivant nous permettra d'employer le lemme 2.1.

Lemme 2.3 *Si $\mathcal{I}$ est un idéal bilatère maximal de $\mathcal{O}$ alors $\mathcal{O}/\mathcal{I} \simeq M_\ell(k)$ pour un entier $\ell \geq 1$ et un corps fini k avec $e = \ell[k : \mathcal{O} \cap Z/\mathcal{I} \cap Z]$.*

Démonstration. Nous utilisons le livre de Reiner [Re] auquel renvoient toutes les références qui suivent. Tout d'abord notons que $\mathcal{O}\cap Z$ est l'anneau des entiers $\mathcal{O}_Z$ du corps de nombres Z et que $\mathfrak{p} = \mathcal{I}\cap Z = \mathcal{I}\cap\mathcal{O}_Z$ en est un idéal maximal (voir (22.3)). Le complété $D_\mathfrak{p}$ est une algèbre centrale simple sur $Z_\mathfrak{p}$ (7.8) donc s'écrit $M_\ell(F)$ pour un corps F de centre $Z_\mathfrak{p}$. Nous avons $e^2 = [D : Z] = [D_\mathfrak{p} : Z_\mathfrak{p}] = \ell^2[F : Z_\mathfrak{p}]$. Par (11.6), $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ est un ordre maximal de $D_\mathfrak{p}$ donc (voir (17.3)) est isomorphe à $M_\ell(\Delta)$ où Δ est l'unique ordre maximal de F. De plus $\mathcal{I}_\mathfrak{p}$ est un idéal bilatère maximal de $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ donc $\mathcal{I}_\mathfrak{p} = \mathrm{rad}\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ (22.4). Nous avons $\mathcal{O}/\mathcal{I} \simeq \mathcal{O}_\mathfrak{p}/\mathcal{I}_\mathfrak{p} \simeq M_\ell(\Delta/\mathrm{rad}\Delta)$ par (17.5). Ici $\Delta/\mathrm{rad}\Delta$ est un corps fini que nous nommons k. Enfin, $[k : \mathcal{O}_Z/\mathfrak{p}] = f(F/Z_\mathfrak{p})$ (définition page 140) et $f(F/Z_\mathfrak{p}) = [F : Z_\mathfrak{p}]^{1/2}$ par (14.3) donc $[k : \mathcal{O}_Z/\mathfrak{p}] = e/\ell$. $\square$

Voici la conclusion.

Proposition 2.4 *Tout $\mathcal{O}$-module à droite fini est formé de e copies.*

Démonstration. En vertu du lemme 2.2, il suffit de montrer que, pour tout nombre premier p, un $\mathcal{O}/p\mathcal{O}$-module fini M a pour cardinal une puissance de p^e. Or l'idéal bilatère $p\mathcal{O}$ s'écrit comme un produit d'idéaux bilatères maximaux [Re, (22.10)] $p\mathcal{O} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i$. En filtrant M par ses quotients successifs $M_j = M\prod_{i=1}^{j-1}\mathcal{I}_i/M\prod_{i=1}^{j}\mathcal{I}_i$ $(1 \leq j \leq n)$ nous avons $\mathrm{Card}M = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Card}M_i$ où chaque M_i est un $\mathcal{O}/\mathcal{I}_i$-module. Or, par les lemmes 2.1 et 2.3, M_i est formé de e copies. □

Ce résultat serait faux sans l'hypothèse de maximalité de $\mathcal{O}$: dans les quaternions $D = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}i \oplus \mathbb{Q}j \oplus \mathbb{Q}k$ où $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ $(Z = \mathbb{Q},\ e = 2)$ considérons pour un nombre premier p l'ordre $\mathcal{O} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}pi \oplus \mathbb{Z}pj \oplus \mathbb{Z}pk$; alors le $\mathcal{O}$-module à droite $\mathcal{O}/pi\mathcal{O}$ n'est pas formé de 2 copies, étant isomorphe comme groupe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

2.2 Isogénies

Nous revenons aux variétés abéliennes. Considérons pour commencer une variété abélienne simple A sur un corps K de caractéristique nulle. Ici $D = \mathrm{End}A \otimes \mathbb{Q}$ est un corps, nous notons Z son centre, $e = [D : Z]^{1/2}$ et $\delta = [Z : \mathbb{Q}]$ ainsi que $g = \dim A$. Nous exploitons l'étude du paragraphe précédent pour établir le fait suivant.

Lemme 2.5 *Soient $n \geq 1$ un entier et $\varphi\colon A^n \to A^n$ une isogénie. Si* $\mathrm{End}A$ *est maximal alors* $\mathrm{Ker}\varphi$ *est formé de $2g/\delta e$ copies.*

Démonstration. Nous pouvons supposer que K est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Désignons alors par t et Ω l'espace tangent et le réseau des périodes de $A_{\mathbb{C}}$. Le groupe $\mathrm{Ker}\varphi$ s'écrit $d\varphi^{-1}(\Omega^n)/\Omega^n$ ou $\Omega^n/d\varphi(\Omega^n)$ après application de l'isomorphisme $d\varphi\colon t^n \to t^n$. Si nous choisissons un entier $N \geq 1$ tel que $\mathrm{Ker}\varphi \subset \mathrm{Ker}[N]$, nous pouvons même écrire $\mathrm{Ker}\varphi \simeq (\Omega/N\Omega)^n/d\varphi(\Omega/N\Omega)^n$. L'intérêt est que $\Omega/N\Omega$ est un $\mathcal{O}/N\mathcal{O}$-module libre par maximalité de $\mathcal{O} = \mathrm{End}A$: en effet, il suffit de le voir pour $N = p^f$ (p premier, $f \geq 1$) et alors $\Omega/N\Omega \simeq \Omega \otimes \mathbb{Z}_p/(N \cdot \Omega \otimes \mathbb{Z}_p)$ tandis que $\Omega \otimes \mathbb{Z}_p$ est un module libre sur $\mathcal{O} \otimes \mathbb{Z}_p$ [LR, lemme 4.1]. Ainsi par calcul des rangs, $\Omega/N\Omega \simeq (\mathcal{O}/N\mathcal{O})^{2g/\delta e^2}$ puis $\mathrm{Ker}\varphi \simeq (\mathcal{O}^n/M \cdot \mathcal{O}^n)^{2g/\delta e^2}$ où $M \in M_n(\mathcal{O})$ est la matrice correspondant à φ. Par la proposition 2.4, le $\mathcal{O}$-module à droite $\mathcal{O}^n/M \cdot \mathcal{O}^n$ est formé de e copies d'où le résultat. □

Bien entendu, ce lemme ne donne aucune information lorsque $\delta e = 2g$. Cette égalité signifie que A est de type CM [Mu, p. 183] et que tous les endomorphismes de $A_{\overline{K}}$ sont définis sur K. Nous dirons que A est complètement CM ou CCM en abrégé (en accord avec la terminologie de [GR3]). Si nous excluons ce cas, nous pouvons démontrer la généralisation suivante du fait qu'une isogénie cyclique entre courbes elliptiques non CM est minimale.

Proposition 2.6 *Soient K un corps de caractéristique nulle, A et A' deux variétés abéliennes sur K et $\varphi\colon A \to A'$ une K-isogénie cyclique. Si* $\mathrm{End}A$ *est maximal et si A ne contient aucune sous-variété abélienne simple et complètement CM alors* $\mathrm{Hom}(A, A') = \varphi \cdot \mathrm{End}A$.

Démonstration. D'après les résultats de [R, 1.6], la maximalité de $\mathrm{End}A$ entraîne l'existence de sous-variétés abéliennes simples $A_1, \ldots, A_s$ de A deux à deux non isogènes telles que A est un facteur direct d'un produit $\prod_{i=1}^{s} A_i^{n_i}$ pour des entiers $n_i \geq 1$. De plus chaque $\mathrm{End}A_i$ est maximal. Si $\chi\colon A \to A$ est une isogénie, on peut l'étendre en une isogénie $\chi'\colon \prod_{i=1}^{s} A_i^{n_i} \to \prod_{i=1}^{s} A_i^{n_i}$ de sorte que $\mathrm{Ker}\chi \simeq \mathrm{Ker}\chi'$ (puisque A est facteur direct). De plus χ' est le produit d'isogénies $\chi_i\colon A_i^{n_i} \to A_i^{n_i}$ et, par le lemme 2.5, $\mathrm{Ker}\chi_i \simeq G_i^{m_i}$ pour un groupe G_i et $m_i \geq 2$ puisque par hypothèse A_i n'est pas CCM. Ainsi $\mathrm{Ker}\chi \simeq \prod_{i=1}^{s} G_i^{m_i}$ et nous en déduisons que si

N est un entier tel que le groupe $N \cdot \mathrm{Ker}\chi$ est cyclique alors ce groupe est trivial. Considérons maintenant une isogénie $\psi: A \to A'$. Si $N = \deg \psi$, il existe une isogénie $\psi': A' \to A$ telle que $\psi \circ \psi' = [N]$. Définissons $\chi = \psi' \circ \varphi \in \mathrm{End}A$. Si $x \in \mathrm{Ker}\chi$ alors $\varphi(x) \in \mathrm{Ker}\psi' \subset \mathrm{Ker}[N]$ donc $Nx \in \mathrm{Ker}\varphi$. Ceci entraîne que $N \cdot \mathrm{Ker}\chi$ est contenu dans le groupe cyclique $\mathrm{Ker}\varphi$ donc, par ce qui précède, est trivial. Par suite $\mathrm{Ker}\chi \subset \mathrm{Ker}[N]$ donc il existe $\alpha \in \mathrm{End}A$ tel que $[N] = \alpha \circ \chi$. Maintenant $\psi \circ \chi = \psi \circ \psi' \circ \varphi = [N] \circ \varphi = \varphi \circ [N] = \varphi \circ \alpha \circ \chi$ puis, χ étant une isogénie, $\psi = \varphi \circ \alpha \in \varphi \cdot \mathrm{End}A$. Soit finalement $\beta \in \mathrm{Hom}(A, A')$. La composante neutre du noyau de β est une sous-variété abélienne B de A (définie sur K) donc d'après [R, 1.2] facteur direct : $A = B + C$, $B \cap C = 0$ pour une sous-variété abélienne C de A. Nous choisissons un quasi-supplémentaire B' de $C' = \beta(C)$ dans A' puis une isogénie $\gamma: B \to B'$. Soit alors $\psi: A \to A'$ l'isogénie donnée par γ sur B et β sur C. Nous avons vu $\psi \in \varphi \cdot \mathrm{End}A$. De plus par construction $\beta = \psi \circ \pi$ où $\pi: A \to A$ est le projecteur sur C de noyau B. Par suite $\beta \in \varphi \cdot \mathrm{End}A$. □

En présence de multiplication complexe, cette proposition tombe en défaut : il peut exister une infinité d'isogénies cycliques non minimales. Par exemple, si E est une courbe elliptique avec $\mathrm{End}E = \mathbb{Z}[i]$, alors pour chaque nombre premier $p \equiv 1[4]$ il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $p = a^2 + b^2$ donc l'isogénie $a + ib: E \to E$ est de degré p et par conséquent cyclique.

2.3 Torsion

Nous démontrons ici la proposition 1.2 et une majoration inconditionnelle de $\mathrm{Card}A(K)_{\mathrm{tors}}$. L'idée est qu'un point de torsion définit une isogénie cyclique. Nous souhaitons donc appliquer la proposition 2.6. Pour nous placer sous ses hypothèses, nous pouvons assurer un anneau d'endomorphismes maximal à l'aide d'une isogénie mais il faut traiter différemment le cas CM. Heureusement, la conjecture uniforme de torsion est en fait démontrée dans ce cas par Silverberg. Les résultats plus précis de [GR3] ont la conséquence suivante.

Proposition 2.7 *Soit A une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres K. Si A est un produit de variétés abéliennes isotypiques CCM alors $\mathrm{Card}A(K)_{\mathrm{tors}} \leq 4^g [K : \mathbb{Q}]^{4g}$.*

Démonstration. D'après le théorème 2 de [GR3] (qui s'étend immédiatement à un produit), nous avons $\mathrm{Card}A(K)_{\mathrm{tors}} \leq X^{2g}$ où X est le plus grand entier tel que $\varphi(X) \leq [K : \mathbb{Q}]$. On vérifie facilement $X \leq 2\varphi(X)^2$ d'où le résultat. □

Démonstration de la proposition 1.2. D'après [R, 1.1], A est isogène sur K à une variété abélienne A_1 telle que $\mathrm{End}A_1$ est un ordre maximal. De plus A_1 est produit de facteurs simples donc nous pouvons écrire $A_1 = B \times C$ où tous les facteurs de C sont CCM alors qu'aucun facteur de B ne l'est. Soit $P \in B(K)_{\mathrm{tors}}$. Soit $\psi: B \to B_1$ l'isogénie dont le noyau est engendré par P. Posons $A_2 = B_1 \times C$. Notons $\varphi_i: A \to A_i$ $(i = 1, 2)$ et $\chi: A_1 \to A$ des isogénies de degrés minimaux. Par hypothèse, $\deg \varphi_i \leq c$ et $\deg \chi \leq c^{2g-1}$ (puisque $\deg \chi \leq \deg \chi'$ où $\chi': A_1 \to A$ est l'isogénie telle que $\chi' \circ \varphi_1 = [\deg \varphi_1]$). La proposition 2.6 affirme $\mathrm{Hom}(B, B_1) = \psi \cdot \mathrm{End}B$ d'où $\mathrm{Hom}(A_1, A_2) = (\psi \times \mathrm{id}_C) \cdot \mathrm{End}A_1$ d'où l'on tire $c^{2g} \geq \deg \varphi_2 \circ \chi \geq \deg \psi \times \mathrm{id}_C = \deg \psi = \mathrm{ord}(P)$. Ainsi $\mathrm{Card}B(K)_{\mathrm{tors}} \leq c^{2g \cdot 2 \dim B} \leq c^{4g^2}$ tandis que, par la proposition 2.7, $\mathrm{Card}C(K)_{\mathrm{tors}} \leq 4^g [K : \mathbb{Q}]^{4g}$ $(\dim C \leq g)$. Nous obtenons $\mathrm{Card}A_1(K)_{\mathrm{tors}} \leq 4^g [K : \mathbb{Q}]^{4g} c^{4g^2}$ et nous concluons au moyen de l'isogénie φ_1 qui permet d'écrire $\mathrm{Card}A(K)_{\mathrm{tors}} \leq (\deg \varphi_1)\mathrm{Card}A_1(K)_{\mathrm{tors}}$ puisque $A(K)_{\mathrm{tors}} \subset \varphi_1^{-1} A_1(K)_{\mathrm{tors}}$. □

Pour donner une version inconditionnelle plus précise, nous utiliserons le lemme auxiliaire suivant pour la fonction $\kappa(\cdot)$ définie dans l'introduction.

Lemme 2.8 *Si B est une sous-variété abélienne d'une variété abélienne A sur un corps de nombres alors $\kappa(B)^{(\dim B)^{-3}} \leq \kappa(A)^{(\dim A)^{-3}}$. Si A' est une variété abélienne isogène à A alors $\kappa(A') \leq \kappa(A)^{19/16}$.*

Démonstration. Nous déduisons la première assertion de la majoration $h_F(B) \leq h_F(A) + (1/2)\log\kappa(A)$ fournie par le corollaire 1.5 de [GR2]. En effet, si d est le degré du corps de base et $g = \dim A$, $(1/2)\log\kappa(A)$ vaut

$$\begin{aligned} &512g^3(64g^2\log(14g) + \log d + 2\log\max(1, \log d, h_F(A))) \\ &\leq 512g^3(64g^2\log(14g) + 3)\max(1, \log d, h_F(A)) \\ &\leq 512g^6(64\log(14) + 3)\max(1, \log d, h_F(A)). \end{aligned}$$

Avec $64\log(14)+3 \leq 2^8-1$, on a $\max(1, \log d, h_F(B)) \leq 2^{17}g^6\max(1, \log d, h_F(A))$. En majorant $(2^{17}g^6)^2 \leq (14g)^{12}$, nous voyons que $\kappa(B)^{(1024(\dim B)^3)^{-1}}$ est au plus

$$(14g)^{64(\dim B)^2+12}d\max(1, \log d, h_F(A))^2.$$

Si $B \neq A$, le résultat découle de $64(\dim B)^2+12 \leq 64(g-1)^2+12 \leq 64g^2$. Si $B = A$, il est tautologique. Pour A', la même majoration $h_F(A') \leq h_F(A) + (1/2)\log\kappa(A)$ vaut par le théorème 1.4 de [GR2] donc nous calculons de même et concluons par $64g^2 + 12 \leq 76g^2 = (19/16)64g^2$. □

La démarche utilisée pour démontrer la proposition 1.2 donne aussi les bornes non uniformes suivantes.

Proposition 2.9 *Soit A une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres K. Le groupe fini $A(K)_{\text{tors}}$ est d'exposant au plus $\kappa(A)^{35/16}$ et de cardinal au plus $\kappa(A)^{4g+1}$.*

Démonstration. Comme dans la preuve dans la proposition 1.2, notons $A_1 = B \times C$ une variété abélienne isogène à A telle que $\mathrm{Card}C(K)_{\text{tors}} \leq (4[K : \mathbb{Q}]^4)^{\dim C}$ et B ne contient pas de variété abélienne simple CCM. Si $P \in B(K)_{\text{tors}}$, la proposition 2.6 assure que l'isogénie $\psi\colon B \to B_1$ de noyau engendré par P est minimale donc d'après le théorème 1.4 de [GR2] de degré au plus $\kappa(B)$. Par suite l'ordre d'un élément de $A_1(K)_{\text{tors}}$ est majoré par

$$\kappa(B)(4[K : \mathbb{Q}]^4)^{\dim C} \leq \kappa(B)\kappa(C) \leq \kappa(A_1)^{((\dim B)^3+(\dim C)^3)/g^3} \leq \kappa(A_1)$$

d'après le lemme 2.8 qui donne aussi $\kappa(A_1) \leq \kappa(A)^{19/16}$. Grâce à l'isogénie $\varphi_1\colon A \to A_1$ choisie de degré minimal donc $\leq \kappa(A)$, nous voyons que l'exposant de $A(K)_{\text{tors}}$ est majoré par $(\deg\varphi_1)\kappa(A_1) \leq \kappa(A)^{35/16}$. Pour le cardinal, choisissons aussi deux isogénies $\varphi_2\colon A \to A_2 = B_1 \times C$ et $\chi\colon A_1 \to A$ de degrés minimaux. Le théorème 1.4 de [GR2] assure $\deg\varphi_2 \leq \kappa(A)$ et $\deg\chi \leq \kappa(A)$. Comme dans la démonstration de la proposition 1.2, nous voyons que l'exposant de $B(K)_{\text{tors}}$ est majoré par $\deg\varphi_2 \circ \chi$ donc $\mathrm{Card}B(K)_{\text{tors}} \leq \kappa(A)^{4\dim B}$. Puisque $\sqrt{2}[K : \mathbb{Q}] \leq \kappa(A)$ nous avons $\mathrm{Card}C(K)_{\text{tors}} \leq \kappa(A)^{4\dim C}$ d'où $\mathrm{Card}A_1(K)_{\text{tors}} \leq \kappa(A)^{4g}$ et, grâce à φ_1, $\mathrm{Card}A(K)_{\text{tors}} \leq \kappa(A)^{4g+1}$. □

2.4 Discriminants

Nous terminons cette partie en démontrant le théorème 1.1 ainsi que la majoration de discriminant annoncée dans l'introduction. Il s'agit d'abord de faire le lien entre le discriminant de $\mathrm{End}A$ et les quantités employées dans [GR2].

Nous allons manipuler deux notions de trace sur $\mathrm{End}A\otimes\mathbb{R}$: la trace intrinsèque $\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A}$, mentionnée dans l'introduction, définie par la représentation régulière et la trace Tr_A utilisée dans [GR2, p. 2063] (où elle était notée simplement Tr) qui dépend de l'action des endomorphismes sur A. Grâce à l'involution de Rosati $\varphi\mapsto\varphi^\dagger$, l'espace $\mathrm{End}A\otimes\mathbb{R}$ est muni de la norme euclidienne $|\varphi|=\mathrm{Tr}_A(\varphi\varphi^\dagger)^{1/2}$ qui fait de $\mathrm{End}A$ un réseau euclidien. Nous notons comme dans [GR2] $\mathrm{vol}(\mathrm{End}A)$ son covolume et nous désignons par t son rang.

Lemme 2.10 *Nous avons* $g^{-t}\mathrm{disc}(\mathrm{End}A)\le\mathrm{vol}(\mathrm{End}A)^2\le(2g)^t\mathrm{disc}(\mathrm{End}A)$.

Démonstration. La démonstration de la proposition 2.9 de [GR2] dit que $\mathrm{vol}(\mathrm{End}A)^2$ s'écrit comme la valeur absolue du déterminant de la matrice $t\times t$ de terme général $\mathrm{Tr}_A(\varphi_i\varphi_j)$ où $\varphi_1,\dots,\varphi_t$ est une base quelconque de $\mathrm{End}A$. Vu la définition du discriminant, il suffit de montrer $g^{-1}\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A}\le\mathrm{Tr}_A\le 2g\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A}$ sur $\mathrm{End}A\otimes\mathbb{R}$. Nos deux traces étant invariantes par conjugaison par une isogénie, nous pouvons supposer que A s'écrit comme le produit $\prod_{i=1}^s A_i$ de ses composantes isotypiques (voir lemme 3.2 ci-dessous). Alors $\mathrm{End}A\simeq\prod_{i=1}^s\mathrm{End}A_i$ donc $\mathrm{Tr}_A=\sum_{i=1}^s\mathrm{Tr}_{A_i}$ et $\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A}=\sum_{i=1}^s\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A_i}$. Comme $\mathrm{End}A_i\otimes\mathbb{Q}$ est une algèbre simple, les traces Tr_{A_i} et $\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A_i}$ sont toutes deux multiples de la trace réduite [Mu, p. 179–82]. Ainsi $\mathrm{Tr}_{A_i}(\mathrm{id}_{A_i})\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A_i}=\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A_i}(\mathrm{id}_{A_i})\mathrm{Tr}_{A_i}$ puis, comme $\mathrm{Tr}_{A_i}(\mathrm{id}_{A_i})=2\dim A_i$ et $1\le\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A_i}(\mathrm{id}_{A_i})=\mathrm{rgEnd}A_i\le 2(\dim A_i)^2$, nous avons $g^{-1}\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A_i}\le(\dim A_i)^{-1}\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A_i}\le\mathrm{Tr}_{A_i}\le 2\dim A_i\cdot\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A_i}\le 2g\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A_i}$ d'où le résultat. □

En vertu de cette comparaison, nous pouvons maintenant entièrement travailler dans le cadre de [GR2]. Nous nous plaçons dans la situation de la partie 6 de cet article dont nous reprenons les notations. En particulier, A'' est une variété abélienne isogène à A et $\Lambda=\Lambda(\mathrm{Hom}(Z(A''),Z(A)))$ désigne le dernier minimum du réseau euclidien $\mathrm{Hom}(Z(A''),Z(A))$.

Lemme 2.11 *Nous avons* $\mathrm{vol}(\mathrm{End}A)\le\Lambda^{4t}$.

Démonstration. Commençons par majorer

$$\mathrm{vol}(\mathrm{End}A)\le\mathrm{vol}(\mathrm{End}Z(A))^{1/32}\le\Lambda(\mathrm{End}Z(A))^{\mathrm{rgEnd}Z(A)/32}$$

par [GR2, p. 2068] et l'inégalité d'Hadamard. Nous avons ensuite $\mathrm{rgEnd}Z(A)=64t$. Par le lemme 3.4 de [GR2] il vient

$$\Lambda(\mathrm{End}Z(A))\le\Lambda(\mathrm{Hom}(Z(A),Z(A'')))\Lambda(\mathrm{Hom}(Z(A''),Z(A)))=\Lambda^2$$

où l'égalité résulte de l'isométrie entre $\mathrm{Hom}(Z(A),Z(A''))$ et $\mathrm{Hom}(Z(A''),Z(A))$ [GR2, p. 2066]. □

Ces deux lemmes suffisent pour majorer le discriminant inconditionnellement (nous rappelons que $\kappa(A)$ a été défini dans l'introduction).

Proposition 2.12 *Soient A une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres K et K' une extension de K. Alors* $\mathrm{disc}(\mathrm{End}A_{K'})\le\kappa(A)^{\mathrm{rgEnd}A_{K'}/g}\le\kappa(A)^{2g}$.

Démonstration. Nous établissons ceci comme les théorèmes principaux de [GR2]. Par ce qui précède, nous pouvons rajouter à la proposition 6.3 la majoration

$$\mathrm{disc}(\mathrm{End}A)^{g/t}\le g^g\Lambda^{8g}.$$

Cette quantité $g^g\Lambda^{8g}$ est inférieure à la borne

$$(10g)^{5g}(\Lambda\Lambda')^{4g}\prod_{i=1}^t\Lambda_i^{8n_i^2g_id_i}$$

qui apparaît à la fin de la partie 6 si nous choisissons $A' = A$ pour avoir $\Lambda' = \Lambda$. Le reste de la démonstration ne subit aucune modification : la partie 9 permet de traiter l'extension de corps (et autorise le choix $A' = A$) puis la majoration du lemme 9.3 s'applique aussi à $\mathrm{disc}(\mathrm{End}A)^{g/t}$ étant donné que la démonstration de celui-ci n'utilise que la borne ci-dessus et le lemme 9.4 donne la conclusion. $\square$

Enfin, nous démontrons le théorème 1.1 sous la forme plus précise et explicite suivante.

Proposition 2.13 *Soient K un corps de nombres et A une variété abélienne de dimension g sur K. Si γ est un réel tel que, pour tout couple (C, C') de variétés abéliennes sur K isogènes à A, on a $\mathrm{disc}(\mathrm{End}C \times C') \leq \gamma$ alors*

(1) *il existe un faisceau inversible $\mathcal{L}$ ample et symétrique sur A tel que $\deg_{\mathcal{L}} A \leq (4g)^{8g^3}\gamma^{3g/4}$;*

(2) *pour toute variété abélienne B sur K isogène à A il existe deux isogénies $\varphi\colon A \to B$ et $\psi\colon B \to A$ telles que $(\deg \varphi)(\deg \psi) \leq (4g)^{16g^3}\gamma^{2g}$;*

(3) $\mathrm{Card}A(K)_{\mathrm{tors}} \leq (4g)^{19g^4}[K:\mathbb{Q}]^{4g}\gamma^{9g^2/4}$.

Démonstration. En vertu du lemme 2.10, nous utiliserons l'hypothèse sous la forme $\mathrm{vol}(\mathrm{End}C \times C') \leq (4g)^{4g^2}\gamma^{1/2}$. Nous choisissons un ordre maximal $\mathcal{O}$ de $\mathrm{End}A \otimes \mathbb{Q}$ contenant $\mathrm{End}A$ et posons $N_A = [\mathcal{O} : \mathrm{End}A]$. D'après le théorème 1.1 de [R], il existe une variété abélienne A' et deux isogénies $\varphi_A\colon A \to A'$ et $\psi_A\colon A' \to A$ de sorte que $\psi_A \circ \varphi_A = [N_A]$ et $\mathrm{End}A' \simeq \mathcal{O}$. D'une part, nous avons $N_A = \mathrm{vol}(\mathrm{End}A)/\mathrm{vol}(\mathrm{End}A') \leq \mathrm{vol}(\mathrm{End}A)$ (voir [GR2, proposition 2.9]). D'autre part, la maximalité de $\mathrm{End}A'$ montre ([R, théorème 1.2]) que A' s'écrit comme un produit de variétés abéliennes simples : $A' = \prod_{i=1}^{s} A_i$. Notons $g_i = \dim A_i$ et $d_i = \mathrm{rgEnd}A_i \leq 2g_i$. (1) Fixons un faisceau inversible ample et symétrique $\mathcal{L}_i$ sur A_i tel que $\deg_{\mathcal{L}_i} A_i$ est minimal. Le théorème 4.5 de [GR2] entraîne

$$\deg_{\mathcal{L}_i} A_i \leq g_i!(7g_i^{3/2})^{g_i} \left(\frac{h^0(A_i, \mathcal{L}_i)}{h^0(\widehat{A}_i, \widehat{\mathcal{L}}_i)}\right)^{d_i/2} \mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(A_i, \widehat{A}_i))^{g_i}$$

où $\widehat{\mathcal{L}}_i$ est une polarisation sur $\widehat{A}_i$ choisie comme dans [GR2, p. 2075] et le volume est calculé par rapport à la métrique de Rosati définie par $\mathcal{L}_i$ et $\widehat{\mathcal{L}}_i$. Par la proposition 4.1 (1) de [GR2] nous avons en particulier

$$1 \leq \left(\frac{h^0(\widehat{A}_i, \widehat{\mathcal{L}}_i)}{h^0(A_i, \mathcal{L}_i)}\right)^{d_i/2} \mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(\widehat{A}_i, A_i))^{g_i}$$

donc nous trouvons en multipliant

$$\begin{aligned} \deg_{\mathcal{L}_i} A_i &\leq g_i!(7g_i^{3/2})^{g_i}\mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(A_i, \widehat{A}_i))^{g_i}\mathrm{vol}(\mathrm{Hom}(\widehat{A}_i, A_i))^{g_i} \\ &\leq g_i!(7g_i^{3/2})^{g_i}\mathrm{vol}(\mathrm{End}(A_i \times \widehat{A}_i))^{g_i} \end{aligned}$$

(voir, dans [GR2], la proposition 2.9 et la formule pour le produit page 2068). Nous définissons ensuite $\mathcal{L}'$ sur A' par produit des $\mathcal{L}_i$ puis $\mathcal{L} = \varphi_A^*\mathcal{L}'$. Alors

$$\begin{aligned} \deg_{\mathcal{L}} A &= \deg \varphi_A \cdot g! \prod_{i=1}^{s} g_i!^{-1} \deg_{\mathcal{L}_i} A_i \\ &\leq N_A^{2g}(2g)^{3g}\mathrm{vol}(\mathrm{End}(A' \times \widehat{A'}))^g \\ &\leq (2g)^{3g}\mathrm{vol}(\mathrm{End}A^2)^{g/2}\mathrm{vol}(\mathrm{End}(A' \times \widehat{A'}))^g \end{aligned}$$

puisque $\mathrm{vol}(\mathrm{End}A^2) = \mathrm{vol}(\mathrm{End}A)^4$. Les deux volumes qui apparaissent sont majorés par $(4g)^{4g^2}\gamma^{1/2}$ et le résultat suit car $(2g)^{3g} \leq (4g)^{2g^3}$. (2) Nous associons à B (comme ci-dessus pour A) une variété abélienne B' produit de simples et des isogénies $\varphi_B\colon B \to B'$ et $\psi_B\colon B' \to B$ avec $\psi_B \circ \varphi_B = [N_B]$ où $N_B \leq \mathrm{vol}(\mathrm{End}B)$. Nous écrivons $B' = \prod_{i=1}^s B_i$ où B_i est isogène à A_i. Par le lemme 4.1 (1) de [GR2], nous avons des isogénies $\varphi_i\colon A_i \to B_i$ et $\psi_i\colon B_i \to A_i$ avec

$$\deg\varphi_i \cdot \deg\psi_i \leq \mathrm{vol}(\mathrm{End}A_i \times B_i)^{2g_i/d_i}.$$

Il suffit donc de poser $\varphi = \psi_B \circ (\prod_{i=1}^s \varphi_i) \circ \varphi_A$ et $\psi = \psi_A \circ (\prod_{i=1}^s \psi_i) \circ \varphi_B$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\deg\varphi \cdot \deg\psi &\leq (N_A N_B)^{2g} \prod_{i=1}^s \mathrm{vol}(\mathrm{End}A_i \times B_i)^{2g_i} \\
&\leq \mathrm{vol}(\mathrm{End}A \times B)^{2g} \mathrm{vol}(\mathrm{End}A' \times B')^{2g} \\
&\leq ((4g)^{4g^2}\gamma^{1/2})^{4g}.
\end{aligned}$$

(3) Nous procédons comme dans la démonstration de la proposition 1.2 : si A_i n'est pas CCM, nous notons P_i un point de $A_i(K)_{\mathrm{tors}}$ d'ordre maximal et $\psi_i\colon A_i \to C_i$ l'isogénie de noyau engendré par P_i ; la proposition 2.6 montre ici directement que ψ_i est de degré minimal donc en utilisant le lemme 4.1 (1) de [GR2] comme ci-dessus, nous avons $\mathrm{ord}(P_i) = \deg\psi_i \leq \mathrm{vol}(\mathrm{End}A_i \times C_i)^{2g_i/d_i}$. Avec $\mathrm{Card}A_i(K)_{\mathrm{tors}} \leq \mathrm{ord}(P_i)^{2g_i}$, il vient $\mathrm{Card}A_i(K)_{\mathrm{tors}} \leq \mathrm{vol}(\mathrm{End}A_i \times C_i)^{4g_i^2/d_i}$ et nous en déduisons

$$\mathrm{Card}A(K)_{\mathrm{tors}} \leq N_A^{2g} 4^g [K:\mathbb{Q}]^{4g} \mathrm{vol}(\mathrm{End}A' \times C')^{4g^2}$$

où $C' = \prod_{i=1}^s C_i$ (on choisit $C_i = A_i$ si A_i est CCM). Avec l'estimation $N_A^{2g} \leq \mathrm{vol}(\mathrm{End}A^2)^{g/2}$ nous aboutissons à

$$\mathrm{Card}A(K)_{\mathrm{tors}} \leq 4^g [K:\mathbb{Q}]^{4g} ((4g)^{4g^2}\gamma^{1/2})^{4g^2+g/2}$$

et un calcul conclut. □

3 Résultats auxiliaires

Nous réunissons ici quelques énoncés préliminaires avant d'aborder la démonstration du théorème 1.6 dans la partie suivante.

3.1 Degré d'une somme

Nous commençons par une inégalité purement géométrique.

Proposition 3.1 *Soient K un corps, A une variété abélienne sur K, $\mathcal{L}$ une polarisation sur A et B_1, B_2 deux sous-variétés abéliennes de A. Alors*

$$h^0(B_1 + B_2, \mathcal{L}) h^0(B_1 \cap B_2, \mathcal{L}) \leq h^0(B_1, \mathcal{L}) h^0(B_2, \mathcal{L}).$$

De plus cette inégalité est une égalité si et seulement si B_1 contient l'orthogonal de B_2 dans $B_1 + B_2$.

Démonstration. Nous supposons sans perte de généralité que $A = B_1 + B_2$. Dans un premier temps, nous considérons le cas où $B_1 \cap B_2$ est un schéma fini. Ici l'application somme $\pi\colon B_1 \times B_2 \to A$ est une isogénie de noyau $B_1 \cap B_2$ donc de degré $h^0(B_1 \cap B_2, \mathcal{L})$ L'inégalité de l'énoncé découle alors directement du corollaire 4 de [De].

De plus le théorème 3 qui le précède nous dit qu'il y a égalité si et seulement si $\pi^*\mathcal{L} \simeq p_1^*(\mathcal{L}_{|B_1}) \otimes p_2^*(\mathcal{L}_{|B_2})$. Il nous reste à voir que cette condition équivaut à $B_2^\perp \subset B_1$ ou encore, par dimension, à $B_1 \subset B_2^\perp$. Par définition de l'orthogonal, cette dernière inclusion signifie que $(\tau_x^*\mathcal{L})_{|B_2} \simeq \mathcal{L}_{|B_2}$ pour tout $x \in B_1(\overline{K})$. Comme $(\tau_x^*\mathcal{L})_{|B_2} \simeq (\pi^*\tau_x^*\mathcal{L})_{|B_2} \simeq (\tau_{(x,0)}^*\pi^*\mathcal{L})_{|B_2}$, nous voyons immédiatement que si $\pi^*\mathcal{L} \simeq p_1^*(\mathcal{L}_{|B_1}) \otimes p_2^*(\mathcal{L}_{|B_2})$ alors $B_1 \subset B_2^\perp$. Réciproquement, nous appliquons le lemme de la balançoire [Mu, corollaire 6 p. 54] au faisceau $\mathcal{M} = \pi^*\mathcal{L} \otimes p_2^*(\mathcal{L}_{|B_2})^{\otimes -1}$ sur $B_1 \times B_2$: si $x \in B_1(\overline{K})$ nous avons $\mathcal{M}_{|\{x\}\times B_2} \simeq (\tau_x^*\mathcal{L})_{|B_2} \otimes \mathcal{L}_{|B_2}^{\otimes -1}$ en identifiant $\{x\} \times B_2$ et B_2 ; ainsi, d'après $B_1 \subset B_2^\perp$, cette restriction est triviale pour tout x donc le lemme de la balançoire montre que $\mathcal{M}$ s'écrit sous la forme $p_1^*\mathcal{L}'$ où $\mathcal{L}' \in \mathrm{Pic}(B_1)$; comme $\mathcal{M}_{|B_1 \times \{0\}} \simeq \mathcal{L}_{|B_1}$ il vient $\mathcal{L}' \simeq \mathcal{L}_{|B_1}$ puis le résultat.

Dans le cas général, notons C la composante neutre de $B_1 \cap B_2$ et D l'orthogonal de C dans B_2. Nous abrégeons aussi $h^0(\cdot, \mathcal{L})$ en $h^0(\cdot)$. Comme $B_2 = C + D$, nous avons $B_1 \cap B_2 = B_1 \cap (C + D) = C + (B_1 \cap D)$ avec $C \subset B_1$. Par suite, les schémas en groupes finis $(B_1 \cap B_2)/C$ et $(B_1 \cap D)/(C \cap D)$ sont isomorphes d'où l'on tire $h^0(C \cap D)h^0(B_1 \cap B_2) = h^0(C)h^0(B_1 \cap D)$. En outre, par la première partie, nous avons $h^0(C \cap D)h^0(B_2) = h^0(C)h^0(D)$ (cas d'orthogonalité) et $h^0(A)h^0(B_1 \cap D) \leq h^0(D)h^0(B_1)$ (grâce à $A = B_1 + D$) avec égalité si et seulement si $D^\perp \subset B_1$. En combinant nous avons bien $h^0(A)h^0(B_1 \cap B_2) \leq h^0(B_1)h^0(B_2)$ et il suffit de vérifier que $D^\perp \subset B_1$ équivaut à $B_2^\perp \subset B_1$. Or $D^\perp = C + B_2^\perp$: l'inclusion $C + B_2^\perp \subset D^\perp$ est claire et les deux membres ont la même dimension car $C \cap B_2^\perp \subset B_2 \cap B_2^\perp$ est fini. □

Pour le cas d'égalité lorsque $B_1 \cap B_2$ est fini l'on retrouve un résultat de Bertrand [B2, théorème 3].

3.2 Composantes isotypiques

Une variété abélienne sur un corps K est dite isotypique si elle est isogène à la puissance d'une variété abélienne simple. Toutes les sous-variétés abéliennes et tous les quotients d'une variété abélienne isotypique sont isotypiques. Si A est une variété abélienne, on appelle composantes isotypiques de A ses sous-variétés abéliennes isotypiques maximales. Voici les propriétés élémentaires de ces composantes.

Lemme 3.2 *Soient A une variété abélienne et $(A_i)_{i\in I}$ la famille de ses composantes isotypiques.*

(1) *L'ensemble I est fini.*

(2) *L'application de somme $\prod_{i\in I} A_i \to A$ est une isogénie.*

(3) *Si $\varphi\colon \prod_{j\in J} B_j^{n_j} \to A$ est une isogénie où les B_i sont des variétés abéliennes simples deux à deux non isogènes et n_j des entiers naturels non nuls alors il existe une bijection $\sigma\colon J \to I$ telle que $\varphi(B_j^{n_j}) = A_{\sigma(j)}$.*

(4) *Si $i, j \in I$ et $i \neq j$ alors $\mathrm{Hom}(A_i, A_j) = 0$.*

(5) *Si $J \subset I$, les sous-variétés abéliennes $\sum_{i\in J} A_i$ et $\sum_{i\in I\setminus J} A_i$ sont orthogonales pour toute polarisation de A.*

(6) *Si B est une sous-variété abélienne non nulle de A, les composantes isotypiques de B sont les éléments non nuls de la famille des composantes neutres des $B \cap A_i$, $i \in I$.*

(7) *Tout endomorphisme de A laisse stable chacun des A_i et l'application induite $\mathrm{End}A \to \prod_{i\in I} \mathrm{End}A_i$ est injective de conoyau fini.*

(8) *Les sous-variétés abéliennes de A stables sous $\mathrm{End}A$ sont les $\sum_{i\in J} A_i$ où $J \subset I$.*

Démonstration. Nous utiliserons ci-dessous le fait que si B et B' sont deux sous-variétés abéliennes de A telles que $\mathrm{Hom}(B, B') = 0$ alors $B \cap B'$ est fini. En effet si $B\cap B'$ contenait une sous-variété abélienne non nulle C alors nous pourrions composer une isogénie $B\to\widehat{B}$, le morphisme surjectif $\widehat{B}\to\widehat{C}$ (dual de $C\hookrightarrow B$), une isogénie $\widehat{C}\to C$ et l'inclusion $C\hookrightarrow B'$ pour obtenir un morphisme non nul $B\to B'$. Nous supposons par ailleurs dans toute la suite que A est non nulle (sinon le lemme est clair).

Choisissons arbitrairement des isogénies $A_i\to D_i^{m_i}$ pour $i\in I$ où D_i est simple et $m_i\geq 1$. Soient $i,j\in I$ avec $i\neq j$. Si D_i et D_j sont isogènes alors nous avons des isogénies $D_i^{m_i+m_j}\to D_i^{m_i}\times D_j^{m_j}\to A_i\times A_j$ donc un morphisme surjectif $D_i^{m_i+m_j}\to A_i+A_j$. Ceci entraîne que A_i+A_j est isotypique. Par maximalité $A_i+A_j=A_i=A_j$ ce qui est absurde. Ainsi D_i et D_j ne sont pas isogènes donc $\mathrm{Hom}(D_i,D_j)=0$ puis $\mathrm{Hom}(D_i^{m_i},D_j^{m_j})=M_{m_j,m_i}(\mathrm{Hom}(D_i,D_j))=0$. Par isogénies, nous avons (4). Montrons maintenant par récurrence sur $s\geq 1$ que, pour tout $J\subset I$ de cardinal s, la somme $\prod_{j\in J}A_j\to\sum_{j\in J}A_j$ est une isogénie. Ceci est tautologique pour $s=1$. Supposons l'assertion vraie pour un entier s et considérons un ensemble de cardinal $s+1$ sous la forme $J\cup\{i\}$ où $\mathrm{Card}J=s$. Par hypothèse de récurrence, il suffit de démontrer que $A_i\times\sum_{j\in J}A_j\to A_i+\sum_{j\in J}A_j$ est une isogénie, autrement dit que $A_i\cap\sum_{j\in J}A_j$ est fini. Or nous avons $\mathrm{Hom}(A_i,\prod_{j\in J}A_j)=\prod_{j\in J}\mathrm{Hom}(A_i,A_j)=0$ par (4) donc, par isogénie, $\mathrm{Hom}(A_i,\sum_{j\in J}A_j)=0$ et la remarque liminaire permet de conclure notre raisonnement par récurrence. Nous en déduisons (1) puisque si J est une partie finie de I nous avons $\mathrm{Card}J\leq\sum_{j\in J}\dim A_j=\dim\sum_{j\in J}A_j\leq\dim A$. Si $\sum_{i\in I}A_i\neq A$ il existe une sous-variété abélienne simple B de A telle que $B\cap\sum_{i\in I}A_i$ est fini. Mais B est simple donc isotypique donc contenue dans une sous-variété isotypique maximale, c'est-à-dire l'une des A_i donc $B\subset\sum_{i\in I}A_i$, contradiction. Ceci établit (2).

Prouvons (3). Si $j\in J$, la sous-variété abélienne $\varphi(B_j^{n_j})$ est isotypique donc il existe $\sigma(j)\in I$ tel que $\varphi(B_j^{n_j})\subset A_{\sigma(j)}$. Nous avons $\sum_{j\in J}\varphi(B_j^{n_j})=A$ donc $A=\sum_{j\in J}A_{\sigma(j)}=\sum_{i\in\sigma(J)}A_i$ ce qui entraîne $\sigma(J)=I$. Si $j,k\in J$, $j\neq k$ et $\sigma(j)=\sigma(k)$ alors $\varphi(B_j^{n_j}\times B_k^{n_k})\subset A_{\sigma(j)}$ donc $B_j^{n_j}\times B_k^{n_k}$ est isotypique ce qui est absurde. Ainsi σ est une bijection et $\dim A=\sum_{j\in J}\dim\varphi(B_j^{n_j})\leq\sum_{j\in J}\dim A_{\sigma(j)}=\dim A$ conduit à $\varphi(B_j^{n_j})=A_{\sigma(j)}$ pour tout $j\in J$. Pour (5), notons $B=\sum_{i\in J}A_i$ et $B'=\sum_{i\in I\setminus J}A_i$. Par (2) et (4), $B\times B'\to A$ est une isogénie et $\mathrm{Hom}(B',B)=0$. Si une sous-variété C de A est telle que la somme $B\times C\to A$ est une isogénie alors $A/B,B',C$ sont isogènes comme $B,A/B',A/C$. En particulier $\mathrm{Hom}(C,A/B')=0$ donc la composée $C\hookrightarrow A\to A/B'$ est nulle d'où $C=B'$. Ceci s'applique à $C=B^\perp$ pour une polarisation quelconque de A.

(6) Notons C_i pour $i\in I$ la composante neutre de $B\cap A_i$ et $(B_j)_{j\in J}$ la famille des composantes isotypiques de B. Ce sont des sous-variétés isotypiques de A donc si $j\in J$ il existe $\sigma(j)\in I$ tel que $B_j\subset A_{\sigma(j)}$. Il vient $B_j\subset C_{\sigma(j)}\subset B$ et, comme $C_{\sigma(j)}$ est isotypique, $B_j=C_{\sigma(j)}$ par maximalité de B_j. Les composantes de B sont donc bien de la forme annoncée. Réciproquement si $C_i\neq 0$ alors il existe $j\in J$ tel que $C_i\subset B_j=C_{\sigma(j)}$. Ici $A_i\cap A_{\sigma(j)}$ est infini donc $i=\sigma(j)$ et $C_i=B_j$. (7) Soient $\varphi\in\mathrm{End}A$ et $i\in I$. La sous-variété abélienne $\varphi(A_i)$, quotient de A_i, est isotypique donc $\varphi(A_i)\subset A_j$ pour un $j\in J$. Ainsi φ induit un morphisme $\varphi_i\colon A_i\to A_j$. Si $\varphi(A_i)\neq 0$ alors $\varphi_i\neq 0$ force $i=j$ par (4) donc $\varphi(A_i)\subset A_i$. Si $\varphi(A_i)=0$ nous pouvons aussi choisir $j=i$ pour avoir dans tous les cas $\varphi_i\in\mathrm{End}A_i$. Ceci fournit bien un morphisme d'anneaux $\mathrm{End}A\to\prod_{i\in I}\mathrm{End}A_i$, $\varphi\mapsto(\varphi_i)_{i\in I}$. Si tous les φ_i sont nuls, $\varphi(A)=\varphi(\sum_{i\in I}A_i)=\sum_{i\in I}\varphi_i(A_i)=0$ d'où l'injectivité. Si $\psi_i\in\mathrm{End}A_i$ pour tout $i\in I$, nous pouvons former $\psi=(\psi_i)_{i\in I}\colon\prod_{i\in I}A_i\to A$. Si N est le degré de l'isogénie (2) alors $N\psi$ se factorise à travers cette isogénie en $\varphi\in\mathrm{End}A$. Il vient $\varphi_i=N\psi_i$ donc le conoyau de notre application est annulé par N donc fini. (8) Par (6) et (7), si $B\subset A$ est stable sous $\mathrm{End}A$ et $i\in I$, alors la composante neutre C_i de $B\cap A_i$ est stable sous $\mathrm{End}A_i$. Si $C_i\neq 0$ il existe une surjection $C_i^{m_i}\to A_i$ donc $\mathrm{Hom}(C_i,A_i)\cdot C_i=A_i$. Fixons une surjection $f\colon A_i\to C_i$ telle

que $f_{|C_i}$ soit la multiplication $[N] \in \mathrm{End} C_i$ par un entier naturel non nul N. Ainsi $f(C_i) = [N]C_i = C_i$ donc $A_i = \mathrm{Hom}(C_i, A_i) \cdot f(C_i) \subset \mathrm{End} A_i \cdot C_i$. Par stabilité $C_i = A_i$. Ainsi si $J = \{i \in I \mid C_i \neq 0\}$ alors $B = \sum_{i \in J} A_i$. □

Nous pouvons donner la caractérisation suivante annoncée dans l'introduction.

Lemme 3.3 *Soient A une variété abélienne non nulle sur un corps K et $(A_i)_{i\in I}$ ses composantes isotypiques. Un point $P \in A(\overline{K})$ est de torsion sur $Z(\mathrm{End} A)$ si et seulement s'il existe $i \in I$ tel que $P \in \sum_{j \in I \setminus \{i\}} A_j(\overline{K}) + A(\overline{K})_{\mathrm{tors}}$.*

Démonstration. Si A est isotypique, $Z(\mathrm{End} A) \otimes \mathbb{Q} = Z(\mathrm{End} A \otimes \mathbb{Q})$ est un corps de nombres : en effet $\mathrm{End} A \otimes \mathbb{Q}$ est invariant par isogénie et, si A est la puissance d'une variété simple, $\mathrm{End} A \otimes \mathbb{Q} = M_n(D)$ pour un corps D ; ainsi $Z(\mathrm{End} A) \otimes \mathbb{Q} \simeq Z(M_n(D)) \simeq Z(D)$. Par conséquent dans ce cas tout élément non nul de $Z(\mathrm{End} A)$ divise un entier naturel non nul donc $P \in A(\overline{K})$ est de torsion sur $Z(\mathrm{End} A)$ si et seulement s'il est de torsion sur $\mathbb{Z}$ c'est-à-dire $P \in A(\overline{K})_{\mathrm{tors}}$. Si A est produit de variétés isotypiques, $A = \prod_{i \in I} A_i$, alors $P = (P_i)_{i \in I}$ est de torsion sur $Z(\mathrm{End} A) = \prod_{i \in I} Z(\mathrm{End} A_i)$ si et seulement si l'un des P_i est de torsion. En général, on conclut grâce à l'isogénie $\prod_{i \in I} A_i \to A$. □

Nous utiliserons encore la formule suivante.

Proposition 3.4 *Soit A une variété abélienne munie d'une polarisation $\mathcal{L}$. Si $(A_i)_{i \in I}$ sont ses composantes isotypiques et D le degré minimal d'une isogénie $\prod_{i \in I} A_i \to A$ alors $\prod_{i \in I} h^0(A_i, \mathcal{L}) = D h^0(A, \mathcal{L})$.*

Démonstration. Notons $s, \varphi \colon \prod_{i \in I} A_i \to A$ l'isogénie de somme et une isogénie quelconque. D'après l'assertion (3) du lemme 3.2, $\varphi(A_i) = A_i$ donc φ induit des endomorphismes $\varphi_i \colon A_i \to A_i$. Nous avons donc $\varphi = s \circ \prod_{i \in I} \varphi_i$. Ceci prouve que s est une isogénie minimale et en particulier $D = \deg s$. Notre formule résulte donc de $h^0(\prod_{i \in I} A_i, s^* \mathcal{L}) = \prod_{i \in I} h^0(A_i, \mathcal{L})$ qui est une conséquence de la proposition 3.1 (itérée) en vertu de l'orthogonalité (5) du lemme 3.2. □

Si nous utilisons $D \geq 1$ et $h^0(A, \mathcal{L}) = g!^{-1} \deg_{\mathcal{L}} A$ (avec $g = \dim A$) nous avons dans la situation de la proposition

$$\prod_{i \in I} \deg_{\mathcal{L}} A_i \geq g!^{-1} \deg_{\mathcal{L}} A$$

et donc par inégalité arithmético-géométrique

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I} (\deg_{\mathcal{L}} A_i)^{1/\dim A_i} h_1(A_i) \quad &\geq \quad \frac{1}{g} \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{\dim A_i} (\deg_{\mathcal{L}} A_i)^{1/\dim A_i} h_1(A_i) \\
&\geq \quad \left(\prod_{i \in I} (\deg_{\mathcal{L}} A_i) h_1(A_i)^{\dim A_i} \right)^{1/g} \\
&\geq \quad \frac{(\deg_{\mathcal{L}} A)^{1/g}}{g} \prod_{i \in I} h_1(A_i)^{\dim A_i / g}
\end{aligned}$$

si K est un corps de nombres. En minorant $h_1 \geq 1$ nous voyons que la conjecture 1.4 entraîne la version uniforme suivante du résultat de Bertrand [B1].

Conjecture 3.5 *Pour tout couple d'entiers naturels non nuls (d, g) il existe un réel $c > 0$ tel que, si K est un corps de nombres de degré d, A une variété abélienne de dimension g sur K, $\mathcal{L}$ une polarisation sur A et $P \in A(K)$ un point sans torsion sur* $\mathrm{End} A$*, alors $h_{\mathcal{L}}(P) \geq c^{-1} (\deg_{\mathcal{L}} A)^{1/g}$.*

D'après le calcul précédent nous pourrions rajouter un terme de hauteur. Celui-ci vaudrait $h_1(A)$ dans le cas isotypique mais pas sinon. Nous verrons à la fin de cette partie que la minoration $h_{\mathcal{L}}(P) \geq c^{-1}(\deg_{\mathcal{L}} A)^{1/g} h_1(A)$ est fausse en général. Avant cela, nous allons comparer les $h_1(A_i)$ à $h_1(A)$.

3.3 Comparaisons de hauteurs de Faltings

Nous donnons ici quelques conséquences du théorème d'isogénie de [GR2] pour la variation de la hauteur de Faltings. Pour alléger, nous notons, pour des réels $u, v > 0$, $[u|v] = \max(u/v, v/u)$ et $\log_1 u = \max(1, \log u)$. Le lecteur vérifiera sans peine que, si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont des familles de réels > 0, alors $[\max_{i\in I} u_i | \max_{i\in I} v_i] \leq \max_{i\in I}[u_i|v_i]$ et $[u|w] \leq [u|v][v|w]$ pour $u, v, w > 0$.

Lemme 3.6 *Si A et B sont deux variétés abéliennes isogènes de dimension g sur un corps de nombres K alors $[h_1(A)|h_1(B)] \leq 2^{17} g^6 \log_1[K:\mathbb{Q}]$.*

Démonstration. D'après le théorème 1.4 de [GR2], nous avons $h_{F,K}(B) \leq h_{F,K}(A) + (1/2)\log \kappa(A)$. En calculant comme pour le lemme 2.8, ceci est majoré par

$$\begin{aligned} & h_1(A) + 2^9 g^3(64g^2 \log(14g) + \log[K:\mathbb{Q}] + 2\max(h_1(A), \log[K:\mathbb{Q}])) \\ & \leq (1 + 2^9 g^3(64g^2\log(14g) + 3))(\log_1[K:\mathbb{Q}])h_1(A) \\ & \leq (1 + 2^9(64\log(14) + 3))g^6(\log_1[K:\mathbb{Q}])h_1(A). \end{aligned}$$

Avec $64\log(14) + 3 \leq 2^8 - 1$ nous avons $h_1(B) \leq 2^{17} g^6 (\log_1[K:\mathbb{Q}])h_1(A)$ puis le résultat par symétrie. □

Il s'agit bien sûr d'un affaiblissement assez net du résultat puisque nous avons majoré $\log h_1(A)$ par $h_1(A)$. Dans la démonstration suivante, nous utiliserons la minoration de Bost de la hauteur de Faltings d'une variété abélienne A de dimension g sur un corps de nombres K. Une démonstration apparaît dans l'appendice de [GR1] où la minoration est écrite $h(A) \geq -g\log\sqrt{2\pi}$ (corollaire 8.4) avec la convention $h(A) = h_F(A) + \log\sqrt{\pi}$ (page 352 de [GR1]). Comme $h_{F,K}(A) \geq h_F(A)$ et $\log(\pi\sqrt{2}) \leq 3/2$, nous emploierons ceci sous la forme $h_{F,K}(A) \geq -3g/2$.

Proposition 3.7 *Soient A une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres K, $(A_i)_{i\in I}$ la famille de ses composantes isotypiques, B une sous-variété abélienne non nulle de A et $J = \{i \in I \mid B \cap A_i$ infini $\}$.*

(1) *$[h_1(A)|\max_{i\in I} h_1(A_i)] \leq 2^{18} g^7 \log_1[K:\mathbb{Q}]$.*

(2) *$[h_1(B)|\max_{i\in J} h_1(A_i)] \leq 2^{35} g^{21}(\log_1[K:\mathbb{Q}])^2$.*

(3) *Si $\max_{i\in I} h_1(A_i) = \max_{i\in J} h_1(A_i)$ alors $[h_1(B)|h_1(A)] \leq 2^{53} g^{28}(\log_1[K:\mathbb{Q}])^3$.*

Ici encore les estimations ne sont pas optimales. Par exemple, au prix de plus de calculs, les trois bornes pourraient être linéaires en $\log_1[K:\mathbb{Q}]$.

Démonstration. Pour $i \in I$, notons B_i la composante neutre de $B \cap A_i$. D'après le lemme 3.2, assertions (2) et (6), B est isogène à $\prod_{i\in J} B_i$ donc d'après le lemme précédent $[h_1(B)|h_1(\prod_{i\in J} B_i)] \leq 2^{17}(\dim B)^6 \log_1[K:\mathbb{Q}]$. Puisque

$$h_{F,K}\left(\prod_{i\in J} B_i\right) = \sum_{i\in J} h_{F,K}(B_i),$$

nous avons $h_1(\prod_{i\in J} B_i) \leq (\mathrm{Card} J)\max_{i\in J} h_1(B_i)$. Par ailleurs, la minoration de Bost $h_{F,K}(B_i) \geq -(3/2)\dim B_i$ fournit pour $j \in J$ l'inégalité

$$h_{F,K}(B_j) \leq (3/2)\dim(B/B_j) + h_{F,K}\left(\prod_{i\in J} B_i\right).$$

Nous en déduisons $[h_1(\prod_{i\in J} B_i)|\max_{i\in J} h_1(B_i)] \le 2\dim B$ donc

$$[h_1(B)|\max_{i\in J} h_1(B_i)] \le 2^{18}(\dim B)^7 \log_1[K:\mathbb{Q}].$$

Si nous choisissons $B = A$ cette inégalité donne (1). Maintenant, si $i \in J$, les variétés abéliennes isotypiques $A_i^{\dim B_i}$ et $B_i^{\dim A_i}$ sont isogènes. Par le lemme précédent,

$$[h_1(A_i^{\dim B_i})|h_1(B_i^{\dim A_i})] \le 2^{17}(\dim A_i)^6(\dim B_i)^6 \log_1[K:\mathbb{Q}]$$

tandis que $[h_1(A_i^{\dim B_i})|h_1(A_i)] \le \dim B_i$ et de même pour $B_i^{\dim A_i}$. En multipliant, nous trouvons $[\max_{i\in J} h_1(A_i)|\max_{i\in J} h_1(B_i)] \le 2^{17}g^{14}\log_1[K:\mathbb{Q}]$. Avec la relation précédente pour $h_1(B)$ nous obtenons (2). L'assertion (3) se déduit directement de (1) et (2). □

3.4 Un contre-exemple

Nous démontrons ici que la conjecture obtenue en remplaçant dans la conjecture 3.5 la conclusion par $h_{\mathcal{L}}(P) \ge c^{-1}(\deg_{\mathcal{L}} A)^{1/g}h_1(A)$ est fausse. Nous donnons un exemple explicite dans le cas $(d,g) = (1,2)$ c'est-à-dire pour une surface abélienne A sur $\mathbb{Q}$. Nous raisonnons par l'absurde.

Étant donné un entier naturel $b > e^{10}$, nous notons E la courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ donnée par le modèle affine de Weierstraß $y^2 = x^3 + b(b+1)^2x$. Soient $\mathcal{L}_1$ sa polarisation principale et $Q \in E(\mathbb{Q})$ le point de coordonnées affines $(b(b+1), b(b+1)^2)$. D'après [S3, (11) p. 727], la hauteur de Néron-Tate vérifie $|2h_{\mathcal{L}_1}(Q) - \log b(b+1)| \le (1/2)\log(b(b+1)^2) + 5$ d'où l'on déduit $0 < 2h_{\mathcal{L}_1}(Q) < 5\log b$ en utilisant $\log b > 10$. En particulier Q n'est pas un point de torsion.

Considérons ensuite un autre entier $e^{10} < b' < e^{11}$ et associons-lui $(E', \mathcal{L}_2, Q')$ comme $(E, \mathcal{L}_1, Q)$ est associé à b. Notons $m = [\log b]$. Nous allons appliquer notre hypothèse à la surface $A = E \times E'$ polarisée par $\mathcal{L} = p_1^*\mathcal{L}_1 \otimes p_2^*\mathcal{L}_2^{\otimes m}$ et au point $P = (Q, Q')$. Ceci signifie qu'ou $h_{\mathcal{L}}(P) \ge c^{-1}(\deg_{\mathcal{L}} A)^{1/2}h_1(A)$ ou P est de torsion sur End$A$. Examinons le premier cas. Nous aurions

$$\begin{aligned} 30\log b &\ge \frac{5+5\log b'}{2}\log b \\ &\ge h_{\mathcal{L}_1}(Q) + mh_{\mathcal{L}_2}(Q') = h_{\mathcal{L}}(P) \\ &\ge c^{-1}(\deg_{\mathcal{L}} A)^{1/2}h_1(A) = c^{-1}\sqrt{2m}h_1(A) \end{aligned}$$

par un calcul immédiat de degré donc $h_1(A) \le 30c\sqrt{\log b}$. Voyons que, pour b sans facteur carré et assez grand, ceci contredit l'estimation

$$\frac{1}{12}\log\max(|j|, |\Delta j|) \le (1+\varepsilon)h_{F,\mathbb{Q}}(E) + O_\varepsilon(1)$$

donnée par Silverman [CS, p. 258] où j et Δ sont l'invariant modulaire et le discriminant minimal de $E/\mathbb{Q}$. Ici $j = 1728$ tandis que $\Delta = a^3$ où a est la partie sans puissance quatrième de $4b(b+1)^2$. En particulier $b|a$ donc $\max(|j|, |\Delta j|) = |\Delta j| \ge b^3$ puis $h_{F,\mathbb{Q}}(E) \ge (1/5)\log b - c'$ d'où $h_1(A) \ge (1/5)\log b - c''$ (pour des constantes c' et c'') qui fournit la contradiction cherchée pour b grand (sans facteur carré).

Il reste à éliminer le cas où P est de End$A$-torsion. Comme Q et Q' ne sont pas de torsion, cela signifierait que E et E' sont isogènes (sur $\mathbb{Q}$) mais le lemme 3.6 donnerait alors une borne pour $h_1(E) \le 2^{17}h_1(E')$ qui contredit à nouveau l'estimation $h_{F,\mathbb{Q}}(E) \ge (1/5)\log b - c'$.

Nous terminons cette partie en montrant comment essentiellement le même contre-exemple interdit de renforcer la conjecture 1.5 en imposant la borne $\deg_{\mathcal{L}} B \le c(\deg_{\mathcal{L}} A)^{1-\varepsilon}$ pour un $\varepsilon > 0$. Nous choisissons les mêmes A et $\mathcal{L}$ mais considérons le point $P' = (0, Q')$ et le poids $m = [(\log b)^{1/2}]$. Alors $h_{\mathcal{L}}(P') \leq 28m \leq 28(\log b)^{1/2}$ rend impossible $h_{\mathcal{L}}(P') \geq c^{-1}h_1(A)$ comme plus haut (toujours pour b assez grand et sans facteur carré). Donc, si la condition renforcée était vraie, un multiple non nul NP' de P' (nous n'avons pas besoin de la borne sur N) serait contenu dans une sous-variété abélienne stricte B de A vérifiant la borne de degré. Comme Q' n'est pas de torsion, nous avons nécessairement $B = 0 \times E'$ d'où $\deg_{\mathcal{L}} B = m$. Puisque $\deg_{\mathcal{L}} A = 2m$, la majoration $\deg_{\mathcal{L}} B \leq c(\deg_{\mathcal{L}} A)^{1-\varepsilon}$ est intenable pour m assez grand (c'est-à-dire b assez grand).

4 Conjectures de Lang-Silverman

Nous introduisons de nouvelles variantes des conjectures 1.3, 1.4 et 1.5 puis démontrons une série d'implications entre elles qui entraînent en particulier le théorème 1.6.

4.1 Autres versions

Nous énonçons d'abord un renforcement de la conjecture 1.3 qui consiste simplement à barrer le mot *principale*.

Conjecture 4.1 *Pour tout couple d'entiers naturels non nuls (d, g) il existe un réel $c > 0$ tel que, si K est un corps de nombres de degré d, A une variété abélienne de dimension g sur K, $\mathcal{L}$ une polarisation sur A et $P \in A(K)$ un point qui n'est pas de torsion sur $Z(\mathrm{End}A)$, alors $h_{\mathcal{L}}(P) \geq c^{-1}h_1(A)$.*

Nous considérons ensuite plusieurs affaiblissements de nos conjectures. En premier lieu, nous restreignons l'énoncé précédent aux variétés simples (en simplifiant l'hypothèse grâce au lemme 3.3).

Conjecture 4.2 *Pour tout couple d'entiers naturels non nuls (d, g) il existe un réel $c > 0$ tel que, si K est un corps de nombres de degré d, A une variété abélienne simple de dimension g sur K, $\mathcal{L}$ une polarisation sur A et $P \in A(K)$ un point qui n'est pas de torsion, alors $h_{\mathcal{L}}(P) \geq c^{-1}h_1(A)$.*

Nous obtenons une variante encore plus faible en autorisant la constante c à dépendre du degré $\deg_{\mathcal{L}} A$.

Conjecture 4.3 *Pour tout triplet d'entiers naturels non nuls (d, g, Δ) il existe un réel $c > 0$ tel que, si K est un corps de nombres de degré d, A une variété abélienne simple de dimension g sur K, $\mathcal{L}$ une polarisation sur A avec $\deg_{\mathcal{L}} A = \Delta$ et $P \in A(K)$ un point qui n'est pas de torsion, alors $h_{\mathcal{L}}(P) \geq c^{-1}h_1(A)$.*

Finalement, nous atténuons la conjecture 1.5 dans le même esprit.

Conjecture 4.4 *Pour tout triplet d'entiers naturels non nuls (d, g, Δ) il existe un réel $c > 0$ tel que, si K est un corps de nombres de degré d, A une variété abélienne de dimension g sur K, $\mathcal{L}$ une polarisation sur A avec $\deg_{\mathcal{L}} A = \Delta$ et $P \in A(K)$, alors ou $h_{\mathcal{L}}(P) \geq c^{-1}h_1(A)$ ou il existe un sous-groupe algébrique strict de A contenant P et de degré au plus c relativement à $\mathcal{L}$.*

Nous disposons maintenant de 7 conjectures de Lang-Silverman. Pour préciser les implications entre elles, nous donnons encore un nom aux conjectures uniformes d'isogénie et de torsion (correspondant aux assertions (2) et (3) du théorème 1.1).

Conjecture I *Pour tout couple d'entiers naturels non nuls (d, g) il existe un réel c tel que, si K est un corps de nombres de degré d et A, A' deux variétés abéliennes* *isogènes de dimension g sur K, alors il existe une isogénie $A \to A'$ de degré au plus c.*

Conjecture T *Pour tout couple d'entiers naturels non nuls (d, g) il existe un réel c tel que, si K est un corps de nombres de degré d et A une variété abélienne de dimension g sur K, alors $\mathrm{Card} A(K)_{\mathrm{tors}} \leq c$.*

Rappelons que le théorème 1.1 et la proposition 1.2 nous donnent en particulier $\mathrm{E} \Longrightarrow \mathrm{I} \Longrightarrow \mathrm{T}$.

Voici le résultat détaillé qui entraîne immédiatement le théorème 1.6. Nous écrivons $\mathrm{A} \overset{\mathrm{B}}{\Longrightarrow} \mathrm{C}$ pour $(\mathrm{A}$ et $\mathrm{B}) \Longrightarrow \mathrm{C}$.

Théorème 4.5 *Nous avons le diagramme d'implications suivant entre nos conjectures*

$$\begin{array}{ccccc}
4.4 & \Longleftrightarrow & 1.5 & \Longrightarrow & T \\
\Downarrow & & \Uparrow {\scriptstyle I} & & \\
4.3 & \overset{E}{\Longrightarrow} & 1.4 & \Longrightarrow & 3.5 \\
\Uparrow & & \Downarrow {\scriptstyle T} & & \\
4.2 & \Longleftarrow & 4.1 & \Longleftrightarrow & 1.3.
\end{array}$$

En particulier, si la conjecture E est vraie, les 7 conjectures 1.3, 1.4, 1.5, 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4 sont équivalentes.

Le reste de cette partie est dévolu à la démonstration de ce théorème.

4.2 Implications faciles

Nous avons trivialement $4.1 \Longrightarrow 1.3$ et $4.1 \Longrightarrow 4.2 \Longrightarrow 4.3$. En spécialisant au cas simple, nous voyons $4.4 \Longrightarrow 4.3$ et même $1.5 \Longrightarrow 4.2$ qui n'a pas trouvé sa place dans le diagramme. Pour obtenir $1.5 \Longrightarrow 4.4$, il suffit de rappeler la formule $\deg_{\mathcal{L}}[N]^{-1}B = N^{2\dim(A/B)} \deg_{\mathcal{L}} B$ pour une sous-variété abélienne B de A et un entier non nul N. Par ailleurs, nous avons déjà vu $1.4 \Longrightarrow 3.5$ comme corollaire de la proposition 3.4.

Nous avons ensuite besoin de l'astuce de Zarhin que nous énonçons sous la forme suivante.

Lemme 4.6 *Étant donné une variété abélienne polarisée $(A, \mathcal{L})$ sur un corps K, il existe une polarisation principale $\mathcal{M}$ sur $Z(A) = A^4 \times \widehat{A}^4$ telle que, si A est vue comme sous-variété abélienne de $Z(A)$ par l'injection sur le premier facteur, alors $\mathcal{M}_{|A} \simeq \mathcal{L}$.*

Démonstration. Rappelons la construction telle qu'elle est donnée pour établir (11.29) page 171 de [MvdG]. On choisit un entier non nul m tel que $\mathrm{Ker}\phi_{\mathcal{L}} \subset \mathrm{Ker}[m]$ puis quatre entiers avec $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m - 1$. On forme le morphisme $f \colon A^8 \to Z(A)$ donné matriciellement par

$$f = \begin{pmatrix}
[1] & & & & [a] & [-b] & [-c] & [-d] \\
& [1] & & & [b] & [a] & [-d] & [c] \\
& & [1] & & [c] & [d] & [a] & [-b] \\
& & & [1] & [d] & [-c] & [b] & [a] \\
& & & & \phi_{\mathcal{L}} & & & \\
& & & & & \phi_{\mathcal{L}} & & \\
& & & & & & \phi_{\mathcal{L}} & \\
& & & & & & & \phi_{\mathcal{L}}
\end{pmatrix}$$

en omettant les coefficients nuls. On montre alors qu'il existe une polarisation $\mathcal{M}$ sur $Z(A)$ telle que $f^*\mathcal{M}$ soit la polarisation sur A^8 produit de 8 copies de $\mathcal{L}$. L'égalité $\deg f = h^0(A,\mathcal{L})^8$ assure que $\mathcal{M}$ est principale tandis que $\mathcal{M}_{|A} \simeq \mathcal{L}$ découle du fait que la restriction de f au premier facteur de A^8 donne l'injection du premier facteur dans $Z(A)$ (première colonne de la matrice). Une subtilité est que, si la polarisation $\mathcal{L}$ est représentée par un faisceau inversible symétrique, la construction ne garantit pas qu'il en aille de même de $\mathcal{M}$ mais nous ne parlons bien que des polarisations. $\square$

Dans la suite, nous verrons toujours $A \subset Z(A)$ comme dans ce lemme.

Nous rappelons aussi $h_{F,K}(Z(A)) = 8h_{F,K}(A)$ d'où $h_1(A) \leq h_1(Z(A)) \leq 8h_1(A)$ si K est un corps de nombres.

Lemme 4.7 *La conjecture 1.3 entraîne la conjecture 4.1.*

Démonstration. Soit $(d,g) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$. Notons c la constante associée au couple $(d,8g)$ fournie par la conjecture 1.3. Si A, $\mathcal{L}$ et P sont comme dans la conjecture 4.1, nous voyons P comme point de $Z(A)(K)$. S'il n'est pas de torsion sur $Z(\mathrm{End}Z(A))$ alors $h_{\mathcal{L}}(P) = h_{\mathcal{M}}(P) \geq c^{-1}h_1(Z(A)) \geq c^{-1}h_1(A)$. Comme il existe une isogénie $Z(A) \to A^8$ respectant les inclusions $A \subset Z(A)$ et $A \subset A^8$ (premier facteur), si P était de torsion sur $Z(\mathrm{End}Z(A))$ alors $(P,0,\ldots,0)$ serait de torsion sur $Z(\mathrm{End}A^8) = Z(M_8(\mathrm{End}A)) \simeq Z(\mathrm{End}A)$ (matrices diagonales) donc P serait de torsion sur $Z(\mathrm{End}A)$, ce qui est exclu par hypothèse. $\square$

Mentionnons la conséquence directe suivante de la conjecture T.

Lemme 4.8 *Si la conjecture T est vraie alors pour tout couple d'entiers naturels non nuls (d,g) il existe un entier N tel que, si K est un corps de nombres de degré d, A une variété abélienne de dimension g sur K, B une sous-variété abélienne de A et $P \in A(K)$ un point dont un multiple par un entier non nul appartient à B alors $NP \in B(K)$.*

Démonstration. Il suffit de définir N comme le plus petit commun multiple de tous les $\mathrm{Card}(A/B)(K)_{\mathrm{tors}}$ pour A, B, K comme dans l'énoncé. La conjecture T en assure la finitude. $\square$

Pour déduire (conditionnellement) les conjectures 4.1 et 1.5 de la conjecture 1.4, nous utilisons le résultat intermédiaire suivant.

Proposition 4.9 *Si les conjectures 1.4 et T sont vraies, alors pour tout couple d'entiers naturels non nuls (d,g) il existe un réel $c > 0$ tel que, si K est un corps de nombres de degré d, A une variété abélienne de dimension g sur K, $\mathcal{L}$ une polarisation sur A, $P \in A(K)$ un point qui n'est pas de torsion et B_P la plus petite sous-variété abélienne de A contenant un multiple non nul de P, alors $h_{\mathcal{L}}(P) \geq c^{-1}h_1(B_P)$.*

Démonstration. Notons N un entier comme dans le lemme précédent. Alors NP est un point de $B_P(K)$. Soit $\varphi \in \mathrm{End}B_P$ tel que $\varphi(NP) = 0$. Comme $NP \in \mathrm{Ker}\varphi$, un multiple non nul de P appartient à la composante neutre $(\mathrm{Ker}\varphi)^0$. Par minimalité de B_P, il vient $(\mathrm{Ker}\varphi)^0 = B_P$ donc $\varphi = 0$. Ainsi le point NP n'est pas de torsion sur $\mathrm{End}B_P$. Appliquons-lui donc la conjecture 1.4. En notant $(B_i)_{i\in I}$ les composantes isotypiques de B_P et en omettant les termes de degré, il vient $h_{\mathcal{L}}(NP) \geq c^{-1}\max_{i\in I} h_1(B_i)$ puis

$$h_{\mathcal{L}}(P) = N^{-2}h_{\mathcal{L}}(NP) \geq c^{-1}N^{-2}(2^{18}g^7\log_1 d)^{-1}h_1(B_P)$$

en employant l'assertion (1) de la proposition 3.7 (pour B_P). $\square$

Les deux implications se démontrent alors de manière semblable.

Lemme 4.10 *Les conjectures 1.4 et T entraînent la conjecture 4.1. Les conjectures 1.4 et I entraînent la conjecture 1.5.*

Démonstration. Comme I $\Longrightarrow$ T, nous pouvons utiliser la proposition précédente dans les deux cas. Fixons $d, g, K, A, \mathcal{L}$ comme dans les conjectures 4.1 et 1.5 puis $P \in A(K)$ et B_P comme dans la proposition. Notons $(A_i)_{1 \leq i \leq s}$ les composantes isotypiques de A ordonnées de sorte que $h_1(A_1) = \max_{1 \leq i \leq s} h_1(A_i)$. Posons encore $B = A_2 + \cdots + A_s$. Si $B_P \not\subset B$ alors l'orthogonal de $B \cap B_P$ dans B_P est une sous-variété abélienne non nulle contenue dans l'orthogonal de B qui vaut A_1 par le lemme 3.2 assertion (5) donc $B_P \cap A_1$ est infini, ce qui se traduit par $1 \in J$ dans la proposition 3.7 puis (assertion (3)) $h_1(A) \leq 2^{53} g^{28} (\log_1 d)^3 h_1(B_P)$. Sous l'hypothèse de la conjecture 4.1, P n'est pas de torsion sur $Z(\mathrm{End}A)$ donc (lemme 3.3) aucun multiple non nul de P n'appartient à B. Dans ce cas, nous avons donc $B_P \not\subset B$ puis l'inégalité de hauteur qui, combinée à la proposition 4.9, fournit la conclusion souhaitée. Établissons maintenant la conjecture 1.5. Si $B_P \not\subset B$ nous concluons exactement de la même façon à l'inégalité de la forme $h_{\mathcal{L}}(P) \geq c^{-1} h_1(A)$. Si $B_P \subset B$ alors, par le lemme 4.8, B contient un multiple NP où $N \geq 1$ est borné en termes de d et g. Il reste à majorer le degré de B. Or, dans le cadre de la proposition 3.4, nous avons $h^0(B, \mathcal{L}) \leq \prod_{i=2}^{s} h^0(A_i, \mathcal{L}) \leq D h^0(A, \mathcal{L})$. Il suffit donc de majorer uniformément D par la conjecture I. $\square$

4.3 Utilisation de la conjecture E

Dans ce paragraphe, nous montrons que les conjectures 4.3 et E entraînent la conjecture 1.4.

Nous commençons par reformuler l'argument de Bertrand [B1, p. 235–8] dans le cas isotypique.

Lemme 4.11 *Soient A une variété abélienne isotypique de dimension g sur un corps de nombres K, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux polarisations sur A et $P \in A(K)$ un point qui n'est pas de torsion sur* End$A$. *Alors, si nous notons $t = \mathrm{rgEnd}A$, il existe $\psi \in \mathrm{End}A \setminus \{0\}$ tel que*

$$h_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{(\deg_{\mathcal{L}} A)^{1/g}}{t \cdot \mathrm{disc}(\mathrm{End}A)^{1/t} (\deg_{\mathcal{L}'} A)^{1/g}} h_{\mathcal{L}'}(\psi(P)).$$

Démonstration. Nous considérons trois formes quadratiques $q_i \colon \mathrm{End}A \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$) définies par $q_1(\varphi) = h_{\mathcal{L}}(\varphi(P))$, $q_2(\varphi) = h_{\mathcal{L}'}(\varphi(P))$ et $q_3(\varphi) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A}(\varphi^\dagger \varphi)$ pour $\varphi \in \mathrm{End}A \otimes \mathbb{R}$. Elles sont définies positives car (pour q_1 et q_2) l'application $\varphi \mapsto \varphi(P)$ est injective par hypothèse sur P. Nous notons alors $v_i(\mathrm{End}A)$ le covolume de End$A$ pour la norme euclidienne $q_i^{1/2}$ sur $\mathrm{End}A \otimes \mathbb{R}$. Par le premier théorème de Minkowski (tel qu'il est énoncé dans [GR2, lemme 3.1]), il existe $\psi \in \mathrm{End}A \setminus \{0\}$ tel que

$$h_{\mathcal{L}'}(\psi(P)) = q_2(\psi) \leq t \cdot v_2(\mathrm{End}A)^{2/t}.$$

Ensuite il existe $\beta \in \mathrm{End}A \otimes \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{L} = \beta^* \mathcal{L}'$ (voir [B1, proposition 3(ii)] : extraction de racine carrée dans $\{\chi \in \mathrm{End}A \otimes \mathbb{R} \mid \chi^\dagger = \chi\}$). Ainsi $\deg_{\mathcal{L}} A = \deg \beta \cdot \deg_{\mathcal{L}'} A$ et $q_1(\varphi) = q_2(\beta\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathrm{End} \otimes \mathbb{R}$. Cette formule peut s'écrire $q_1 = q_2 \circ [\beta]$ où $[\beta] \colon \mathrm{End}A \otimes \mathbb{R} \to \mathrm{End}A \otimes \mathbb{R}$ est la multiplication à gauche par β. Par suite, nous avons $v_1(\mathrm{End}A) = (\det[\beta]) v_2(\mathrm{End}A)$. Le déterminant $\beta' \mapsto \det[\beta']$ de la représentation régulière est une application polynomiale de degré t, le degré $\beta' \mapsto \deg \beta'$ est de degré $2g$ et, grâce à l'hypothèse que A est isotypique, ces deux applications sont des puissances de la norme réduite (puisque $\mathrm{End}A \otimes \mathbb{Q}$ est simple : voir [Mu, p. 179–82] ou [B1, p. 235]). Par conséquent, il vient $\det[\beta] = (\deg \beta)^{t/2g}$

puis

$$t \cdot v_2(\mathrm{End}A)^{2/t} = t(\deg\beta)^{-1/g} v_1(\mathrm{End}A)^{2/t} = t\frac{(\deg_{\mathcal{L}'} A)^{1/g}}{(\deg_{\mathcal{L}} A)^{1/g}} v_1(\mathrm{End}A)^{2/t}.$$

Comparons maintenant v_1 et v_3. Comme $\varphi \mapsto \varphi^\dagger$ est l'adjonction par rapport au produit scalaire b_1 associé à q_1, nous avons $q_1(\varphi) = b_1(\varphi, \varphi) = b_1(\mathrm{id}_A, \varphi^\dagger\varphi) \leq \mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A}(\varphi^\dagger\varphi) b_1(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A) = q_3(\varphi) h_{\mathcal{L}}(P)$ (voir [B1, p. 238]) donc en passant aux covolumes

$$v_1(\mathrm{End}A)^{2/t} \leq h_{\mathcal{L}}(P) v_3(\mathrm{End}A)^{2/t}.$$

En combinant, nous trouvons

$$(\deg_{\mathcal{L}} A)^{1/g} h_{\mathcal{L}'}(\psi(P)) \leq t \cdot v_3(\mathrm{End}A)^{2/t} (\deg_{\mathcal{L}'} A)^{1/g} h_{\mathcal{L}}(P)$$

et il reste seulement à constater $\mathrm{disc}(\mathrm{End}A) = v_3(\mathrm{End}A)^2$: ceci signifie simplement que, si $\varphi_1, \ldots, \varphi_t$ est une base de $\mathrm{End}A$, les matrices de terme général $\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A}(\varphi_i\varphi_j)$ et $\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}A}(\varphi_i^\dagger\varphi_j)$ ont des déterminants de même valeur absolue, comme dans la démonstration de la proposition 2.9 de [GR2]. $\square$

Soit à présent A une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres K de degré d. Nous notons $A_1, \ldots, A_s$ les composantes isotypiques de A. Nous faisons le choix d'une isogénie $\varphi\colon \prod_{i=1}^s B_i^{n_i} \to A$ où les B_i sont simples et deux à deux non isogènes ainsi que de polarisations $\mathcal{N}_i$ sur B_i. Nous supposons aussi que la numérotation des B_i est telle que $\varphi(B_i^{n_i}) = A_i$ (voir lemme 3.2 (3)). Nous écrivons $D = \deg\varphi$, $g_i = \dim B_i$, $t_i = \mathrm{rgEnd}B_i$ et $\Delta_i = \deg_{\mathcal{N}_i} B_i$. De plus, si le triplet (d, g_i, Δ_i) satisfait l'affirmation de la conjecture 4.3, nous notons $c(d, g_i, \Delta_i)$ le réel correspondant ; sinon nous posons $c(d, g_i, \Delta_i) = +\infty$.

Proposition 4.12 *Avec les hypothèses ci-dessus, pour toute polarisation $\mathcal{L}$ sur A et tout point $P \in A(K)$ qui n'est pas de* $\mathrm{End}A$*-torsion, nous avons*

$$h_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{1}{2g^5D^3} \sum_{i=1}^s \frac{(\deg_{\mathcal{L}} A_i)^{1/\dim A_i} h_1(A_i)}{c(d, g_i, \Delta_i)\Delta_i^{1/g_i} \mathrm{disc}(\mathrm{End}B_i)^{1/t_i}}.$$

Démonstration. Puisque l'isogénie induite $\varphi_i\colon B_i^{n_i} \to A_i$ est au plus de degré D, nous avons $|h_{F,K}(A_i) - n_i h_{F,K}(B_i)| \leq (\log D)/2$ d'où

$$h_1(A_i) \leq (n_i + (\log D)/2) h_1(B_i) \leq gDh_1(B_i).$$

Notons $\mathcal{L}_i = \varphi_i^*(\mathcal{L}_{|A_i})$. La formule de projection nous donne d'abord $\deg_{\mathcal{L}_i} B_i^{n_i} = (\deg\varphi_i)\deg_{\mathcal{L}} A_i \geq \deg_{\mathcal{L}} A_i$. En outre, $\varphi^*\mathcal{L}$ est le produit des images réciproques des $\mathcal{L}_i$: cela se déduit du cas d'égalité du théorème 3 de [De] car $h^0(\prod_{i=1}^s B_i^{n_i}, \varphi^*\mathcal{L}) = \prod_{i=1}^s h^0(B_i^{n_i}, \mathcal{L}_i)$ par la proposition 3.1 et l'orthogonalité (5) du lemme 3.2. Si nous désignons par χ l'isogénie $A \to \prod_{i=1}^s B_i^{n_i}$ telle que $\varphi \circ \chi = [D]$ alors le point $\chi(P)$ s'écrit $(Q_1, \ldots, Q_s)$ où $Q_i \in B_i^{n_i}(K)$ est sans torsion sur $\mathrm{End}(B_i^{n_i})$. Il vient donc

$$h_{\mathcal{L}}(P) = D^{-2} h_{\mathcal{L}}(\varphi(\chi(P))) = D^{-2} h_{\varphi^*\mathcal{L}}(\chi(P)) = D^{-2} \sum_{i=1}^s h_{\mathcal{L}_i}(Q_i).$$

Écrivons $\mathcal{L}'_i$ pour le produit des images réciproques de $\mathcal{N}_i$ sous les n_i projections standards $B_i^{n_i} \to B_i$. Nous calculons $\deg_{\mathcal{L}'_i} B_i^{n_i} = (n_ig_i)!g_i!^{-n_i}(\deg_{\mathcal{N}_i} B_i)^{n_i} \leq (n_ig_i)^{n_ig_i}\Delta_i^{n_i}$ d'où la majoration $(\deg_{\mathcal{L}'_i} B_i^{n_i})^{1/n_ig_i} \leq g\Delta_i^{1/g_i}$. Appliquons maintenant le lemme 4.11 à $(B_i^{n_i}, \mathcal{L}_i, \mathcal{L}'_i, Q_i)$. Nous obtenons $\psi_i \in \mathrm{End}(B_i^{n_i}) \setminus \{0\}$ avec

$$h_{\mathcal{L}_i}(Q_i) \geq \frac{(\deg_{\mathcal{L}} A_i)^{1/n_ig_i}}{n_i^3 t_i \cdot \mathrm{disc}(\mathrm{End}B_i)^{1/t_i} g\Delta_i^{1/g_i}} h_{\mathcal{L}'_i}(\psi_i(Q_i))$$

en utilisant que $\mathrm{End}(B_i^{n_i}) = M_{n_i}(\mathrm{End}B_i)$ est de rang $n_i^2 t_i$ et de discriminant $n_i^{n_i^2 t_i}\mathrm{disc}(\mathrm{End}B_i)^{n_i^2}$. Comme ψ_i est non nul, le point $\psi_i(Q_i) \in B_i(K)^{n_i}$ n'est pas de torsion, ce qui signifie que c'est le cas pour l'une de ses coordonnées, disons R_i. Alors par définition de $c(d, g_i, \Delta_i)$ nous trouvons

$$h_{\mathcal{L}'_i}(\psi_i(Q_i)) \geq h_{\mathcal{N}_i}(R_i) \geq \frac{1}{c(d, g_i, \Delta_i)} h_1(B_i) \geq \frac{1}{gDc(d, g_i, \Delta_i)} h_1(A_i).$$

Il reste seulement à majorer $n_i^3 t_i \leq 2g^3$ et à combiner nos estimations. □

Cette proposition permet de montrer très facilement la conjecture 1.4 lorsque les conjectures 4.3 et E sont vraies. En effet, la première donne la finitude de la fonction $c(\cdot,\cdot,\cdot)$ utilisée tandis que la seconde montre que les quantités D, Δ_i et $\mathrm{disc}(\mathrm{End}B_i)$ peuvent être choisies parmi un ensemble fini lorsque d et g sont fixés : pour Δ_i, cela vient de l'assertion (1) du théorème 1.1 (sur B_i) ; pour D, de son assertion (2) ; pour $\mathrm{disc}(\mathrm{End}B_i)$ directement de la conjecture E.

4.4 Fin des démonstrations

Pour établir le théorème 4.5, il nous reste seulement à voir 4.4 $\Longrightarrow$ 1.5 $\Longrightarrow$ T. Bien sûr, si la conjecture E est vraie, nous avons montré 4.4 $\Longrightarrow$ 4.3 $\Longrightarrow$ 1.4 $\Longrightarrow$ 1.5 (et la conjecture T est vraie). L'intérêt ici est de fournir des implications inconditionnelles.

La déduction de la conjecture T à partir de la conjecture 1.5 ne présente pas de difficultés : cette dernière, réduite au cas des points de torsion (de hauteur nulle), affirme en effet $A(K)_{\mathrm{tors}} \subset [N]^{-1}B(K)_{\mathrm{tors}}$ pour un entier N borné et une sous-variété abélienne stricte B de A ; la majoration $\mathrm{Card}(A(K)_{\mathrm{tors}}) \leq N^{2g}\mathrm{Card}(B(K)_{\mathrm{tors}})$ entraîne donc immédiatement la conjecture T par récurrence sur la dimension de A.

Si nous avons mentionné la conjecture T, ce n'est pas tant à cause de cette implication facile mais plutôt parce qu'elle interviendra aussi dans la démonstration de 4.4 $\Longrightarrow$ 1.5. Nous commençons donc en fait par établir 4.4 $\Longrightarrow$ T et la preuve de cette implication sert aussi de préparation à la suivante basée sur le même principe mais plus délicate.

Dans les deux cas, nous utilisons les conventions suivantes. Un corps de nombres K de degré d sera fixé. Comme nous supposons la conjecture 4.4 vérifiée, nous notons $c_1(g, \Delta)$ pour des entiers g et Δ une constante dont elle assure l'existence et nous imposons que cette fonction $c_1(\cdot,\cdot)$ soit croissante en ses deux paramètres : ceci est possible puisque nous pouvons augmenter librement la valeur de cette constante dans la conjecture 4.4.

Lemme 4.13 *La conjecture 4.4 entraîne la conjecture T.*

Démonstration. Commençons par traiter le cas d'une variété abélienne munie d'une polarisation principale. Nous fixons un entier $g \geq 1$ et définissons une suite de réels $u_0, \ldots, u_g$ par $u_0 = g!$ et $u_{i+1} = c_1(g-i, u_i)$ pour $0 \leq i \leq g-1$. Nous posons aussi $v_0 = 1$ et $v_{i+1} = v_i u_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq g-1$. Soit donc A une variété abélienne sur K de dimension g et munie d'une polarisation principale $\mathcal{L}$. Fixons $P \in A(K)_{\mathrm{tors}}$. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des sous-variétés abéliennes C de A telles qu'il existe un entier naturel i avec $\dim C \leq g-i$, $\deg_{\mathcal{L}} C \leq u_i$ et un entier non nul $N \leq v_i$ avec $NP \in C$.

Cet ensemble est non vide car $A \in \mathcal{C}$ puisque $i = 0$ et $N = 1$ conviennent ($\deg_{\mathcal{L}} A = g!$). Considérons un élément $C \in \mathcal{C}$ minimal pour l'inclusion et i, N des entiers associés par définition de $\mathcal{C}$. Si $C \neq 0$, on lui applique la conjecture 4.4 avec le point (de torsion) NP. Il existe donc un sous-groupe algébrique strict G de C, contenant NP et de degré $\deg_{\mathcal{L}} G \leq c_1(\dim C, \deg_{\mathcal{L}} C) \leq c_1(g-i, u_i) = u_{i+1}$. Notons $B = G^0$ la composante neutre. Nous avons $\dim B \leq \dim C - 1 \leq g-i-1$ et

$\deg_{\mathcal{L}} B \leq u_{i+1}$. En outre $NP \in G$ donc $[G : B]NP \in B$ et $[G : B]N \leq N \deg_{\mathcal{L}} G \leq Nu_{i+1} \leq v_{i+1}$. Nous en déduisons que $B \in \mathcal{C}$ mais ceci contredit la minimalité de C donc en réalité nous avons $C = 0$. Par suite P est d'exposant au plus $N \leq v_i \leq v_g$. Comme ceci vaut pour tout élément de $A(K)_{\mathrm{tors}}$, ce groupe est de cardinal au plus v_g^{2g}.

La conjecture T est donc acquise pour les variétés abéliennes admettant une polarisation principale. Nous concluons par l'astuce de Zarhin puisque $\mathrm{Card} A(K)_{\mathrm{tors}} \leq (\mathrm{Card} Z(A)(K)_{\mathrm{tors}})^{1/4}$. □

Voici à présent notre dernière implication.

Proposition 4.14 *La conjecture 4.4 entraîne la conjecture 1.5.*

Démonstration. Nous fixons un entier $g \geq 1$ et définissons une suite $u_0, \ldots, u_{8g-1}$ de réels par $u_0 = (8g)!$ et $u_{i+1} = c_1(8g - i, u_i)$ pour $0 \leq i \leq 8g - 2$. Posons également $U = \max(u_0, \ldots, u_{8g-1})$ et $\Delta = c_1(8g, U)$. Nous supposons la conjecture 4.4 vérifiée donc, par le lemme précédent, il en va de même de la conjecture T. Nous notons alors N l'entier donné par le lemme 4.8 pour le couple $(d, 8g)$.

Soient A une variété abélienne sur K de dimension g et $\mathcal{L}$ une polarisation sur A. Soit $\mathcal{M}$ une polarisation principale sur $Z(A)$ telle que $\mathcal{M}_{|A} \simeq \mathcal{L}$ comme dans le lemme 4.6. Désignons par $A_1, \ldots, A_s$ les composantes isotypiques de A ordonnées de sorte que $h_1(A_1)$ soit maximale. Soit Z_1 la composante isotypique de $Z(A)$ contenant A_1. Notons encore $\mathcal{C}$ l'ensemble (fini) des sous-variétés abéliennes C de $Z(A)$ telles que $C \cap Z_1$ est fini et $\deg_{\mathcal{M}} C \leq \Delta$ puis Σ la somme de tous les éléments de $\mathcal{C}$. Nous allons montrer que la conclusion de la conjecture 1.5 est satisfaite avec B la composante neutre de $\Sigma \cap A$.

Tout d'abord, nous avons bien $B \neq A$: la condition $C \cap Z_1$ fini équivaut à dire que C est contenue dans la somme des autres composantes isotypiques de $Z(A)$; cette condition est stable par somme donc $\Sigma \cap Z_1$ est fini et il en va ainsi de même de $B \cap A_1$. Ensuite, par dimension, Σ peut s'écrire comme la somme d'au plus $8g$ éléments de $\mathcal{C}$ donc la proposition 3.1 itérée implique (somme) $h^0(\Sigma, \mathcal{M}) \leq \Delta^{8g}$ puis (intersection) $h^0(B, \mathcal{L}) \leq \Delta^{8g} h^0(A, \mathcal{L})$ d'où $\deg_{\mathcal{L}} B \leq \Delta^{8g} \deg_{\mathcal{L}} A$.

Soit maintenant $P \in A(K)$. Définissons $\mathcal{D}$ comme l'ensemble des sous-variétés abéliennes D de $Z(A)$ contenant NP, d'intersection $D \cap Z_1$ infinie et telles qu'il existe un entier naturel i avec $i + \dim D \leq 8g$ et $\deg_{\mathcal{M}} D \leq u_i$. Cet ensemble est non vide car il contient $Z(A)$ puisque $\deg_{\mathcal{M}} Z(A) = (8g)! = u_0$. Considérons un élément $D \in \mathcal{D}$ minimal pour l'inclusion. Par définition, nous avons $1 \leq \dim D \leq 8g$ et $\deg_{\mathcal{M}} D \leq U$. Nous séparons deux cas. Supposons d'abord $h_{\mathcal{M}}(NP) \geq \Delta^{-1} h_1(D)$. Nous employons alors trois fois la proposition 3.7. Dans $Z(A)$, son assertion (2) montre $h_1(Z_1) \leq 2^{35}(8g)^{21}(\log_1 d)^2 h_1(D)$. Dans Z_1, cette même assertion (2) fournit $h_1(A_1) \leq 2^{35}(\dim Z_1)^{21}(\log_1 d)^2 h_1(Z_1)$. Enfin, dans A, l'assertion (1) nous donne $h_1(A) \leq 2^{18} g^7 (\log_1 d) h_1(A_1)$. Nous en déduisons

$$h_{\mathcal{L}}(P) \geq (2^{214} g^{49} (\log_1 d)^5 N^2 \Delta)^{-1} h_1(A)$$

qui correspond à la première partie de l'alternative de la conjecture 1.5. Passons au second cas. Ici $h_{\mathcal{M}}(NP) < c_1(\dim D, \deg_{\mathcal{M}} D)^{-1} h_1(D)$ donc la conjecture 4.4 (pour D) montre qu'il existe un sous-groupe algébrique strict C de D, contenant NP et tel que $\deg_{\mathcal{M}} C \leq c_1(\dim D, \deg_{\mathcal{M}} D)$. Nous pouvons remplacer C par sa composante neutre (grâce à la propriété de l'entier N donné par le lemme 4.8) et donc supposer que C est une sous-variété abélienne. Si l'intersection $C \cap Z_1$ était infinie nous aurions en particulier $\dim D > \dim C > 0$. Par définition de $\mathcal{D}$, il existe i avec $i + \dim D \leq 8g$ et $\deg_{\mathcal{M}} D \leq u_i$. Ainsi nous aurions $i \leq 8g - 2$ et $\deg_{\mathcal{M}} C \leq c_1(8g - i, u_i) = u_{i+1}$ donc $C \in \mathcal{D}$ (avec $i + 1 + \dim C \leq 8g$). Ceci contredirait la minimalité de D. Nous en déduisons que $C \cap Z_1$ est fini puis, avec

$\deg_{\mathcal{M}} C \leq c_1(8g, U) = \Delta$, que $C \in \mathcal{C}$. En particulier $NP \in C \subset \Sigma$ donc $NP \in \Sigma \cap A$. En utilisant à nouveau le lemme 4.8, nous trouvons $NP \in B$. $\square$

Références

[B1] D. Bertrand. Minimal heights and polarizations on group varieties. *Duke Math. J.* 80. 1995. p. 223–250.

[B2] D. Bertrand. Duality on tori and multiplicative dependence relations. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 62. 1997. p. 198–216.

[BFGR] N. Bruin, E. V. Flynn, J. González et V. Rotger. On finiteness conjectures for endomorphism algebras of abelian surfaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 141. 2006. p. 383–408.

[CS] G. Cornell et J. Silverman. *Arithmetic geometry* (Storrs, Conn., 1984), Springer-Verlag N. Y., 1986.

[D1] S. David. Fonctions thêta et points de torsion des variétés abéliennes. *Compositio Math.* 78. 1991. p. 121–160.

[D2] S. David. Minorations de hauteurs sur les variétés abéliennes. *Bull. Soc. Math. France* 121. 1993. p. 509–544.

[De] O. Debarre. Polarisations sur les variétés abéliennes produits. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 323. 1996. p. 631–635.

[GR1] É. Gaudron et G. Rémond. Théorème des périodes et degrés minimaux d'isogénies. *Comment. Math. Helv.* 89. 2014. p. 343–403.

[GR2] É. Gaudron et G. Rémond. Polarisations et isogénies. *Duke Math. J.* 163. 2014. p. 2057–2108.

[GR3] É. Gaudron et G. Rémond. Torsion des variétés abéliennes CM. *Proc. Amer. Math. Soc.* à paraître.

[LR] C. Liebendörfer et G. Rémond. Hauteurs de sous-espaces sur les corps non commutatifs. *Math. Z.* 255. 2007. p. 549–577.

[Me] L. Merel. Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres. *Invent. Math.* 124. 1996. p. 437–449.

[MvdG] B. Moonen et G. van der Geer. *Abelian varieties.* Livre en préparation, voir `https://www.math.ru.nl/~bmoonen/research.html`.

[Mu] D. Mumford. *Abelian varieties.* Oxford University Press. London. 1974.

[Par] P. Parent. Bornes effectives pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres. *J. Reine Angew. Math.* 506. 1999. p. 85–116.

[Paz] F. Pazuki. Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les surfaces abéliennes. *Manuscripta Math.* 142. 2013. p. 61–99.

[Re] I. Reiner. *Maximal orders*, volume 28 de *London Mathematical Society Monographs. New Series.* The Clarendon Press Oxford University Press. 2003.

[R] G. Rémond. Variétés abéliennes et ordres maximaux. *Rev. Mat. Iberoam.* à paraître.

[Si] A. Silverberg. Torsion points on abelian varieties of CM-type. *Compositio Math.* 68. 1988. p. 241–249.

[S1] J. Silverman. Lower bounds for height functions. *Duke Math. J.* 51. 1984. p. 395–403.

[S2] J. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves.* Graduate Texts in Mathematics, 106. Springer-Verlag, New York, 1986.

[S3] J. Silverman. The difference between the Weil height and the canonical height on elliptic curves. *Math. Comp.* 55. 1990. p. 723–743.

[Ts] J. Tsimerman. A proof of the André-Oort conjecture for A_g. 2015. `arXiv:1506.01466`.

Gaël Rémond
Institut Fourier, UMR 5582
CS 40700
38058 Grenoble Cedex 9
France
`Gael.Remond@univ-grenoble-alpes.fr`