Généralisations du problème de Lehmer et applications à la conjecture de Zilber-Pink

Gaël RÉMOND

septembre 2011

Résumé. — Nous proposons une présentation unifiée des différents énoncés de minorations de hauteur qui trouvent leur source dans le problème de Lehmer. Elle englobe les versions sur les tores multiplicatifs, les variétés abéliennes, les variantes dites relatives ainsi que le problème de Bogomolov effectif. Cette approche suggère une conjecture dont la formulation est nouvelle même dans le cadre classique des nombres algébriques. Nous examinons ensuite comment ces minorations de hauteur s'appliquent à la conjecture de Zilber-Pink : quitte à retirer un ensembe exceptionnel convenable, l'intersection considérée vérifie une propriété de Northcott et il suffit donc de borner la hauteur pour montrer la finitude.

Abstract. — After a classical introduction to heights, we discuss various generalisations of Lehmer's problem. The framework is that of normalized heights on abelian varieties and tori. We include the study of obstruction indices, relative at the same time to an arbitrary ground field and to an algebraic subgroup. We introduce the notion of a Lehmer group to unify our statements. Usual examples correspond to the trivial group (classical Lehmer's problem), the torsion group (relative Lehmer's problem) or the whole group of algebraic points (effective Bogomolov's problem) but we show that also all finite rank subgroups are of interest, even in the one-dimensional case. We then discuss the applications of such height lower bounds to the Zilber-Pink conjecture. We show how all the variants quoted can be used to provide a crucial step toward the conjecture : once one knows (by other methods) that the height of the intersection under consideration is bounded, the Lehmer-like bounds allow to get finiteness.

1 Introduction

a) Objectifs

Ces notes poursuivent trois buts assez distincts.

Dans un premier temps (partie 2), nous proposons une introduction à la notion de hauteur. Celle-ci est tout à fait classique et ne prétend à aucune originalité. Le lecteur ayant déjà manipulé des hauteurs peut la sauter sans remords tandis que le novice devrait y trouver de quoi suivre le reste du texte (les autres prérequis se limitent, à quelques exceptions près, à des connaissances de base en géométrie algébrique et sur les variétés abéliennes).

Ensuite, nous présentons en partie 3 le classique problème de Lehmer sur la hauteur des nombres algébriques puis toute une famille de généralisations à diverses hauteurs normalisées. La formulation est nouvelle : basée sur un groupe Γ, elle englobe dans une seule définition les problèmes de Lehmer en dimension supérieure (où Γ est trivial ou égal au groupe des points de torsion) ainsi que le problème de Bogomolov effectif (lorsque Γ est le groupe de tous les points algébriques). Nous montrons aussi que toute conjecture absolue entraîne automatiquement une version plus fine, relative à un sous-groupe algébrique (voir théorème 3.7).

Enfin nous examinons (partie 4) comment ces généralisations s'appliquent à la conjecture de Zilber-Pink (précisément le cas constant sur une variété abélienne ou un tore). En effet, même si le problème de Lehmer est toujours ouvert sous toutes ses formes, nous connaissons dans de nombreux cas des versions faibles, généralisant le théorème de Dobrowolski, quelquefois dites à ε près (ici nous dirons que Γ est un groupe de Dobrowolski, voir définition 3.1). De plus, comme l'ont constaté les premiers Bombieri, Masser et Zannier [BMZ1] sur les tores, ces versions faibles suffisent pour les applications à la conjecture de Zilber-Pink. Nous décrivons ceci en deux temps : d'une part une version Lehmer (Γ de type fini) et d'autre part une version Bogomolov (Γ les points algébriques) qui débouche sur des énoncés de type Zilber-Pink plus Bogomolov. Dans les deux cas, ces applications ne donnent que la moitié de la réponse puisque l'on ne traite que les points de hauteur bornée ; il faut indépendamment montrer que la hauteur est bornée sur les ensembles considérés, mais ceci fait l'objet du cours de Ph. Habegger. Les résultats que nous démontrons dans cette partie sont essentiellement déjà connus mais nous en présentons de nouvelles démonstrations et nous traitons de la manière la plus proche possible les deux cas abélien et torique.

En appendice, nous avons regroupé quelques énoncés techniques qui servent dans plusieurs démonstrations des parties 3 et 4, particulièrement au paragraphe c) de la partie 4. En épilogue, nous mentionnons quelques progrès réalisés entre l'écriture de ce texte et sa publication.

b) Conventions

Dans la plus grande partie du texte, nous nons placerons dans la situation suivante.

Notations 1.1 *Soient k un corps de nombres et A un groupe algébrique connexe sur k muni d'une compactification $\bar{A}$ sur k, elle-même équipée d'un faisceau inversible ample $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(\bar{A})$. Nous supposons de plus être dans l'un des deux cas suivants :*

(1) *Cas abélien : A est une variété abélienne, $\bar{A} = A$ et $\mathcal{L}$ est symétrique.*

(2) *Cas torique : $A = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ et $\bar{A}$ est une compactification équivariante lisse de A.*

Dans le cas torique (2), les choix usuels sont $\bar{A} = \mathbb{P}^n$ et $\bar{A} = (\mathbb{P}^1)^n$. Comme nous le verrons le choix d'une compactification n'aura pas d'influence sur nos énoncés ; on peut donc se restreindre à l'un de ces deux exemples. Toutefois nous sommes amenés dans les preuves à faire des éclatements et donc à faire intervenir d'autres compactifications.

Le cadre naturel de notre étude est très probablement celui des variétés semi-abéliennes, englobant (1) et (2), mais, en raison de diverses complications et en l'absence presque complète de résultats, nous repoussons un (rapide) examen du cas général à la dernière partie de ce texte.

Afin d'unifier au maximum les cas (1) et (2), nous utilisons toujours une notation additive sur A. Ainsi dans le cas torique 0 désignera le point $(1, \ldots, 1)$ et mx le point $(x_1^m, \ldots, x_n^m)$ si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $m \in \mathbb{Z}$. De la même façon, nous ne parlerons pas de sous-variété abélienne dans le cas (1) ou de sous-tore dans le cas (2) mais uniformément de sous-groupe algébrique connexe ou de sous-variété semi-abélienne. Nous écrirons aussi souvent $s = 2$ dans le cas (1) et $s = 1$ dans le cas (2) de sorte que, par exemple, A a $N^{s \dim A}$ points de N-torsion et la hauteur normalisée est homogène de degré s sur A. Enfin nous utiliserons la notation $g = \dim A$ même si $g = n$ dans le cas (2).

L'autre convention importante concerne le corps de base : nous travaillerons majoritairement sur une clôture algébrique fixée $\bar{k}$ de k. Pour cette raison nous nous autorisons à écrire $x \in A$ en lieu et place de $x \in A(\bar{k})$ et, lorsque nous parlons d'une sous-variété V de A, nous faisons toujours référence à une sous-variété de A sur $\bar{k}$ c'est-à-dire précisément un sous-schéma fermé intègre V de $A_{\bar{k}} = A \underset{\mathrm{Spec}k}{\times} \mathrm{Spec}\bar{k}$. Lorsque V provient d'un sous-schéma fermé de $A_L = A \underset{\mathrm{Spec}k}{\times} \mathrm{Spec}L$ (notion cruciale pour le problème de Lehmer) pour un sous-corps $k \subset L \subset \bar{k}$, nous dirons que V est définie sur L.

Nous supprimons également la référence à $\bar{k}$ dans les notations suivantes : $\Gamma \subset A$ signifie $\Gamma \subset A(\bar{k})$; $\mathrm{End}(A)$ désigne toujours $\mathrm{End}(A_{\bar{k}})$ et, plus généralement, si A' est un autre groupe algébrique commutatif, $\mathrm{Hom}(A, A')$ représente le groupe des morphismes de groupes algébriques $A_{\bar{k}} \to A'_{\bar{k}}$.

Enfin, de par la nature même du problème de Lehmer, le texte regorge de constantes. Elles dépendent généralement de $(A, \bar{A}, \mathcal{L})$ et souvent du choix du groupe Γ considéré mais pas des points ou sous-variétés $\alpha, x, V \ldots$ introduits ensuite (ceci sera précisé à chaque fois). Comme nous ne calculons quasiment aucune de ces constantes, nous employons souvent la lettre générique c (toujours un réel strictement positif) pour diverses quantités non significatives. En revanche, les constantes plus individualisées, comme $c_0, c_\Gamma(\varepsilon), \ldots$ ne changent pas, elles, de valeur au fil du temps.

2 Hauteur

a) Sur les nombres algébriques

Nous introduisons la hauteur logarithmique absolue de Weil qui est une fonction $h\colon \overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}_+$ qui sert à « mesurer » les nombres algébriques. Elle est très facile à définir sur $\mathbb{Q}$: pour $a, b \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux avec $b \neq 0$, on pose

$$h(a/b) = \log \max(|a|, |b|).$$

Nous décrivons maintenant trois façons de définir l'extension à $\overline{\mathbb{Q}}$ de cette fonction.

1. Procédé limite. On définit tout d'abord une hauteur naïve de la façon suivante. Si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ on note $\mu_\alpha = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ son polynôme minimal dans $\mathbb{Z}[X]$ (avec $a_d > 0$) et l'on pose :

$$h_{\text{naïve}}(\alpha) = \frac{1}{d} \log \max_{0 \leq i \leq d} |a_i|.$$

La hauteur de Weil s'obtient par la formule :

$$h(\alpha) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} h_{\text{naïve}}(\alpha^n).$$

Il faut bien sûr vérifier que la limite existe (nous le verrons plus bas) ce qui est l'inconvénient d'utiliser cette approche comme définition. L'avantage est que ce procédé est celui qui servira dans la suite pour obtenir des hauteurs normalisées plus sophistiquées, comme la hauteur de Néron-Tate. Si l'on admet l'existence de la limite, on voit immédiatement sur la définition que $h(\alpha^n) = nh(\alpha)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et même, en utilisant $h_{\text{naïve}}(\alpha^{-1}) = h_{\text{naïve}}(\alpha)$, on trouve $h(\alpha^n) = |n| h(\alpha)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \neq 0$. Par suite on note aussi que si α est une racine de l'unité alors $h(\alpha) = 0$.

2. Mesure de Mahler. La deuxième définition possible, la plus facile à énoncer, se rattache à la mesure de Mahler. Pour $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ on utilise son polynôme minimal

μ_α comme ci-dessus et l'on note $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ les racines de μ_α (les conjugués de α). On pose alors

$$h(\alpha) = \frac{1}{d} \log \left(a_d \prod_{i=1}^{d} \max(1, |\alpha_i|) \right).$$

Avec cette définition la quantité $\exp(dh(\alpha))$ s'appelle la mesure de Mahler de μ_α. Par la formule de Jensen, on trouve aussi :

$$h(\alpha) = \frac{1}{d} \int_0^1 \log |\mu_\alpha(e^{2i\pi t})| \mathrm{d}t.$$

Si l'on majore dans cette formule $|\mu_\alpha(e^{2i\pi t})| \leq \sum_{i=0}^{d} |a_i| \leq (d+1) \max_{0 \leq i \leq d} |a_i|$, on trouve $h(\alpha) \leq h_{\text{naïve}}(\alpha) + \frac{\log(d+1)}{d}$. D'un autre côté, d'après les relations entre coefficients et racines, on a

$$(*) \qquad a_j = a_d \sum_{\mathrm{Card}(I)=d-j} \prod_{i \in I} (-\alpha_i)$$

où I désigne une partie de $\{1, \dots, d\}$. Ceci entraîne immédiatement

$$|a_j| \leq 2^d a_d \prod_{i=1}^{d} \max(1, |\alpha_i|)$$

puis $h_{\text{naïve}}(\alpha) \leq h(\alpha) + \log 2$.

En particulier nous avons $|h(\alpha) - h_{\text{naïve}}(\alpha)| \leq \log 2$, ce qui permet d'affirmer que h hérite de $h_{\text{naïve}}$ la propriété fondamentale de Northcott : *il n'y a qu'un nombre fini de nombres algébriques de degré et de hauteur bornés.* Ceci était clair pour $h_{\text{naïve}}$ puisque l'on se ramenait à un ensemble fini de polynômes minimaux.

3. Place par place. La définition la plus utile en pratique mais sans doute la moins parlante des trois utilise la notion de places d'un corps de nombres. Une place v est une classe d'équivalence de valeurs absolues non triviales sur le corps et ici nous choisissons toujours comme représentante la valeur absolue qui étend l'une des valeurs absolues usuelles de $\mathbb{Q}$ ce qui peut se traduire par le fait que pour chaque nombre premier p la quantité $|p|_v$ doit prendre l'une des trois valeurs p, 1 ou $1/p$. Dans le premier cas, la valeur absolue est dite archimédienne et la place est dite infinie. Dans les deux autres cas, la valeur absolue est ultramétrique et la place finie. Si v est une place d'un corps K, on note K_v le complété de K en v et $\mathbb{Q}_v$ le complété de $\mathbb{Q}$ en la place de $\mathbb{Q}$ induite par v ($\mathbb{Q}_v$ est $\mathbb{R}$ ou un corps p-adique).

Maintenant, si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, on choisit un corps de nombres K qui contient α et l'on pose

$$h(\alpha) = \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max(1, |\alpha|_v)$$

où la somme parcourt toutes les places de K. On vérifie que la sommation a un sens car tous les termes sauf un nombre fini sont nuls (si $\alpha \neq 0$ on a $|\alpha|_v \neq 1$ seulement pour un nombre fini de places) et les propriétés d'extensions de valeurs absolues montrent que la formule ne dépend pas du choix du corps K. Il est également clair sur cette définition que $h(\alpha^n) = nh(\alpha)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Vérifions maintenant que les définitions 2 et 3 coïncident. Tout d'abord si v est une place ultramétrique d'un corps contenant les α_i on constate que

$$\max_{0 \leq j \leq d} \left| \sum_{\mathrm{Card}(I)=d-j} \prod_{i \in I} (-\alpha_i) \right|_v = \prod_{i=1}^{d} \max(1, |\alpha_i|_v)$$

(la majoration $\leq$ est claire et, dans l'autre sens, l'une des sommes a un unique terme dominant de valeur absolue le membre de droite). Comme les a_j sont premiers entre eux, $(*)$ montre que le membre de gauche ci-dessus vaut $1/|a_d|_v$. En utilisant la formule du produit pour a_d on constate alors que la hauteur définie *via* la mesure de Mahler s'écrit

$$\frac{1}{d}\sum_p \sum_{i=1}^{d} \log\max(1, |\alpha_i|_p)$$

où la première somme porte sur les places de $\mathbb{Q}$ et où pour chaque telle place p on a choisi une extension de $|\cdot|_p$ à un corps contenant les α_i. Il est alors possible d'identifier terme à terme cette somme à la définition place par place avec le corps $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ car les nombres $|\alpha_i|_p$ sont exactement les $|\alpha|_v$ où v parcourt les places au-dessus de p, à condition de répéter $[K_v : \mathbb{Q}_v]$ fois le nombre $|\alpha|_v$.

Faisons enfin le lien avec la première approche. Comme les deux autres coïncident, nous savons à la fois que $|h_{\text{naïve}}(\alpha) - h(\alpha)| \leq \log 2$ et que $h(\alpha^n) = nh(\alpha)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Nous en déduisons immédiatement $|(1/n)h_{\text{naïve}}(\alpha^n) - h(\alpha)| \leq (\log 2)/n$ pour $n \geq 1$ et ceci prouve bien que la suite $h_{\text{naïve}}(\alpha^n)/n$ a une limite qui est $h(\alpha)$. Les trois approches donnent donc bien la même notion et toutes les propriétés mentionnées valent donc pour cette unique hauteur de Weil.

Avant de passer à des hauteurs plus sophistiquées sur les variétés et groupes algébriques, nous donnons quelques propriétés supplémentaires de la hauteur de Weil. En premier lieu, nous démontrons le théorème de Kronecker.

Lemme 2.1 *Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$. On a $h(\alpha) = 0$ si et seulement si α est une racine de l'unité.*

Démonstration : Un sens a déjà été vu. Supposons ici que $h(\alpha) = 0$. Alors tous les nombres α^n, $n \in \mathbb{N}$, sont de hauteur nulle et de degré inférieur ou égal à celui de α. Par la propriété de Northcott, il n'y a qu'un nombre fini de tels nombres donc il existe en particulier des entiers naturels $m < n$ tels que $\alpha^m = \alpha^n$. Par suite $\alpha^{n-m} = 1$. $\square$

Toujours à partir de la propriété de Northcott, nous pouvons démontrer une propriété plus forte.

Lemme 2.2 *La hauteur $h\colon \overline{\mathbb{Q}}^\times \to \mathbb{R}_+$ se factorise en une norme $\overline{\mathbb{Q}}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.*

Démonstration : L'inégalité triangulaire résultera de la formule $h(\alpha\beta) \leq h(\alpha) + h(\beta)$ pour $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ déduite de la définition 3. Lorsque ξ est une racine de l'unité $h(\alpha\xi) = h(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. Par suite, h se factorise à travers le quotient de $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ par le groupe des racines de l'unité, qui n'est autre que $\overline{\mathbb{Q}}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. L'application obtenue est une norme sur ce $\mathbb{Q}$-espace vectoriel qui s'étend en une semi-norme $|\cdot|$ sur $\overline{\mathbb{Q}}^\times \otimes \mathbb{R}$ (de manière unique). Si $|\sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes x_i| = 0$ avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ multiplicativement indépendants et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, considérons pour $N \in \mathbb{N}$ l'entier $N_i \in \mathbb{Z}$ le plus proche de Nx_i. Il vient

$$h\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes N_i\right) \leq \Big|\sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes (N_i - Nx_i)\Big| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n h(\alpha_i).$$

Les nombres $u_N = \sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes N_i$ qui s'écrivent dans $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ plutôt $u_N = \prod_{i=1}^n \alpha_i^{N_i}$ appartiennent tous au corps de nombres $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et leur hauteur est bornée indépendamment de N. La propriété de Northcott entraîne la finitude de leur ensemble. Par construction ceci n'est possible que si les x_i sont tous nuls et cela montre bien que $|\cdot|$ est une norme. $\square$

Notons encore ici que si α n'est pas un entier algébrique alors $a_d \geq 2$ dans les notations ci-dessus donc, sur la définition 2, on constate $h(\alpha) \geq (\log 2)/d$. D'un autre côté, si α est le nombre $2^{1/d}$ de degré d, alors $h(\alpha) = (\log 2)/d$. Le problème de Lehmer (voir partie suivante) est de savoir s'il existe des nombres de hauteur non nulle beaucoup plus petite que cela (plus petite que c/d où c est une constante).

b) Sur les variétés

Définissons maintenant la hauteur sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n$. Nous généralisons de manière directe la définition place par place. Si $x \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ nous choisissons un système de coordonnées $(x_0 : \cdots : x_n)$ pour x et un corps de nombres K contenant les nombres $x_0, \ldots, x_n$. Nous posons alors

$$h(x) = \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max_{0 \leq i \leq n} |x_i|_v$$

où v parcourt à nouveau les places de K. Ici encore la somme ne dépend pas du choix de K et, par la formule du produit, elle ne dépend pas non plus du choix de coordonnées pour x. La hauteur obtenue sur $\mathbb{P}^1$ correspond à celle définie précédemment : la hauteur d'un nombre algébrique $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ coïncide avec celle du point projectif $(1 : \alpha) \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ (en d'autres termes nous avons étendu h de $\overline{\mathbb{Q}}$ à $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ en posant $h(\infty) = 0$). Remarquons encore que l'on a $h(x_0^m : \cdots : x_n^m) = mh(x_0 : \cdots : x_n)$ lorsque $m \in \mathbb{N}$. En revanche nous n'avons pas de formule lorsque $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et $n \geq 2$; par exemple avec $m = -1$ nous avons $h(1 : 2^k : 3^\ell) = \log \max(2^k, 3^\ell)$ mais $h(1 : 2^{-k} : 3^{-\ell}) = \log(2^k 3^\ell)$ pour $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Considérons ensuite une variété projective V sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Chaque morphisme φ de V dans un espace projectif $\mathbb{P}^n$ induit une hauteur $h_\varphi : V(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}_+$ en posant simplement $h_\varphi(x) = h(\varphi(x))$. Ici la hauteur dépend du choix du morphisme φ mais l'on peut montrer [Mu, p. 271] que si deux morphismes $\varphi : V \to \mathbb{P}^n$ et $\psi : V \to \mathbb{P}^m$ correspondent au même faisceau inversible, c'est-à-dire si $\varphi^*\mathcal{O}(1) \simeq \psi^*\mathcal{O}(1)$, alors les hauteurs diffèrent par une fonction bornée :

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V(\overline{\mathbb{Q}}) \qquad |h_\varphi(x) - h_\psi(x)| \leq c.$$

Ainsi, si $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(V)$ est engendré par ses sections globales, nous pouvons définir un élément $h_\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{V(\overline{\mathbb{Q}})}/\mathbf{B}$ où $\mathbf{B}$ est l'espace des fonctions bornées $V(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$. On montre, à l'aide du plongement de Segre [Mu, p. 272], que l'on a $h_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} = h_\mathcal{L} + h_{\mathcal{L}'}$ dans cet espace ce qui permet, en écrivant un faisceau inversible comme différence de deux faisceaux engendrés par leurs sections globales, d'étendre la hauteur par linéarité en $\mathrm{Pic}(V) \to \mathbb{R}^{V(\overline{\mathbb{Q}})}/\mathbf{B}$. Notons que, s'il est commode de disposer de cette extension, on se restreint souvent aux hauteurs associées à des faisceaux amples car elles héritent de $\mathbb{P}^n$ la propriété de Northcott. Par exemple lorsque l'on parle de points de hauteur bornée on sous-entend toujours que la hauteur provient d'un faisceau ample.

Si l'on veut associer à $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(V)$ une fonction hauteur $h_\mathcal{L} : V(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ bien définie (et non seulement une classe modulo $\mathbf{B}$), il faut impérativement une donnée supplémentaire. Dans le cadre de la théorie d'Arakelov, elle consiste en un modèle entier et une collection de normes hermitiennes sur les fibres des extensions de $\mathcal{L}$ à $\mathbb{C}$ (ou en une collection de normes en toutes les places dans le point de vue adélique). Ici, en vue d'aboutir à des hauteurs normalisées de groupes algébriques, nous ajoutons la donnée d'un endomorphisme $f : V \to V$ tel que $f^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes q}$ avec $q \in \mathbb{N}\setminus\{0, 1\}$ (il s'agit de la situation étudiée pour définir des hauteurs en dynamique algébrique). Nous choisissons une hauteur $h_\mathcal{L} : V(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ quelconque associée à $\mathcal{L}$

(un représentant de la classe de hauteurs) et posons pour $x \in V(\overline{\mathbb{Q}})$

$$\hat{h}_{\mathcal{L}}(x) = \lim_{m \to +\infty} \frac{h_{\mathcal{L}}(f^m(x))}{q^m}.$$

On vérifie l'existence de cette limite en traduisant la trivialité de $f^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{\otimes -q}$ en une majoration $|h_{\mathcal{L}}(f(x)) - qh_{\mathcal{L}}(x)| \leq c$. Ceci entraîne pour $n \geq m$

$$\left| \frac{h_{\mathcal{L}}(f^m(x))}{q^m} - \frac{h_{\mathcal{L}}(f^n(x))}{q^n} \right| \leq \frac{c}{q^n} + \cdots + \frac{c}{q^{m+1}} \leq \frac{c}{(q-1)q^m}$$

et donc que l'on a une suite de Cauchy. On a aussi $|\hat{h}_{\mathcal{L}}(x) - h_{\mathcal{L}}(x)| \leq c/(q-1)$ qui montre que $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ est également un représentant de la classe de hauteurs associée à $\mathcal{L}$. C'est le représentant *normalisé* par rapport à f c'est-à-dire le seul tel que $\hat{h}_{\mathcal{L}}(f(x)) = q\hat{h}_{\mathcal{L}}(x)$ pour tout $x \in V(\overline{\mathbb{Q}})$.

Si nous avons deux endomorphismes $f, g\colon V \to V$ avec $f^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes q}$ et $g^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes r}$ pour $q, r \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ nous pouvons définir deux hauteurs $\hat{h}_{\mathcal{L},f}$ et $\hat{h}_{\mathcal{L},g}$ normalisées par rapport à f ou g. Lorsque f et g commutent, elles coïncident : en effet, en divisant l'égalité $\hat{h}_{\mathcal{L},f}(g^m(f(x))) = q\hat{h}_{\mathcal{L},f}(g^m(x))$ par r^m et en passant à la limite, on a $\hat{h}_{\mathcal{L},g}(f(x)) = q\hat{h}_{\mathcal{L},g}(x)$ d'où $\hat{h}_{\mathcal{L},f} = \hat{h}_{\mathcal{L},g}$.

Ce procédé général permet de réinterpréter la définition par limite de la hauteur de Weil : la hauteur naïve était un représentant de la classe de hauteurs associée à $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^1$ et nous l'avons normalisée par rapport aux endomorphismes $[m]\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ donnés par $[m](x_0 : x_1) = (x_0^m : x_1^m)$ si $m \geq 0$ et $[m](x_0 : x_1) = (x_1^{-m} : x_0^{-m})$ sinon, tous ces endomorphismes commutant entre eux et vérifiant $[m]^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(|m|)$. De même la hauteur de Weil sur $\mathbb{P}^n$ est associée à $\mathcal{O}(1)$ et normalisée par rapport aux $[m]\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, $(x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (x_0^m : \cdots : x_n^m)$ pour $m \geq 2$.

c) Sur les variétés semi-abéliennes

Si A est un groupe algébrique, les morphismes de multiplication $[m]\colon A \to A$, $x \mapsto mx$ où $m \in \mathbb{Z}$ forment une famille commutative à laquelle on peut appliquer ce qui précède.

Plaçons-nous d'abord dans le cadre des notations 1.1. Dans le cas abélien, on a $[m]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes m^2}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et la hauteur normalisée $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ associée à cette famille d'endomorphismes est la célèbre hauteur de Néron-Tate. Elle vérifie $\hat{h}_{\mathcal{L}}(mx) = m^2\hat{h}_{\mathcal{L}}(x) = m^s\hat{h}_{\mathcal{L}}(x)$ et on montre même grâce au théorème du cube que c'est une forme quadratique sur $A(\bar{k})$ [Mu, p. 274]. De plus, par les arguments des lemmes 2.1 et 2.2, on montre que $\hat{h}_{\mathcal{L}}(x) = 0$ équivaut à $x \in A_{\text{tors}}$ (points de torsion) et que $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ induit une forme quadratique définie positive sur $A(\bar{k}) \otimes \mathbb{R}$ (autrement dit $\hat{h}_{\mathcal{L}}^{1/s}$ est une norme).

Dans le cas torique, le morphisme $[m]\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ (c'est-à-dire ici $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1^m, \ldots, x_n^m)$) ne s'étend en général en $[m]\colon \bar{A} \to \bar{A}$ que si $m \geq 0$. On a alors $[m]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes m}$ et donc à nouveau une hauteur normalisée $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ qui vérifie encore $\hat{h}_{\mathcal{L}}(mx) = m^s\hat{h}_{\mathcal{L}}(x)$. Si $\bar{A} = \mathbb{P}^n$ et $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$ on retrouve la hauteur de Weil sur $\mathbb{P}^n$. Le choix $\bar{A} = (\mathbb{P}^1)^n$ présente l'avantage de posséder des extensions $[m]\colon \bar{A} \to \bar{A}$ y compris pour $m < 0$. Avec $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1, \ldots, 1)$, la hauteur normalisée obtenue sur $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ est la somme des hauteurs de Weil des coordonnées. De ce fait, le lemme 2.2 implique que $\hat{h}_{\mathcal{L}}$ induit une norme sur $A(\bar{k}) \otimes \mathbb{R}$. Dans certaines situations, nous serons amenés à nous restreindre à ce cas plus agréable.

Sur une variété semi-abélienne qui n'est ni une variété abélienne ni un tore, la situation est plus compliquée : les morphismes $[m]\colon A \to A$ $(m \geq 0)$ s'étendent sur une compactification équivariante $\bar{A}$ mais il n'y a pas de faisceau ample $\mathcal{L}$ sur $\bar{A}$ tel que $[m]^*\mathcal{L}$ soit de la forme $\mathcal{L}^{\otimes q}$ (pour $m \geq 2$). Au mieux on peut trouver $\mathcal{L}$ ample avec $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{lin}} \otimes \mathcal{L}_{\mathrm{quad}}$ où $[m]^*\mathcal{L}_{\mathrm{lin}} \simeq \mathcal{L}_{\mathrm{lin}}^{\otimes m}$ et $[m]^*\mathcal{L}_{\mathrm{quad}} \simeq \mathcal{L}_{\mathrm{quad}}^{\otimes m^2}$ pour $m \geq 0$. Il faut donc normaliser séparément les deux hauteurs et poser $\hat{h}_{\mathcal{L}} = \hat{h}_{\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}} + \hat{h}_{\mathcal{L}_{\mathrm{quad}}}$ (voir par exemple la description de [C-L]). Ceci est suffisant en général (par exemple pour avoir $\hat{h}_{\mathcal{L}}(x) = 0 \iff x \in A_{\mathrm{tors}}$) mais la hauteur obtenue n'est pas réellement normalisée (pour un bon choix de $\bar{A}$ la fonction qui induit une norme est $\hat{h}_{\mathcal{L}_{\mathrm{lin}}} + \hat{h}_{\mathcal{L}_{\mathrm{quad}}}^{1/2}$). Dans le cas intermédiaire où A est le produit d'un tore A_1 et d'une variété abélienne A_2 (avec une compactification produit et une polarisation produit), la hauteur n'est pas normalisée par rapport aux endomorphismes $[m]_A = [m]_{A_1} \times [m]_{A_2}$ mais elle l'est relativement aux $[m^2]_{A_1} \times [m]_{A_2}$ pour $m \geq 0$

Dans le reste du texte, toutes les hauteurs sont normalisées et sont simplement notées h.

3 Minorations de hauteurs normalisées

a) Le problème de Lehmer

Pour le formuler, nous utilisons la hauteur de Weil h logarithmique et absolue sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (voir ci-dessus).

Conjecture 3.1 *Il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout nombre algébrique non nul α qui n'est pas une racine de l'unité, on a $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]h(\alpha) \geq c$.*

Depuis que Lehmer a soulevé la question en 1933 [Le], elle résiste à toutes les attaques, malgré de nombreux travaux. Il n'entre pas dans nos objectifs ici d'en dresser une liste complète ou même représentative mais nous pouvons citer l'élégant résultat de Smyth en 1971 [Sm] : si α est un nombre algébrique non nul non réciproque (ceci signifie que α^{-1} ne fait pas partie des conjugués de α) alors $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]h(\alpha) \geq [\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}]h(\theta) > 0$ où θ est une racine de $X^3 - X - 1$. Rappelons aussi que, beaucoup plus élémentairement, on montre $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]h(\alpha) \geq \log 2$ si α n'est pas un entier algébrique. En vertu de la relation $h(\alpha^{-1}) = h(\alpha)$, la même minoration vaut dès que α (non nul) n'est pas une unité algébrique.

Pour les applications que nous visons, le résultat le plus important dans la direction de la conjecture 3.1 s'avère être celui de Dobrowolski en 1979 [Do].

Théorème 3.2 *Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $c(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout nombre algébrique non nul α qui n'est pas une racine de l'unité, on a $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]^{1+\varepsilon}h(\alpha) \geq c(\varepsilon)$.*

La forme que nous citons correspond à une version affaiblie de l'énoncé de Dobrowolski. La version forte comporte des facteurs logarithmiques : par exemple si $\alpha \notin \mathbb{Q}$ n'est pas une racine de l'unité

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}](\log[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}])^3 h(\alpha) > \frac{1}{4}(\log\log[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}])^3$$

où la valeur explicite de la constante $1/4$ est due à Voutier [Vou]. De la même façon, dans la suite, lorsque nous donnerons une minoration avec un exposant $1+\varepsilon$, il existera en fait une forme plus précise avec des facteurs logarithmiques ; nous ne nous y attardons pas car ce raffinement ne modifie pas les applications à la conjecture de Zilber-Pink.

Nous souhaitons maintenant considérer toute une série de généralisations de la conjecture 3.1, particulièrement lorsqu'un résultat partiel généralisant le théorème 3.2 peut être établi. Pour ce faire, il convient tout d'abord de rattacher la situation de la conjecture 3.1 au groupe multiplicatif $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. En effet, nous reconnaissons :

— dans les nombres algébriques non nuls, les points de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{\mathbb{Q}})$;
— dans les racines de l'unité, les points de torsion de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{\mathbb{Q}})$;
— dans la hauteur h, une hauteur normalisée sur $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{\mathbb{Q}})$.

La première étape consiste donc à remplacer $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ par un autre groupe algébrique. Dans ce cadre, on sait démontrer un analogue satisfaisant du théorème 3.2 pour : les courbes elliptiques à multiplications complexes (Laurent 1983 [La1]), le tore $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ (Amoroso-David 1999 [AD1]), les variétés abéliennes à multiplications complexes (David-Hindry 2000 [DH]). On obtient ensuite de nouvelles variations de la conjecture 3.1 en substituant au point α de notre groupe algébrique A une sous-variété V de A. Dans ce cas, selon que l'on mesure le degré de V de façon arithmétique ou géométrique, on aboutit à un problème de Lehmer pour les variétés (voir Amoroso-David 2001 [AD2]) ou au problème de Bogomolov effectif (voir détails plus bas). Une autre direction de généralisation, particulièrement importante ici, se trouve dans la littérature sous le nom de problème de Lehmer relatif : il s'agit de remplacer le corps de base par le corps de rationalité des points de torsion. Dans ce cadre, les résultats suscités de Dobrowolski, Laurent, Amoroso-David 1999 et David-Hindry se sont vus respectivement généralisés par Amoroso-Zannier 2000 [AZ], Ratazzi 2004 [Ra1], Delsinne 2009 [Del] et Carrizosa 2009 [Ca3]. Enfin ceci suggère encore de nouvelles extensions que nous introduisons plus bas.

Dans ce texte, plutôt que d'énoncer une liste de résultats, nous avons choisi de donner une présentation aussi unifiée que possible de toutes les variantes dans une seule définition. Ainsi, au paragraphe suivant, nous introduisons toutes les notations nécessaires avant de formuler le problème général puis de revenir aux cas particuliers correspondant à la description ci-dessus.

b) Groupes de Lehmer

Nous nous plaçons dans le cadre des notations 1.1 et nous notons h la hauteur normalisée sur A associée. Rappelons que A remplace $A(\bar{k})$ ou $A_{\bar{k}}$ dans les notations $x \in A$ ou $\mathrm{End}(A)$.

Nous considérons un sous-groupe Γ de A et nous lui associons :
— son corps de rationalité $K_\Gamma = k(\Gamma)$, c'est-à-dire le plus petit sous-corps de $\bar{k}$ sur lequel tous les points de Γ sont rationnels ;
— son saturé $\Gamma_{\mathrm{sat}} = \{x \in A \mid \exists N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\ Nx \in \mathrm{End}A \cdot \Gamma\}$ ($\mathrm{End}A \cdot \Gamma$ est le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $\varphi(\gamma)$ où $\varphi \in \mathrm{End}A$ et $\gamma \in \Gamma$).

Nous allons maintenant faire jouer le rôle du nombre $\alpha \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\overline{\mathbb{Q}})$ du premier paragraphe à une sous-variété V de A. Dans toute la suite, nous supposons toujours $V \neq A$. Nous devons trouver des remplaçants pour les notions de degré et hauteur de α ainsi que pour le fait d'être une racine de l'unité.

En guise de hauteur, nous utilisons le minimum essentiel $\mu^{\mathrm{ess}}(V)$: il s'agit du seuil de hauteur à partir duquel les points deviennent denses dans V. Formellement on pose (pour θ un réel) $V(\theta) = \{x \in V \mid h(x) \leq \theta\}$ et $\mu^{\mathrm{ess}}(V) = \inf\{\theta \in \mathbb{R} \mid \overline{V(\theta)} = V\}$. Bien sûr, si V est un singleton, on retrouve $\mu^{\mathrm{ess}}(\{x\}) = h(x)$.

Au lieu du degré, nous employons un indice d'obstruction. Pour un corps L tel que $k \subset L \subset \bar{k}$ nous posons

$$\omega_L(V) = \min\{\deg_{\mathcal{L}}(Z)^{1/(\dim A - \dim Z)} \mid Z \text{ fermé équidimensionnel défini sur } L,\ V \subset Z \subset A\}.$$

Ici le degré de Z relativement à $\mathcal{L}$ est celui de son adhérence $\bar{Z}$ dans $\bar{A}$: $\deg_{\mathcal{L}} Z = \mathcal{L}^{\cdot \dim Z} \cdot \bar{Z}$.

Enfin nous dirons que V est de Γ-torsion s'il existe $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$ et un sous-groupe algébrique connexe B de A avec $V = \gamma + B$. Pour $\Gamma = \{0\}$ cette notion coïncide avec celle de variété de torsion utilisée dans la littérature. Ce n'est toutefois pas cette notion de torsion qui généralise le fait d'être une racine de l'unité dans nos énoncés. Nous dirons que V est Γ-transverse si elle n'est contenue dans aucune sous-variété de Γ-torsion de A différente de A (lorsque $\Gamma = A$ on dit simplement que V est transverse). C'est cette hypothèse forte que nous utiliserons. Nous verrons au paragraphe suivant (voir lemme 3.4) que cela correspond bien à une notion de torsion : nous introduirons un anneau E_Γ tel que V est de E_Γ-torsion si et seulement si elle n'est pas Γ-transverse.

Tous les ingrédients étant en place, nous pouvons donner les définitions qui visent à généraliser le problème de Lehmer dans la direction qui nous intéresse.

Définition 3.1 *(1) On dit que Γ est un groupe de Lehmer s'il existe un réel $c_\Gamma > 0$ tel que, pour toute variété Γ-transverse V, on a $\omega_{K_\Gamma}(V)\mu^{\mathrm{ess}}(V) \geq c_\Gamma$.*

(2) On dit que Γ est un groupe de Dobrowolski si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un réel $c_\Gamma(\varepsilon) > 0$ tel que, pour toute variété Γ-transverse V, on a $\omega_{K_\Gamma}(V)^{1+\varepsilon}\mu^{\mathrm{ess}}(V) \geq c_\Gamma(\varepsilon)$.

Cette formulation avec un groupe Γ permet d'unifier les trois directions évoquées plus haut :
- pour $\Gamma = \{0\}$ (donc $K_\Gamma = k$ et $\Gamma_{\mathrm{sat}} = A_{\mathrm{tors}}$) on trouve le problème de Lehmer,
- pour $\Gamma = A_{\mathrm{tors}}$ ($\Gamma_{\mathrm{sat}} = \Gamma$) on trouve le problème de Lehmer relatif et
- pour $\Gamma = A$ (donc $K_\Gamma = \bar{k}$ et $\Gamma_{\mathrm{sat}} = \Gamma$) on trouve le problème de Bogomolov effectif.

Dans ces trois cas, l'on sait démontrer un analogue du théorème 3.2.

Théorème 3.3 *Si A est le tore $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ ou une variété abélienne à multiplications complexes alors les groupes $\{0\}$, A_{tors} et A sont (faiblement) de Dobrowolski.*

DÉMONSTRATION : Pour le tore voir respectivement [AD2, Del, AD3]. Pour une variété abélienne CM voir [DH, Ca3, Ga]. Voir aussi le paragraphe suivant pour l'équivalence entre notre formalisme et celui de certains de ces articles. □

La restriction introduite par le mot faiblement dans l'enoncé ne s'applique que pour le groupe $\Gamma = A$ dans le cas où A est une variété abélienne. Alors que, dans tous les autres cas, le résultat connu correspond bien à la définition donnée plus haut, le théorème de Galateau est un petit peu plus faible : il donne une minoration de $\deg(V)^\varepsilon \omega_{\bar{k}}(V)\mu^{\mathrm{ess}}(V)$ au lieu de $\omega_{\bar{k}}(V)^{1+\varepsilon}\mu^{\mathrm{ess}}(V)$. En contrepartie, tandis que pour $\Gamma = \{0\}$ ou $\Gamma = A_{\mathrm{tors}}$ on ne sait pas aller au-delà de l'hypothèse de multiplication complexe, en revanche, pour $\Gamma = A$, ces résultats de Galateau permettent de traiter d'autres variétés abéliennes comme les produits de courbes elliptiques et de surfaces abéliennes. En fait, il montre même qu'une conjecture de Serre sur la réduction de A entraîne que A est faiblement de Dobrowolski. Notons aussi que cette version faible suffit pour les applications à la conjecture de Zilber-Pink (voir proposition 4.8).

Bien entendu, ce théorème n'épuise pas le sujet : il existe des versions plus précises (avec facteurs logarithmiques et quelquefois des constantes explicites) et d'autres résultats sont connus. D'une part, David et Philippon ont démontré des minorations de $\mu^{\mathrm{ess}}(V)$ inconditionnelles pour toute variété abélienne mais elles ne rentrent pas dans notre cadre car elles sont d'ordre plus petit que $\omega(V)^{-1-\varepsilon}$ (voir [DP2]). D'autre part, on connaît aussi d'autres estimations intéressantes décrivant les points de petite hauteur de V (voir [DP2] pour les variétés abéliennes et [AV1, AV2] pour des résultats récents sur les tores).

Maintenant, au vu des résultats qui concernent trois groupes particuliers, on peut légitimement se demander comment caractériser les groupes de Lehmer ou de Dobrowolski. En général, cela semble loin d'être évident (notamment il existe des groupes qui ne sont pas de Dobrowolski : il suffit de choisir Γ avec $\Gamma_{\mathrm{sat}} \neq A$ mais

$K_\Gamma = \bar{k}$; par exemple, dans $\mathbb{G}_\mathrm{m}$, le groupe Γ des unités de $\overline{\mathbb{Q}}$ vérifie ceci) mais je voudrais proposer la conjecture suivante.

Conjecture 3.4 *Tout groupe de rang fini est de Lehmer.*

Naturellement, un problème plus réaliste serait de montrer qu'un tel groupe est de Dobrowolski sous les hypothèses du théorème 3.3. Par exemple, comme cas (très) particulier apparemment inconnu, ceci contient l'assertion suivante : il existe un réel $c > 0$ tel que pour tout $n \in 2\mathbb{N}$ si $x \in \mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}(2^{1/n})^\times$ n'est pas contenu dans le groupe engendré par $2^{1/n}$ et les racines de l'unité alors $h(x) \geq c$ (à n fixé ceci découle de [AZ]).

c) Remarques

Nous regroupons ici une série de commentaires et de variantes sur nos définitions.

Tout d'abord, certains des résultats que nous avons cités utilisent en lieu et place de l'indice d'obstruction introduit plus haut la variante suivante :

$$\omega'_L(V) = \min\{\deg_{\mathcal{L}}(H) \mid H \text{ hypersurface de } A \text{ définie sur } L,\ V \subset H\}.$$

Bien entendu, on a $\omega_L(V) \leq \omega'_L(V)$. Il existe aussi une inégalité dans l'autre sens.

Lemme 3.1 *Il existe un réel κ tel que pour tout V on a $\omega'_L(V) \leq \kappa\omega_L(V)$.*

Démonstration : Choisissons Z qui réalise le minimum définissant $\omega_L(V)$. Soit aussi $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{L}^{\otimes m}$ soit très ample. Un théorème de M. Chardin permet d'estimer la fonction de Hilbert $H_Z(\nu) = \dim_L \Gamma(\bar{Z}, \mathcal{L}^{\otimes m\nu})$ par $H_Z(\nu) \leq \binom{\nu+\dim Z}{\dim Z} \deg_{\mathcal{L}^{\otimes m}} Z$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$ (voir [Ch]). D'un autre côté, on peut écrire $H_A(\nu) \geq \frac{1}{c}\binom{\nu+\dim A}{\dim A}$ pour un réel $c > 0$ du fait que $H_A(\cdot)$ est une fonction strictement positive asymptotiquement égale à un polynôme de degré $\dim A$. Un rapide calcul montre alors que si $\nu + 1 > (\dim A)(c \deg_{\mathcal{L}^{\otimes m}} Z)^{1/(\dim A - \dim Z)}$ alors $H_Z(\nu) < H_A(\nu)$. Par suite, il existe $\sigma \in \Gamma(\bar{A}, \mathcal{L}^{\otimes n}) \setminus \{0\}$ avec $\sigma_{|Z} = 0$ pour $n \leq m(\dim A)(cm^{\dim Z} \deg_{\mathcal{L}} Z)^{1/(\dim A - \dim Z)} \leq \kappa\omega_L(V)$ pour un certain réel κ (indépendant de V). Notons H l'hypersurface de degré n de A définie par σ. On a $V \subset Z \subset H$ et H est définie sur L. Par suite $\omega'_L(V) \leq \deg_{\mathcal{L}} H = n \leq \kappa\omega_L(V)$. □

De cette façon, l'emploi de l'un ou l'autre indice ne change pas nos définitions (seules les constantes non spécifiées c_Γ ou $c_\Gamma(\varepsilon)$ peuvent être modifiées). En revanche, si l'on utilise la majoration triviale

$$\omega_L(V) \leq (\deg_{\mathcal{L}} \mathrm{Gal}(\bar{k}/L)V)^{1/(\dim A - \dim V)},$$

on constate que les énoncés obtenus en remplaçant l'indice d'obstruction par le degré sont plus faibles.

Voyons maintenant que le fait d'être de Lehmer ou de Dobrowolski ne dépend bien que du groupe Γ (comme sous-groupe de A) et non des choix de $\bar{A}$, $\mathcal{L}$ ou k faits pour énoncer la définition. Comme ci-dessus ces choix influent uniquement sur les constantes, en vertu du fait suivant.

Lemme 3.2 *Si deux choix $(\bar{A}, \mathcal{L}, k)$ et $(\bar{A}', \mathcal{L}', k')$ correspondent au même groupe algébrique $A_{\bar{k}}$, il existe un réel $c > 0$ tel que pour toute sous-variété V de A on a $c^{-1}\mu^{\mathrm{ess}}_{\mathcal{L}}(V) \leq \mu^{\mathrm{ess}}_{\mathcal{L}'}(V) \leq c\mu^{\mathrm{ess}}_{\mathcal{L}}(V)$ et $c^{-1}\omega_{K_\Gamma,\mathcal{L}}(V) \leq \omega_{K'_\Gamma,\mathcal{L}'}(V) \leq c\omega_{K_\Gamma,\mathcal{L}}(V)$.*

Démonstration : Pour la variation du corps de nombres, on peut supposer $k \subset k'$; alors $K_\Gamma \subset K'_\Gamma = k'(\Gamma)$ et $[K'_\Gamma : K_\Gamma] \leq [k' : k]$. Si $Z \subset A$ est défini sur K_Γ, il est *a fortiori* défini sur K'_Γ tandis que s'il est défini sur K'_Γ alors $\mathrm{Gal}(\bar{k}/K_\Gamma) \cdot Z$ est défini sur K_Γ et de degré au plus $[K'_\Gamma : K_\Gamma] \deg Z$. Par suite, à $\mathcal{L}$ fixé, on a $\omega_{K'_\Gamma}(V) \leq \omega_{K_\Gamma}(V) \leq [k' : k]\omega_{K'_\Gamma}(V)$ tandis que $\mu^{\mathrm{ess}}(V)$ ne dépend pas de k. Supposons maintenant k fixé et faisons varier le couple $(\bar{A}, \mathcal{L})$. Il nous suffit de vérifier que les fonctions hauteur normalisée $x \mapsto h(x)$ et degré $Z \mapsto \deg_{\mathcal{L}} Z$ sont multipliées par des fonctions bornées (à valeurs dans un invervalle de la forme $[c^{-1}, c]$). Dans le cas abélien, comme $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont amples sur $\bar{A} = \bar{A}'$, il existe un entier naturel non nul m tel que les faisceaux $\mathcal{L}^{\otimes m} \otimes \mathcal{L}'^{\otimes -1}$ et $\mathcal{L}^{\otimes -1} \otimes \mathcal{L}'^{\otimes m}$ soient engendrés par leurs sections globales. Par suite, des hauteurs quelconques associées à ces faisceaux sont minorées et les hauteurs normalisées sont donc positives, ce qui donne $m^{-1}h(x) \leq h'(x) \leq mh(x)$ pour $x \in A$. De la même façon, cette propriété des faisceaux entraîne $m^{-\dim Z} \deg_{\mathcal{L}} Z \leq \deg_{\mathcal{L}'} Z \leq m^{\dim Z} \deg_{\mathcal{L}} Z$ pour tout Z fermé équidimensionnel de A. Dans le cas torique, la même idée se complique lorsque les compactifications $\bar{A}$ et $\bar{A}'$ diffèrent. On utilise un éclatement commun X, par exemple l'adhérence du graphe de l'immersion diagonale $A \to \bar{A} \times \bar{A}'$, muni des deux projections $\pi\colon X \to \bar{A}$ et $\pi\colon X \to \bar{A}'$ qui sont des isomorphismes au-dessus de A. On compare alors les faisceaux $\pi^*\mathcal{L}$ et $\pi'^*\mathcal{L}'$ (non nécessairement amples). Par amplitude de $\mathcal{L}$, il existe $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\pi_*(\pi'^*\mathcal{L}'^{\otimes -1}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes m} \simeq \pi_*(\pi'^*\mathcal{L}'^{\otimes -1} \otimes \pi^*\mathcal{L}^{\otimes m})$ soit engendré par ses sections globales. Posons $\mathcal{M} = \pi'^*\mathcal{L}'^{\otimes -1} \otimes \pi^*\mathcal{L}^{\otimes m}$. Comme $\pi^*\pi_*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ est un isomorphisme sur l'ouvert A de X, on en déduit que les sections de $\Gamma(X, \mathcal{M})$ engendrent $\mathcal{M}_{|A}$. Ceci suffit pour montrer que toute hauteur associée à $\mathcal{M}$ est minorée sur A ainsi que $(\pi'^*\mathcal{L}')^{\cdot \dim Y} \cdot Y \leq (\pi^*\mathcal{L}^{\otimes m})^{\cdot \dim Y} \cdot Y$ pour tout fermé Y de X qui rencontre A. On conclut ensuite de même. $\square$

Penchons-nous ensuite sur la variation par isogénie.

Lemme 3.3 *Soient Γ un sous-groupe de Dobrowolski de A et $f\colon A \to A'$ une isogénie. Alors le groupe $f(\Gamma)$ est de Dobrowolski et $f(\Gamma)_{\mathrm{sat}} = f(\Gamma_{\mathrm{sat}})$.*

Démonstration : Fixons une isogénie $g\colon A' \to A$ telle que $f \circ g = [N]$ pour $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous pouvons supposer que f, g et A' sont définis sur k, que g s'étend aux compactifications en $g\colon \bar{A}' \to \bar{A}$ et que $\mathcal{L}' = g^*\mathcal{L}$. Soit $x \in f(\Gamma)_{\mathrm{sat}}$ et écrivons $x = f(y)$ avec $y \in A$. Par hypothèse il existe $M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $Mx \in \mathrm{End}A' \cdot f(\Gamma)$. Par suite $Mg(x) = MNy \in g \cdot \mathrm{End}A' \cdot f(\Gamma) \subset \mathrm{End}A \cdot \Gamma$ d'où $y \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$ et $x \in f(\Gamma_{\mathrm{sat}})$. Réciproquement supposons $x = f(y)$ avec $y \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$. Il existe $M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $My \in \mathrm{End}A \cdot \Gamma$ donc $Mx \in f \cdot \mathrm{End}A \cdot \Gamma$ puis $MNx \in f \cdot \mathrm{End}A \cdot N \cdot \Gamma = f \cdot \mathrm{End}A \cdot g \cdot f \cdot \Gamma \subset \mathrm{End}A' \cdot f(\Gamma)$ donc $x \in f(\Gamma)_{\mathrm{sat}}$. Soit maintenant $V' \subset A'$ une variété $f(\Gamma)$-transverse. Nous posons $V = g(V')$ ce qui donne en particulier $f(V) = [N]V'$. Si $V \subset \gamma + B$ avec $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$ alors $[N]V' \subset f(\gamma) + f(B)$ avec $f(\gamma) \in f(\Gamma_{\mathrm{sat}}) = f(\Gamma)_{\mathrm{sat}}$ puis $V' \subset \gamma' + f(B)$ où $N\gamma' = f(\gamma)$ donc $\gamma' \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$ puis $f(B) = A'$ par hypothèse sur V' donc $B = A$ et ceci montre que V est Γ-transverse. Nous avons donc $\omega_{K_\Gamma}(V)^{1+\varepsilon}\mu^{\mathrm{ess}}(V) \geq c_\Gamma(\varepsilon)$. Comme $K_{f(\Gamma)} \subset K_\Gamma$ nous avons $\omega_{K_\Gamma}(V) \leq \omega_{K_{f(\Gamma)}}(V)$. D'un autre côté, puisque $\mathcal{L}' = g^*\mathcal{L}$ donne $h(g(x)) = h'(x)$ pour $x \in A'$, nous avons $\mu^{\mathrm{ess}}(V) = \mu^{\mathrm{ess}}(V')$. Écrivons $L = K_{f(\Gamma)}$ et choisissons Z' défini sur L, contenant V' tel que $\omega_L(V') = (\deg Z')^{1/(\dim A' - \dim Z')}$. Par formule de projection $\deg Z' = (g^*\mathcal{L})^{\cdot \dim Z'} \cdot \overline{Z'} = \mathcal{L}^{\cdot \dim Z'} \cdot g_*\overline{Z'} \geq \mathcal{L}^{\cdot \dim Z'} \cdot \overline{g(Z')} = \deg g(Z')$. Comme $g(Z')$ est défini sur L et contient V, il vient $\omega_L(V) \leq (\deg g(Z'))^{1/(\dim A - \dim Z')} \leq \omega_L(V')$. *In fine* nous avons alors $\omega_L(V')^{1+\varepsilon}\mu^{\mathrm{ess}}(V') \geq c_\Gamma(\varepsilon)$ ce qui montre que $f(\Gamma)$ est de Dobrowolski. $\square$

Remarquons que si Γ est saturé alors $f(\Gamma)$ ne dépend pas de f. En effet, si f' est une autre isogénie $Nf'(\Gamma) = fgf'(\Gamma) \subset f \cdot \mathrm{End}A \cdot \Gamma \subset f(\Gamma)$ donc $f'(\Gamma) \subset f(\Gamma)_{\mathrm{sat}} = f(\Gamma_{\mathrm{sat}}) = f(\Gamma)$.

Au vu des définitions, on constate immédiatement que, si Γ et Γ' sont deux sous-groupes de A tels que $\Gamma \subset \Gamma' \subset \Gamma_{\mathrm{sat}}$ et si Γ' est de Lehmer ou de Dobrowolski, alors il en va de même de Γ (car $\Gamma'_{\mathrm{sat}} = \Gamma_{\mathrm{sat}}$ et $K_\Gamma \subset K_{\Gamma'}$). En particulier pour démontrer la conjecture 3.4, on pourrait supposer toujours Γ saturé. De la même façon, les résultats pour $\Gamma = \{0\}$ découlent de ceux pour $\Gamma = A_{\mathrm{tors}}$ et auraient pu être omis de notre présentation ; toutefois les preuves sont plus simples pour $\Gamma = \{0\}$ et il n'est pas exclu que, de même, la conjecture soit plus abordable dans un premier temps pour certains groupes non saturés (par exemple dans $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, le groupe engendré par les $2^{3^{-n}}$ plutôt que son saturé engendré par tous les $2^{1/n}$).

Nous utiliserons dans la partie suivante une autre remarque élémentaire : si Γ est de Dobrowolski alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a aussi $\omega_{K_\Gamma}(V)^{1+\varepsilon}\mu^{\mathrm{ess}}(V) \geq c_\Gamma(\varepsilon)$ pour tout fermé équidimensionnel V dont au moins une composante est Γ-transverse (en effet si $V_1, \ldots, V_s$ sont les composantes de V alors $\mu^{\mathrm{ess}}(V) = \max_{1\leq i\leq s}\mu^{\mathrm{ess}}(V_i)$ et $\omega_{K_\Gamma}(V_i) \leq \omega_{K_\Gamma}(V)$ pour $1 \leq i \leq s$).

Voici à présent la justification de la terminologie de E_Γ-torsion.

Lemme 3.4 *Soit E_Γ le sous-anneau de l'anneau des morphismes $A \to A$ engendré par les morphismes de groupes (notés $\mathrm{End}(A)$) et les translations par un élément de Γ. Alors une variété V n'est pas Γ-transverse si et seulement s'il existe $\varphi \in E_\Gamma \setminus \{0\}$ tel que $\varphi(V) = \{0\}$.*

DÉMONSTRATION : Soient $\chi \in \mathrm{End}A$ et $\gamma \in \Gamma$. Il existe $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $\chi + \lambda\mathrm{id}$ est une isogénie. Notons ψ une isogénie telle que $(\chi+\lambda\mathrm{id})\circ\psi = N\mathrm{id}$ pour $N \in \mathbb{N}$. Alors la formule $Nx + N\chi(\gamma) = (\chi + \lambda\mathrm{id})(\psi(x) + N\gamma) - \lambda N\gamma$ montre que le morphisme $x \mapsto N(x + \chi(\gamma))$ appartient à E_Γ. En itérant ce procédé, pour tout $\delta \in \mathrm{End}A \cdot \gamma$ (somme d'éléments de la forme $\chi(\gamma)$), il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $N(\mathrm{id} + \delta) \in E_\Gamma$. Supposons maintenant que V ne soit pas Γ-transverse. On a $V \subset \gamma + B$ avec $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$ et $B \neq A$ sous-groupe algébrique connexe de A. Il existe $M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avec $M\gamma \in \mathrm{End}A \cdot \Gamma$ et $\psi \in \mathrm{End}A \setminus \{0\}$ avec $\psi(B) = \{0\}$ (on obtient ψ en choisissant une isogénie entre A/B et un sous-groupe de A). Par suite $M\psi(V) = \{\psi(M\gamma)\}$ et $\delta = -\psi(M\gamma) \in \mathrm{End}A \cdot \Gamma$. En choisissant $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $N(\mathrm{id} + \delta) \in E_\Gamma$ nous voyons que $\varphi = N(M\psi + \delta) \in E_\Gamma \setminus \{0\}$ convient : $\varphi(V) = \{0\}$. Réciproquement supposons maintenant $\varphi(V) = \{0\}$ pour $\varphi \in E_\Gamma \setminus \{0\}$. Puisque E_Γ est inclus dans le sous-anneau des morphismes $x \mapsto \psi(x) + \delta$ avec $\psi \in \mathrm{End}A$ et $\delta \in \mathrm{End}A \cdot \Gamma$, nous pouvons écrire φ sous cette forme, ce qui donne $\psi(V) = \{-\delta\}$. Pour $v \in V$ on a bien sûr $\psi(v) = -\delta$ et $V \subset v + \mathrm{Ker}^0\psi$. L'hypothèse $\varphi \neq 0$ donne $\psi \neq 0$ donc $B = \mathrm{Ker}^0\psi \neq A$. Il reste à voir que $v+B$ contient un élément γ de Γ_{sat}. Choisissons pour cela B' tel que $B \cap B'$ soit fini et $A = B + B'$. Écrivons $v = x + \gamma$ avec $x \in B$ et $\gamma \in B'$. Nous avons $\psi(\gamma) = -\delta$ et ψ induit une isogénie $B' \to \mathrm{Im}\psi$. Par suite, il existe $\chi \in \mathrm{End}A$ envoyant $-\delta$ sur un multiple $N\gamma$ de γ ($N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Ainsi $N\gamma = -\chi(\delta) \in \mathrm{End}A \cdot \Gamma$ et $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$. □

Une variation possible sur les définitions consiste à faire dépendre la hauteur de Γ. Pour cela, nous posons :

$$\mu_\Gamma^{\mathrm{ess}}(V) = \inf\{\mu^{\mathrm{ess}}(\gamma + V) \mid \gamma \in \Gamma_{\mathrm{sat}}\}$$

(et pour un point nous écrivons $h_\Gamma(x)$ pour $\mu_\Gamma^{\mathrm{ess}}(\{x\})$). Cette hauteur présente l'avantage de s'annuler sur les variétés de Γ-torsion (si B est un sous-groupe algébrique $\mu^{\mathrm{ess}}(B) = 0$ car les points de torsion sont denses dans B). D'autre part elle permet le renforcement automatique suivant de la notion de groupe de Dobrowolski (ou de Lehmer de manière analogue).

Lemme 3.5 *Si Γ est de Dobrowolski et saturé alors pour tout $\varepsilon > 0$ et toute sous-variété Γ-transverse V on a $\omega_{K_\Gamma}(V)^{1+\varepsilon}\mu_\Gamma^{\mathrm{ess}}(V) \geq c_\Gamma(\varepsilon)$.*

DÉMONSTRATION : Il suffit d'appliquer la définition à chaque translaté $\gamma + V$ avec $\gamma \in \Gamma$ en remarquant que $\gamma + V$ est Γ-transverse et que $\omega_{K_\Gamma}(\gamma + V) = \omega_{K_\Gamma}(V)$ car le degré est invariant par translation et γ est défini sur K_Γ. □

Cette hauteur relative est à rapprocher de celles étudiées dans l'article de de la Maza et Friedman [dlMF].

Supposons Γ de Dobrowolski et saturé. D'après le lemme $\mu_\Gamma^{\mathrm{ess}}(V) > 0$ si V est Γ-transverse. D'autre part $\mu_\Gamma^{\mathrm{ess}}(V) = 0$ si V est de Γ-torsion. Nous n'avons rien dit jusqu'ici sur le cas intermédiaire où V n'est ni Γ-transverse ni de Γ-torsion. Nous verrons au paragraphe suivant que l'on a encore $\mu_\Gamma^{\mathrm{ess}}(V) > 0$. On obtient alors une propriété qualitative de Γ, que l'on pourrait appeler problème de Γ-Bogomolov :

$$\mu_\Gamma^{\mathrm{ess}}(V) = 0 \iff V \text{ est de } \Gamma\text{-torsion.}$$

Dans les trois cas du théorème 3.3, cette propriété est connue même lorsque la variété abélienne n'est pas à multiplications complexes (dans les deux premiers cas, c'est le théorème de Zhang, dans le troisième cela découle par exemple des estimations de [DP2]). Elle est également vraie pour tout groupe Γ de rang fini saturé comme conséquence du théorème de Poonen [Po].

Terminons par deux énoncés de réduction. Le premier permet de passer des points aux variétés.

Proposition 3.5 *Soit Γ un sous-groupe de rang fini. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $c_\Gamma^0(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout point Γ-transverse $x \in A$, on a $\omega_{K_\Gamma}(x)^{1+\varepsilon} h(x) \geq c_\Gamma^0(\varepsilon)$. Alors Γ est de Dobrowolski.*

Cette proposition justifie par exemple d'avoir utilisé dans le théorème 3.3 le résultat de Carrizosa [Ca3] qui minore seulement la hauteur des points. Elle permet aussi de réduire à ce cas la conjecture 3.4.

Pour établir cet énoncé, nous passons par un lemme qui sert également à montrer l'équivalence des deux formulations de la conjecture de Zilber-Pink (voir partie suivante).

Lemme 3.6 *Soit Γ un sous-groupe de rang fini de A. Il existe un groupe algébrique A' (qui est un sous-groupe d'une puissance de A) et un point 0-transverse $\gamma \in A'$ de sorte que, pour $g \in A$, on a $g \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$ si et seulement s'il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}(A', A)$ tels que $Ng = \varphi(\gamma)$.*

Démonstration : Choisissons des éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ de Γ dont les images engendrent le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\Gamma \otimes \mathbb{Q}$ et formons le point $\gamma' = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ de A^n. Notons $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ un point de torsion de A^n et A' un sous-groupe algébrique connexe de A^n tels que $\gamma' \in \xi + A'$ et de sorte que $\dim A'$ soit minimale pour cette propriété. Posons $\gamma = \gamma' - \xi$ et montrons que ce point convient. Par minimalité de A', il est 0-transverse dans A'. Si $g \in \Gamma$ il existe $N' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $a'_1, \ldots, a'_n \in \mathbb{Z}$ tels que $N'g = \sum_{i=1}^n a'_i \gamma_i$. En multipliant N' et les a'_i par un entier bien choisi nous pouvons écrire aussi $Ng = \sum_{i=1}^n a_i(\gamma_i - \xi_i)$. L'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i$ décrit un morphisme $\psi \colon A^n \to A$ et donc $\varphi = \psi_{|A'}$ vérifie $Ng = \varphi(\gamma)$. Si maintenant $g \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$ nous pouvons écrire $Mg = \sum_{j=1}^t \chi_j(g_j)$ avec $t, M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\chi_j \in \mathrm{End}(A)$ et $g_j \in \Gamma$. Par ce qui précède $Ng_j = \varphi_j(\gamma)$ pour $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\varphi_j \in \mathrm{Hom}(A', A)$ donc, avec $\varphi = \sum_{j=1}^t \chi_j \circ \varphi_j$, nous avons bien $MNg = \varphi(\gamma)$. Pour la réciproque, il suffit de montrer $\mathrm{Hom}(A', A)\gamma \subset \Gamma_{\mathrm{sat}}$. Or, quitte à multiplier par un entier, un morphisme $A' \to A$ s'étend en $A^n \to A$ et l'on a clairement $\mathrm{Hom}(A^n, A) \cdot (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \mathrm{End}(A) \cdot \gamma_1 + \cdots + \mathrm{End}(A) \cdot \gamma_n \subset \mathrm{End}(A) \cdot \Gamma \subset \Gamma_{\mathrm{sat}}$. $\square$

L'indication sur la forme de A' sert surtout à préciser sa nature : si A est un tore, A' aussi ; si A est une variété abélienne à multiplications complexes, A' aussi etc.

Corollaire 3.1 *Sous les hypothèses du lemme, une sous-variété V de A est Γ-transverse si et seulement si la sous-variété $V \times \{\gamma\}$ de $A \times A'$ est 0-transverse.*

Démonstration : Cela résulte de la proposition 4.2 beaucoup plus précise que nous démontrerons plus bas. □

Démonstration de la proposition 3.5 : Soit $\eta > 0$. Considérons un couple (A', γ) fourni par le lemme avec une hauteur normalisée h' sur A' telle que $h'(\gamma) \leq \eta$. Pour une sous-variété V de A définissons l'ensemble $S = \{x \in V \mid x\ \Gamma\text{-transverse et } h(x) \leq (\dim A)(\mu^{\text{ess}}(V) + \eta)\}$. D'après le corollaire et en utilisant la hauteur $h''(a, b) = h(a) + h'(b)$ sur $A \times A'$ l'ensemble $S \times \{\gamma\}$ s'écrit $\{y \in (V \times \{\gamma\}) \mid y\ 0\text{-transverse et } h''(y) \leq (\dim A)(\mu^{\text{ess}}(V \times \{\gamma\}) + \eta) - (\dim A - 1)h'(\gamma)\}$ (car $\mu^{\text{ess}}(V \times \{\gamma\}) = \mu^{\text{ess}}(V) + h'(\gamma)$). Maintenant un résultat d'Amoroso-David pour les tores [AD2] et de Ratazzi pour les variétés abéliennes [Ra2] (qui démontrent en fait notre proposition pour $\Gamma = \{0\}$) affirme que $\{y \in W \mid y\ 0\text{-transverse et } h''(y) \leq (\dim A)\mu^{\text{ess}}(W) + \eta\}$ est dense dans W pour toute sous-variété 0-transverse W de $A \times A'$. Appliqué à $W = V \times \{\gamma\}$ et avec $h'(\gamma) \leq \eta$ ceci montre que S est dense dans V si V est Γ-transverse. Appliquons alors l'hypothèse sur Γ à $x \in S$: nous trouvons en majorant la hauteur $\omega_{K_\Gamma}(x)^{1+\varepsilon}(\mu^{\text{ess}}(V) + \eta) \geq (\dim A)^{-1} c^0_\Gamma(\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$. L'inclusion $\{x\} \subset V$ montre directement $\omega_{K_\Gamma}(x) \leq \omega_{K_\Gamma}(V)$ ce qui permet de prendre $c_\Gamma(\varepsilon) = (\dim A)^{-1} c^0_\Gamma(\varepsilon)$. □

En utilisant le même lemme, nous pouvons aussi ramener le cas des groupes de rang fini aux points de torsion, mais seulement pour la propriété de Lehmer.

Proposition 3.6 *On suppose que, pour tout sous-groupe algébrique connexe A'' d'une puissance de A, le sous-groupe A''_{tors} de A'' est de Lehmer. Alors tout sous-groupe de rang fini de A est de Lehmer.*

Démonstration : Soit Γ un sous-groupe de rang fini non nul de A. Nous lui appliquons le lemme 3.6 pour obtenir un couple (A', γ). Posons $A'' = A \times A'$ et choisissons des hauteurs normalisées $h'' = h + h'$. Comme le rang de Γ est non nul, $h'(\gamma) \neq 0$. Fixons ensuite un point Γ-transverse $x \in A$ et Z un fermé équidimensionnel de A défini sur K_Γ contenant x et tel que $\omega_{K_\Gamma}(x) = (\deg Z)^{1/(\dim A - \dim Z)}$. Notons encore K_{tors} le corps $K_{A_{\text{tors}}}$ qui est aussi $K_{A''_{\text{tors}}}$. D'après le lemme 3.6, le corps K_Γ est contenu dans le corps de rationalité des points de division de γ. Par conséquent, il existe un entier $D \geq 1$ tel que, pour tout multiple entier N de D et tout γ' avec $N\gamma' = \gamma$, le fermé Z est défini sur $K_{\text{tors}}(\gamma')$. Fixons ensuite un rationnel dans l'intervalle $[\left(\frac{1}{2}\frac{h(x)}{h'(\gamma)}\right)^{1/s}, \left(2\frac{h(x)}{h'(\gamma)}\right)^{1/s}]$ que l'on écrit M/N avec $M, N \in \mathbb{N}$ et N multiple de D pour assurer la propriété ci-dessus. Soit enfin $x' \in A$ tel que $Mx' = x$. Par hypothèse, A''_{tors} est de Lehmer donc on peut écrire $h''(x', \gamma') \geq c\omega_{K_{\text{tors}}}(x', \gamma')^{-1}$ car (x', γ') est 0-transverse en vertu du corollaire 3.1. Le choix de M/N montre $h''(x', \gamma') = h(x') + h'(\gamma') = M^{-s}h(x) + N^{-s}h'(\gamma) \leq 3N^{-s}h'(\gamma)$ puis $cN^s \leq \omega_{K_{\text{tors}}}(x', \gamma')$ en modifiant la valeur de $c > 0$. Pour évaluer l'indice d'obstruction, écrivons $(x', \gamma') \in [M]^{-1}Z \times \{\gamma'\}$. Comme ce dernier fermé est défini sur $K_{\text{tors}}(\gamma')$ on a

$$\begin{aligned}
\omega_{K_{\text{tors}}}(x', \gamma') &\leq \left([K_{\text{tors}}(\gamma') : K_{\text{tors}}] \deg([M]^{-1}Z \times \{\gamma'\})\right)^{\frac{1}{\dim A'' - \dim Z}} \\
&\leq \left(N^{s \dim A'} M^{s(\dim A - \dim Z)} \deg Z\right)^{\frac{1}{\dim A'' - \dim Z}} \\
&\leq N^s \left(\left(\frac{M}{N}\right)^s \omega_{K_\Gamma}(x)\right)^{\frac{\dim A - \dim Z}{\dim A'' - \dim Z}}.
\end{aligned}$$

Nous trouvons donc que $\left(\frac{M}{N}\right)^s \omega_{K_\Gamma}(x)$ est minoré par une constante et, à nouveau par le choix de M/N, il en va de même de $h(x)\omega_{K_\Gamma}(x)$. En utilisant l'analogue de la proposition 3.5 où l'on remplace ε par 0, nous avons montré que Γ est de Lehmer. □

Malheureusement cette démonstration ne s'étend pas aux groupes de Dobrowolski : en suivant la même démarche, il resterait une puissance de N^ε dans l'estimation finale que l'on ne sait pas contrôler.

d) Minoration relative à une variété de Γ-torsion

En suivant Carrizosa [Ca1, Ca2, Ca3], nous introduisons un indice d'obstruction relatif. Soient pour cela un corps L avec $k \subset L \subset \bar{k}$ et H une sous-variété de A définie sur L. Pour V sous-variété de H on pose :

$$\omega_L^H(V) = \min\Big\{ \left(\frac{\deg_{\mathcal{L}} Z}{\deg_{\mathcal{L}} H}\right)^{1/(\dim H - \dim Z)} \mid \\ Z \text{ fermé équidimensionnel défini sur } L,\ V \subset Z \subset H \Big\}.$$

Le résultat de Carrizosa est le premier à faire intervenir un tel indice et elle a montré son utilité pour l'application à la conjecture de Zilber-Pink. L'intérêt est d'obtenir une minoration du minimum essentiel des variétés V qui ne sont ni Γ-transverse ni de Γ-torsion en utilisant l'indice relatif à la plus petite sous-variété de Γ-torsion H contenant V tout en conservant une dépendance explicite et fine en $\deg H$.

Ici nous montrons comme un tel résultat (pour les groupes saturés) se déduit toujours de la propriété plus faible d'être de Dobrowolski. Un énoncé allant dans ce sens, dans le cas particulier $\Gamma = A$ et pour $A = E^g$ puissance d'une courbe elliptique, se trouve dans [Vi1] (avec le degré au lieu de l'indice d'obstruction).

Théorème 3.7 *Soit Γ un sous-groupe saturé de Dobrowolski. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $c'_\Gamma(\varepsilon) > 0$ tel que si V est une sous-variété de A qui n'est pas de Γ-torsion et si H est la plus petite sous-variété de Γ-torsion contenant V alors*

$$\omega_{K_\Gamma}^H(V)^{1+\varepsilon}(\deg H)^{s\varepsilon}\mu^{\mathrm{ess}}(V) \geq c'_\Gamma(\varepsilon).$$

Nous commençons par établir un énoncé qui correspond essentiellement à une version faible du théorème où la constante dépend de H.

Lemme 3.7 *Soient Γ un sous-groupe de Dobrowolski saturé de A et $f\colon A \to A'$ un morphisme surjectif de groupes algébriques. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $c_{\Gamma,f}(\varepsilon) > 0$ tel que si V' est une sous-variété $f(\Gamma)$-transverse de A' alors*

$$\omega_{K_\Gamma}(V')^{1+\varepsilon}\mu^{\mathrm{ess}}(V') \geq c_{\Gamma,f}(\varepsilon).$$

Le lemme dit en particulier que $f(\Gamma)$ est de Dobrowolski mais il dit un peu plus car le corps K_Γ peut contenir strictement $K_{f(\Gamma)}$.

Démonstration : Quitte à remplacer A par un groupe isogène (voir lemme 3.3) on peut supposer $A = A' \times A''$ et que f est la première projection. Le groupe Γ étant saturé, il s'écrit $\Gamma = \Gamma' \times \Gamma''$ avec $\Gamma' = f(\Gamma)$. On associe à $V' \subset A'$ la variété $V = V' \times A''$. Si $V \subset \gamma + B$ alors B contient $\{0\} \times A''$ donc $B = B' \times A''$ d'où $\gamma + B = (\gamma' + B') \times A''$ avec $\gamma' \in \Gamma'$. Ceci montre que si V' est Γ'-transverse alors V est Γ-transverse. Maintenant, quitte à choisir une compactification produit et une polarisation produit sur A de sorte que $h(x,y) = h'(x) + h''(y)$, on voit que $\mu^{\mathrm{ess}}(V) = \mu^{\mathrm{ess}}(V')$ car les points de hauteur nulle sont denses dans A''. Soit ensuite Z' défini sur K_Γ et contenant V' tel que $\omega_{K_\Gamma}(V') = (\deg Z')^{1/(\dim A' - \dim Z')}$. Posons $Z = Z' \times A''$. On a $\dim A - \dim Z = \dim A' - \dim Z'$ puis $\deg Z = \binom{\dim Z}{\dim Z'}(\deg Z')(\deg A'')$ tandis que Z est défini sur K_Γ et contient V. Par suite, $\omega_{K_\Gamma}(V) \leq (\deg Z)^{1/(\dim A - \dim Z)} \leq c\,\omega_{K_\Gamma}(V')$ pour un réel c indépendant de V. Il vient $\omega_{K_\Gamma}(V')^{1+\varepsilon}\mu^{\mathrm{ess}}(V') \geq c^{-1-\varepsilon}\omega_{K_\Gamma}(V)^{1+\varepsilon}\mu^{\mathrm{ess}}(V)$ qui permet de conclure. $\square$

La preuve du théorème utilise de façon cruciale la proposition suivante.

Proposition 3.8 *Pour tout $(A,\mathcal{L})$ comme précédemment il existe une famille finie $\mathcal{F}$ de morphismes surjectifs $f\colon A\to A'$ (pour divers A') et un réel $c>0$ tels que, pour tout sous-groupe algébrique connexe B de A, il existe $f\in\mathcal{F}$ de sorte que $f_{|B}$ soit une isogénie de degré au moins $c\deg_{\mathcal{L}} B$.*

Démonstration : Nous utilisons la notion de projecteur normalisé décrite en appendice qui introduit un couple $(c_0,\mathcal{B})$. Nous définissons $\mathcal{F}$ comme la famille des quotients $\{A\to A/B' \mid B'\in\mathcal{B}\}$. La composée $B\to A\to A/B'$ étant une isogénie de degré $\mathrm{Card}(B\cap B')$ lorsque ce nombre est fini, il nous suffit donc de vérifier que si $\varphi\circ\varphi=a\varphi$ et $|\varphi|\le c_0a$ alors $\mathrm{Card}(\mathrm{Ker}^0\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi)$ est fini et $\ge c\deg(\mathrm{Ker}^0\varphi)$. Si nous écrivons $\mathrm{Ker}\varphi=F+\mathrm{Ker}^0\varphi$ pour un ensemble fini F tel que les $x+\mathrm{Ker}^0\varphi$ sont disjoints pour $x\in F$ alors on a $\deg(\mathrm{Ker}\varphi)=(\mathrm{Card}F)\deg(\mathrm{Ker}^0\varphi)$ et $\mathrm{Card}(\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi)=(\mathrm{Card}F)\mathrm{Card}(\mathrm{Ker}^0\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi)$ (car $\mathrm{Ker}^0\varphi+\mathrm{Im}\varphi=A$). Ainsi il reste à montrer que $\mathrm{Card}(\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi)$ est fini et $\ge c\deg(\mathrm{Ker}\varphi)$. Or $\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi=\{x\in\mathrm{Im}\varphi\mid ax=0\}$ d'après $\varphi\circ\varphi=a\varphi$ donc $\mathrm{Card}(\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi)=a^{s\dim\mathrm{Im}\varphi}$ (avec $s=1$ si A est un tore et $s=2$ sinon). Par suite $\mathrm{Card}(\mathrm{Ker}\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi)\ge(c_0^{-1}|\varphi|)^{s\dim\mathrm{Im}\varphi}$ et l'on conclut par le lemme 6.1. $\square$

Nous utilisons aussi le fait suivant.

Lemme 3.8 *Soit $(A,\mathcal{L})$ comme précédemment. Il existe un réel $\lambda>0$ tel que pour tout sous-groupe algébrique connexe B de A on peut trouver un sous-groupe algébrique connexe $B^\perp$ de A vérifiant : $B+B^\perp=A$, $B\cap B^\perp$ fini et, pour tous $x\in B$ et $y\in B^\perp$, on a $h(x)+h(y)\le\lambda h(x+y)$.*

Démonstration : Dans le cas où A est une variété abélienne, une construction classique (voir [Mu, p. 173] ou [Be2, p. 211]) donne un résultat plus précis : soit ι l'injection $B\hookrightarrow A$ et $\phi_{\mathcal{L}}\colon A\to\hat{A}$ l'isogénie associée à $\mathcal{L}$; on pose $B^\perp=\mathrm{Ker}^0(\hat{\iota}\circ\phi_{\mathcal{L}})$. Soient encore $j\colon B^\perp\hookrightarrow A$ l'inclusion, $\mathrm{add}\colon A\times A\to A$ l'addition et $\mathcal{P}$ le faisceau de Poincaré sur $A\times\hat{A}$. On sait [Mu, p. 78] que $(\mathrm{id}_A\times\phi_{\mathcal{L}})^*\mathcal{P}\simeq\mathrm{add}^*\mathcal{L}\otimes p_1^*\mathcal{L}^{\otimes-1}\otimes p_2^*\mathcal{L}^{\otimes-1}$ donc $(\iota\times j)^*\mathrm{add}^*\mathcal{L}\simeq(\iota\times\phi_{\mathcal{L}}\circ j)^*\mathcal{P}\otimes\iota^*\mathcal{L}\otimes j^*\mathcal{L}$. Par les propriétés de $\mathcal{P}$, on a $(\iota\times\phi_{\mathcal{L}}\circ j)^*\mathcal{P}_{|\{0\}\times B^\perp}$ trivial et $(\iota\times\phi_{\mathcal{L}}\circ j)^*\mathcal{P}_{|B\times\{y\}}\simeq\phi_{\mathcal{L}}(y)_{|B}\simeq\hat{\iota}\circ\phi_{\mathcal{L}}(y)$ trivial pour $y\in B^\perp$ donc (lemme de la balançoire [Mu, p. 54]) $(\iota\times\phi_{\mathcal{L}}\circ j)^*\mathcal{P}$ est trivial. Ainsi $(\iota\times j)^*\mathrm{add}^*\mathcal{L}\simeq\iota^*\mathcal{L}\otimes j^*\mathcal{L}$ ce qui montre, en passant aux hauteurs normalisées, $h(x+y)=h(x)+h(y)$ pour $(x,y)\in B\times B^\perp$. Ceci entraîne aussi $B\cap B^\perp$ fini et, par dimension, $B+B^\perp=A$. Dans le cas torique, nous supposons que la hauteur est donnée par la compactification $A=\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n\subset(\mathbb{P}^1)^n$ de sorte que $h(x_1,\ldots,x_n)=h(x_1)+\cdots+h(x_n)$. Soit $d=\dim B$. On choisit un morphisme de groupes algébriques $f\colon\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^d\to A$ tel que $\mathrm{Im}f=B$. Ce morphisme f est donné par une matrice $F\in\mathrm{Mat}_{n,d}(\mathbb{Z})$ et l'on peut, sans changer $\mathrm{Im}f$, faire des combinaisons des colonnes de F de sorte que celles-ci soient deux à deux orthogonales entre elles (dans $\mathbb{Z}^n$ avec le produit scalaire usuel). On forme ensuite une matrice $G\in\mathrm{Mat}_{n,n-d}(\mathbb{Z})$ en complétant la famille libre des colonnes de F en une base orthogonale de $\mathbb{Q}^n$ contenue dans $\mathbb{Z}^n$. Quitte à multiplier chaque colonne de F ou G par un entier, on peut supposer que la norme de chaque colonne appartient à un intervalle $[N,2N]$ pour $N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. On note $g\colon\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{n-d}\to A$ le morphisme donné par G et $B^\perp=\mathrm{Im}g$. La construction donne clairement $B+B^\perp=A$ donc par dimension $B\cap B^\perp$ est fini. Il reste à voir $h(f(x))+h(g(y))\le\lambda h(f(x)+g(y))$ pour $x\in\bar{k}^d$, $y\in\bar{k}^{n-d}$. Avec la hauteur choisie, $h(f(x))\le 2nN\cdot h(x)$ et de même $h(g(y))\le 2nN\cdot h(y)$. D'autre part, si $M={}^t(F\ G)\in\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{Z})$ et si $\varphi\colon A\to A$ est l'isogénie associée à M, on a $h(\varphi(f(x)+g(y)))\le 2nN\cdot h(f(x)+g(y))$ (chaque coefficient de M est de valeur absolue au plus $2N$). Par ailleurs, l'application $(x,y)\mapsto\varphi(f(x)+g(y))$ est donnée par la matrice diagonale M^tM dont chaque coefficient diagonal est au moins N^2. Par suite $h(\varphi(f(x)+g(y))\ge N^2(h(x)+h(y))$. En combinant les estimations, le paramètre N disparaît et l'on obtient le résultat avec $\lambda=(2n)^2$. Pour un autre choix de hauteurs, on a $c^{-1}h\le h'\le ch$ (lemme 3.2) donc $\lambda=(2n)^2c^2$ convient. $\square$

Démonstration du théorème : Écrivons $H = \gamma + B$ avec $\gamma \in \Gamma$ et B un sous-groupe algébrique connexe. Comme Γ est saturé on a $\Gamma = (\Gamma \cap B) + (\Gamma \cap B^\perp)$ ce qui permet de supposer $\gamma \in \Gamma \cap B^\perp$ (avec $B^\perp$ comme dans le lemme 3.8). En particulier, si $x \in B$, on a $h(x) \leq \lambda h(x+\gamma)$ d'où on déduit $\mu^{\text{ess}}(V-\gamma) \leq \lambda \mu^{\text{ess}}(V)$. D'autre part, comme γ est défini sur K_Γ (ainsi que B car B est l'adhérence de $B_{\text{tors}} \subset \Gamma$), nous avons immédiatement $\omega^H_{K_\Gamma}(V) = \omega^B_{K_\Gamma}(V-\gamma)$. Ceci montre qu'il suffit d'établir le résultat pour $V-\gamma$ au lieu de V. Autrement dit, nous supposons désormais $\gamma = 0$ et donc $V \subset B = H$. Nous appliquons la proposition 3.8 qui fournit un morphisme $f\colon A \to A'$ tel que $\varphi = f_{|B}$ est une isogénie $B \to A'$ de degré $a \geq c \deg_{\mathcal{L}} B$. Quitte à remplacer $\mathcal{L}$ par une puissance on peut supposer $h'(f(x)) \leq h(x)$ pour $x \in A$ et $\deg_{f^*\mathcal{L}'} Z \leq \deg_{\mathcal{L}} Z$ pour un fermé Z de B (on a choisi $\mathcal{L}'$ sur une compactification de A' donnant la hauteur h' ; pour avoir ces propriétés il suffit dans le cas abélien que $(f^*\mathcal{L}')^{\otimes -1} \otimes \mathcal{L}$ soit engendré par ses sections globales et dans le cas torique qu'elles l'engendrent au-dessus de A ; il faut auparavant choisir les compactifications pour que f s'étende ; ceci modifie c sans gravité). Il existe une isogénie $\psi\colon A' \to B$ telle que $\psi \circ \varphi = [a]$ sur B et $\varphi \circ \psi = [a]$ sur A'. Comme le degré de $[a]$ est a^{bs} avec $b = \dim B$, on a $\deg \psi = a^{bs-1}$. Nous posons $W = \psi^{-1}(V)$ qui est un fermé équidimensionnel de A'. L'idée consiste à appliquer à W le lemme 3.7. Comme B est la plus petite sous-variété de Γ-torsion contenant V, de même A' est la plus petite sous-variété de $f(\Gamma)$-torsion contenant une composante quelconque de W. Ceci montre que ces composantes sont $f(\Gamma)$-transverses. Ensuite, on a $[a]W = \varphi(\psi(W)) = \varphi(V) = f(V)$ donc $a^s \mu^{\text{ess}}(W) = \mu^{\text{ess}}([a]W) = \mu^{\text{ess}}(f(V)) \leq \mu^{\text{ess}}(V)$ (car $h' \circ f \leq h$). Choisissons maintenant un fermé équidimensionnel Z défini sur K_Γ tel que $V \subset Z \subset B$ et $\omega^B_{K_\Gamma}(V) = (\deg_{\mathcal{L}} Z / \deg_{\mathcal{L}} B)^{1/(b-d)}$ où $d = \dim Z$. L'ensemble équidimensionnel $Y = \psi^{-1}(Z)$ de A' contient W et est défini sur K_Γ. Estimons son degré. Dans le cas abélien, nous avons :

$$a^{2d} \deg_{\mathcal{L}'} Y = \deg_{\mathcal{L}'^{\otimes a^2}} \cdot \psi^{-1}(Z) = \deg_{\psi^*\varphi^*\mathcal{L}'} \psi^{-1}(Z)$$
$$= \deg_{\varphi^*\mathcal{L}'} \psi_* \psi^{-1}(Z) = (\deg \psi_{|\psi^{-1}(Z)})(\deg_{\varphi^*\mathcal{L}'} Z).$$

Dans le cas torique, pour faire ce calcul, nous choisissons deux nouvelles compactifications de A' et B de façon à avoir des extensions :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{A}' & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \tilde{B} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \bar{A}' \\ \cup & & \cup & & \cup \\ A' & \xrightarrow{\psi} & B & \xrightarrow{\varphi} & A'. \end{array}$$

Nous choisissons $\tilde{A}'$ comme un éclatement $\pi\colon \tilde{A}' \to \bar{A}'$ et $\tilde{\mathcal{L}}' = \pi^*\mathcal{L}'$. Alors les morphismes $[a]_{\bar{A}'} \circ \pi$ et $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}$ coïncident sur A' donc sont égaux. Ceci donne $\tilde{\mathcal{L}}'^a = \tilde{\psi}^* \tilde{\varphi}^* \mathcal{L}'$ et justifie (avec $\overline{\psi^{-1}(Z)} \subset \tilde{\psi}^{-1}(\bar{Z})$ dans $\tilde{A}'$)

$$a^d \deg_{\mathcal{L}'} Y = (\tilde{\mathcal{L}}'^a)^{\cdot d} \cdot \overline{\psi^{-1}(Z)} \leq (\tilde{\psi}^* \tilde{\varphi}^* \mathcal{L}')^{\cdot d} \cdot \tilde{\psi}^{-1}(\bar{Z}).$$

On termine ensuite le calcul de même et l'on a donc dans tous les cas

$$a^{sd} \deg_{\mathcal{L}'} Y \leq (\deg \psi_{|\psi^{-1}(Z)})(\deg_{\varphi^*\mathcal{L}'} Z).$$

Maintenant $\deg \psi_{|\psi^{-1}(Z)} \leq \deg \psi = a^{sb-1}$ et $\deg_{\varphi^*\mathcal{L}'} Z = \deg_{f^*\mathcal{L}'} Z \leq \deg_{\mathcal{L}} Z$ donc $\deg_{\mathcal{L}'} Y \leq a^{s(b-d)-1} \deg_{\mathcal{L}} Z$ puis $\omega_{K_\Gamma}(W) \leq a^s (\deg_{\mathcal{L}} B / a)^{1/(b-d)} \omega^B_{K_\Gamma}(V)$. Finalement

$$\omega_{K_\Gamma}(W)^{1+\varepsilon} \mu^{\text{ess}}(W) \leq a^{s\varepsilon} \left(\frac{\deg_{\mathcal{L}} B}{a} \right)^{\frac{1+\varepsilon}{b-d}} \omega^B_{K_\Gamma}(V)^{1+\varepsilon} \mu^{\text{ess}}(V).$$

Nous pouvons sans restriction supposer $\varepsilon < (s(b-d)-1)^{-1}$ de sorte que l'expression obtenue est une fonction décroissante de a. Nous pouvons alors remplacer a par $c \deg_{\mathcal{L}} B$ ce qui nous donne (en changeant la valeur de c)

$$\omega_{K_\Gamma}(W)^{1+\varepsilon} \mu^{\text{ess}}(W) \leq c^{-1} (\deg_{\mathcal{L}} B)^{s\varepsilon} \omega^B_{K_\Gamma}(V)^{1+\varepsilon} \mu^{\text{ess}}(V).$$

L'application du lemme 3.7 à W donne bien le théorème. $\square$

Ce résultat permet donc d'obtenir des versions améliorées des théorèmes de Delsinne [Del], Amoroso-David [AD3] ou Galateau [Ga]. En fait on a même mieux : si l'on dispose d'un résultat de la forme $\omega_{K_\Gamma}(V)(\log 3\omega_{K_\Gamma}(V))^\kappa \mu^{\mathrm{ess}}(V) \geq c_\Gamma$ pour toute variété Γ-transverse V alors la démonstration fournit une minoration de la forme $\omega^H_{K_\Gamma}(V)(\log 3(\deg H)^2\omega^H_{K_\Gamma}(V))^\kappa \mu^{\mathrm{ess}}(V) \geq c'_\Gamma$ exactement de la même façon.

Notons aussi (encore plus simplement) que si Γ était supposé de Lehmer dans le théorème alors on aurait la conclusion avec $\varepsilon = 0$.

4 Liens avec la conjecture de Zilber-Pink

a) Formulations de la conjecture

Nous restons dans le cadre des notations 1.1 : A est un tore ou une variété abélienne sur un corps de nombres. Pour un entier r avec $0 \leq r \leq \dim A$, nous notons

$$A^{[r]} = \bigcup_{\mathrm{codim} G \geq r} G$$

l'union des sous-groupes algébriques de A de codimension au moins r. Par commodité, nous écrirons aussi $A^{\{r\}}$ pour l'union des sous-groupes algébriques *connexes* de A de codimension au moins r. Nous avons $A^{[r]} = A_{\mathrm{tors}} + A^{\{r\}}$ et $A_{\mathrm{tors}} = A^{[\dim A]}$. Par suite, si Γ est un sous-groupe contenant A_{tors} (c'est le cas notamment si Γ est saturé) alors $\Gamma + A^{[r]} = \Gamma + A^{\{r\}}$. Remarquons aussi que $\Gamma_{\mathrm{sat}} + A^{[r]}$ est l'union de toutes les sous-variétés de Γ-torsion de codimension au moins r. Dans ce cadre, la conjecture de Zilber-Pink est la suivante (nous verrons ci-dessous, théorème 4.3, qu'elle est équivalente aux conjectures 5.1 et 5.2 de [Pi] ; dans le cas torique, on retrouve la Conjecture des Intersections sur les Tores, CIT, de [Z]).

Conjecture 4.1 *Si Γ est un sous-groupe de rang fini de A et X une sous-variété Γ-transverse de A alors l'intersection $X \cap \Gamma + A^{[\dim X+1]}$ n'est pas dense dans X.*

Comme Γ n'intervient qu'à travers $\Gamma + A_{\mathrm{tors}}$ dans cet énoncé, il n'y a aucune restriction à supposer $A_{\mathrm{tors}} \subset \Gamma$. En fait, si Γ est de rang fini, il en va de même de Γ_{sat} donc la véracité de la conjecture pour Γ_{sat} en entraîne la véracité pour Γ et nous pourrions donc supposer tout de suite Γ saturé.

L'ensemble $X \cap \Gamma + A^{[\dim X+1]}$ étant l'union des intersections $X \cap \Gamma + B$ (où B parcourt l'ensemble des sous-groupes algébriques connexes de A avec $\dim X + \dim B < \dim A$), on peut se demander dans un premier temps à quelle condition une telle intersection individuelle $X \cap \Gamma + B$ peut être dense. La réponse est donnée par les théorèmes sur le problème de Mordell-Lang [F1, F2, Hi, La2, Ray, Voj, McQ]. Notons $p\colon A \to A/B$ la projection. L'ensemble $X \cap \Gamma + B$ est dense dans X si et seulement si $p(X) \cap p(\Gamma)$ est dense dans $p(X)$. Le groupe $p(\Gamma)$ est de rang fini et la variété $p(X)$ est de dimension $\leq \dim X < \dim A/B$. Par suite si $p(X) \cap p(\Gamma)$ est dense dans $p(X)$ alors $p(X)$ est de $p(\Gamma)$-torsion (c'est une équivalence si Γ est saturé). Si c'est le cas $X \subset p^{-1}(p(X))$ et $p^{-1}(p(X))$ est de Γ-torsion. Tout ceci montre que si $X \cap \Gamma + B$ est dense dans X alors X n'est pas Γ-transverse. Nous pouvons donner un résultat plus précis en introduisant un ensemble exceptionnel : $Z_{X,\Gamma}$ est l'ensemble des points $x \in X$ pour lesquels il existe une sous-variété H de Γ-torsion de A telle que

$$\dim_x X \cap H > \max(0, \dim X + \dim H - \dim A).$$

Il s'agit de l'ensemble noté $Z^{(\dim X+1)}_{X,\Gamma}$ dans [R1]. Si $\Gamma = \{0\}$ on a $Z_{X,0} = X \setminus X^{\mathrm{ta}}$ tandis qu'avec $\Gamma = A$ on a $Z_{X,A} = X \setminus X^{\mathrm{oa}}$ dans les notations X^{oa} et X^{ta} de Bombieri-Masser-Zannier [BMZ4].

Lemme 4.1 *Si B est un sous-groupe algébrique connexe de A tel que* $\dim X + \dim B < \dim A$ *et si Γ est de rang fini alors l'ensemble* $(X \setminus Z_{X,\Gamma}) \cap \Gamma + B$ *est fini.*

Démonstration : Notons encore $p: A \to A/B$ la projection et E l'ensemble de l'énoncé. Soit Y une composante irréductible de l'adhérence de E. Comme $Y \cap \Gamma + B$ est dense dans Y et $\dim Y + \dim B < \dim A$, la variété Y est contenue dans $H = p^{-1}(p(Y))$ de Γ-torsion. Si $x \in E \cap Y$ alors $\dim Y \leq \dim_x X \cap H \leq \max(0, \dim X + \dim H - \dim A) \leq \max(0, \dim H - \dim B - 1) = \max(0, \dim p(Y) - 1) \leq \max(0, \dim Y - 1)$. On en déduit $\dim Y = 0$ et donc E est fini. $\square$

Nous allons maintenant montrer que la conjecture se réduit au cas où $\Gamma = \{0\}$. Le point crucial est la bijection suivante.

Proposition 4.2 *Dans le cadre du lemme 3.6 considérons l'application $\lambda: A \to A \times A'$ donnée par $\lambda(x) = (x, \gamma)$. Fixons $a \in A$. Alors l'application Φ qui à une sous-variété de 0-torsion H' de $A \times A'$ contenant $\lambda(a)$ associe la composante $\Phi(H')$ de $\lambda^{-1}(H')$ contenant a réalise une bijection entre ces sous-variétés de 0-torsion de $A \times A'$ et les sous-variétés de Γ-torsion de A contenant a. De plus cette bijection conserve la codimension :* $\dim A - \dim \Phi(H') = \dim(A \times A') - \dim H'$.

Démonstration : Soit tout d'abord H une sous-variété de Γ-torsion de A contenant a. Nous écrivons $H = g + B$ avec B sous-groupe algébrique connexe et $g \in \Gamma_{\text{sat}}$. Il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\varphi \in \text{Hom}(A', A)$ tels que $Ng = \varphi(\gamma)$. Notons G le sous-groupe algébrique de $A \times A'$ noyau de $A \times A' \to A$, $(x, y) \mapsto Nx - \varphi(y)$. Comme $N \neq 0$, cette application est surjective donc $\dim G = \dim A'$. Notons aussi que $G \cap (B \times \{0\}) = \text{Ker}[N]_B$ est fini donc le groupe $G + (B \times \{0\})$ est de codimension $\dim A - \dim H$. Notons H' sa composante contenant $\lambda(a)$. Par construction $\lambda(H) \subset H'$ (car $(g, \gamma) \in G$). Si $(x, \gamma) \in H'$ alors $(x - g, 0) \in (G + (B \times \{0\})) \cap (A \times \{0\}) = (\text{Ker}[N] + B) \times \{0\}$ d'où $x \in g + B + \text{Ker}[N]$ ce qui montre $\lambda^{-1}(H') = g + B + \text{Ker}[N]$ puis $\Phi(H') = H$. Supposons ensuite que H'' soit une variété de 0-torsion contenant $\lambda(a)$ telle que $\Phi(H'') = H$. Écrivons $H'' = \xi + B'$ avec $\xi \in (A \times A')_{\text{tors}}$ et B' sous-groupe algébrique connexe de $A \times A'$. Comme $(g, \gamma) + (B \times \{0\}) \subset H''$ on a $B \times \{0\} \subset B'$ et B est maximal pour cette propriété donc $B' \cap (A \times \{0\}) = B \times \{0\}$. Par ailleurs la seconde projection de $H'' \cap G$ (sur A') contient γ donc, ce dernier étant 0-transverse, est égale à A'. Par dimension $H'' \cap G$ est une composante de G et l'on a aussi $p_2(B') = A'$. De la sorte H'' contient une composante de $G + (B \times \{0\})$ donc $H' \subset H''$ tandis que $B' \cap (A \times \{0\}) = B \times \{0\}$ et $p_2(B') = A'$ donnent $\dim B' = \dim A' + \dim B$ donc $\dim H'' = \dim B' = \dim H'$ puis $H'' = H'$.

Ceci fait, il nous reste seulement à voir que, pour tout H' comme dans l'énoncé, $\Phi(H')$ est bien de Γ-torsion. Soit donc un tel H' que l'on écrit $\xi + B'$ comme ci-dessus. On définit B par $B' \cap (A \times \{0\}) = (F + B) \times \{0\}$ où F est un groupe fini. Si $\lambda(x) \in H'$ alors $\lambda(x) - \xi$ et $\lambda(a) - \xi$ appartiennent à B' donc $\lambda(x) - \lambda(a) = (x - a, 0) \in F + B$ d'où $x \in a + F + B$. Ceci donne $\lambda^{-1}(H') = a + F + B$ et donc $\Phi(H') = a + B$. Voyons enfin que $a + B$ rencontre Γ_{sat}. Comme plus haut $p_2: B' \to A'$ est surjectif donc il existe un morphisme $\varphi: A' \to B'$ tel que $p_2 \circ \varphi = [N]$ pour un certain $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On écrit $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ et on choisit $y \in A'$ tel que $Ny = \gamma - \xi_2$. Alors $\varphi(y) = (p_1 \circ \varphi(y), \gamma - \xi_2) \in B'$ donc $p_1 \circ \varphi(y) + \xi_1 \in a + F + B$ (car $(a - \xi_1, \gamma - \xi_2) \in B'$). D'autre part $Np_1 \circ \varphi(y) = p_1 \circ \varphi(\gamma) - p_1 \circ \varphi(\xi_2) \in \text{Hom}(A', A)\gamma + A_{\text{tors}}$ donc $p_1 \circ \varphi(y) \in \Gamma_{\text{sat}}$. Comme $\xi_1 \in \Gamma_{\text{sat}}$ et $F \subset \Gamma_{\text{sat}}$, ceci termine la démonstration. $\square$

En revenant aux définitions, nous en déduisons les bijections suivantes.

Corollaire 4.1 *Dans le cadre de la propostion, soit X une sous-variété de A. Alors la bijection $\lambda: X \to \lambda(X)$ induit des bijections entre :*

(1) $X \cap \Gamma_{\text{sat}} + A^{[r]}$ *et* $\lambda(X) \cap (A \times A')^{[r]}$ *pour tout* $r \in \mathbb{N}$ *;*

(2) $Z_{X,\Gamma}$ *et* $Z_{\lambda(X),0}$.

De plus X est Γ-transverse si et seulement si $\lambda(X)$ est 0-transverse.

Soit maintenant une classe $\mathcal{A}$ de groupes algébriques connexes comme précédemment (tore ou variété abélienne). Nous dirons en abrégé que $\mathcal{A}$ est stable lorsqu'elle est stable par produit et par passage à un sous-groupe algébrique connexe.

Théorème 4.3 *Pour une classe stable $\mathcal{A}$, les trois assertions suivantes sont équivalentes.*
(1) *La conjecture est vraie pour $A \in \mathcal{A}$.*
(2) *La conjecture est vraie pour $A \in \mathcal{A}$ et $\Gamma = \{0\}$.*
(3) *La conjecture est vraie pour $A \in \mathcal{A}$ et X transverse.*

Démonstration : (2) $\Longrightarrow$ (1) : pour $A \in \mathcal{A}$ et $\Gamma \subset A$ on applique le lemme 3.6 qui fournit donc A' et λ comme dans le corollaire précédent. Soit X une variété Γ-transverse. Comme $\lambda(X)$ est 0-transverse et $A' \times A \in \mathcal{A}$, on voit par (2) que $\lambda(X) \cap (A \times A')^{[\dim \lambda(X)+1]}$ n'est pas dense dans $\lambda(X)$. Par suite $X \cap \Gamma + A^{[\dim X+1]}$ n'est pas dense dans X. (1) $\Longrightarrow$ (3) : tautologie. (3) $\Longrightarrow$ (2) : soient $A \in \mathcal{A}$ et $X \subset A$ 0-transverse. Écrivons $\gamma + B$ la plus petite sous-variété de A-torsion contenant X. Quitte à faire une isogénie, on peut supposer $A = B \times B'$ avec $X = Y \times \{\gamma\}$ et $Y \subset B$ est B-transverse. On définit $\Gamma \subset B$ comme l'ensemble des g tels qu'il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}(B', B)$ avec $Ng = \varphi(\gamma)$. Le groupe Γ est de type fini et saturé. Comme $B \in \mathcal{A}$, on peut appliquer (3) à (B, Y, Γ). Ainsi $Y \cap \Gamma + B^{[\dim Y+1]}$ n'est pas dense dans Y. De plus, nous sommes dans les conditions du lemme 3.6 : si γ n'était pas 0-transverse alors il en irait de même de X. Le corollaire montre donc que $X \cap A^{[\dim X+1]}$ n'est pas dense dans X. C'est le résultat (en réalité après isogénie mais toute isogénie $A \to A'$ fait correspondre $A^{[r]}$ et $A'^{[r]}$). □

L'assertion (2) correspond exactement à la conjecture 5.1 de [Pi] et l'assertion (3) à la conjecture 5.2. Pink montre l'équivalence de (2) et (3) plus généralement pour une variété semi-abélienne.

Ainsi pour établir (1) l'on peut se contenter d'établir (2) ou (3). En réalité, on peut même utiliser le va-et-vient de façon plus subtile en faisant une partie de la preuve sous les hypothèses de (3) et une autre sous l'hypothèse de (2) : c'est typiquement le cas dans [RV] pour les courbes où une borne de hauteur est établie dans le cadre de (3) avant de revenir en (2) pour appliquer un résultat de type Lehmer. Même en dimension supérieure on peut utiliser ce schéma pour obtenir des résultats partiels.

Les méthodes évoquées dans le cours de Ph. Habegger permettent de montrer :
(a) $Z_{X,A}$ est fermé.
(b) $(X \setminus Z_{X,A}) \cap \Gamma + A^{[\dim X+1]}$ est de hauteur bornée.

Dans le cas torique (a) est dû à Bombieri, Masser et Zannier [BMZ4] tandis que (b) est dû à Habegger si $\Gamma = \{0\}$ [Ha2] et à Maurin [Mau2, Mau3] en général. Dans le cas abélien (a) et (b) ont été établis par l'auteur de ces lignes [R2, R3] (et le théorème d'Habegger [Ha3] donne une autre démonstration du cas $\Gamma = \{0\}$).

Dans la suite de cette partie, nous examinons comment les minorations de hauteur étudiées dans la partie précédente permettent d'obtenir des résultats de la forme :

$$\{x \in (X \setminus Z_{X,A}) \cap \Gamma + A^{[\dim X+1]} \mid h(x) \leq \beta\}$$

est fini (ou seulement non dense dans X) pour tout $\beta \in \mathbb{R}$. Ceci montre que la conjecture de Zilber-Pink est vraie pour les X tels que $Z_{X,A} \neq X$ (lorsque l'on connaît les minorations de hauteurs idoines). L'on sait aussi caractériser les variétés X remplissant cette condition.

b) Application du problème de Lehmer

Depuis le premier article de Bombieri, Masser et Zannier sur le sujet [BMZ1], à l'origine de la série [BMZ1]–[BMZ6], l'étape consistant à passer d'un ensemble de hauteur bornée à un ensemble fini utilise des estimations dans la direction du problème de Lehmer. On s'est ensuite aperçu que le cadre du problème de Lehmer relatif donnait une approche plus efficace, surtout en dimension supérieure.

Nous reprenons ceci en tirant parti du théorème 3.7. Cette démarche s'inspire de l'appendice de la thèse de M. Carrizosa [Ca1].

Théorème 4.4 *Si Γ est un sous-groupe saturé de rang fini et de Dobrowolski de A et si X est une sous-variété de A alors*

$$\{x \in (X \setminus Z_{X,\Gamma}) \cap \Gamma + A^{[\dim X+1]} \mid h(x) \leq \beta\}$$

est fini pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

Nous utiliserons de manière cruciale le résultat d'interpolation suivant.

Proposition 4.5 *Soient Γ un groupe saturé et X une sous-variété de A définie sur K_Γ. Il existe un réel ρ ayant la propriété suivante. Soit H une variété de Γ-torsion telle que $\dim X + \dim H < \dim A$. Si $x \in (X \setminus Z_{X,\Gamma}) \cap H$ alors il existe un fermé V contenant H et défini sur K_Γ tel que x est un point isolé de $X \cap V$ et $\deg V \leq \rho(\deg H)^{1-1/\mathrm{codim} H}$.*

Remarque. Dans la démonstration ci-dessous on construit V équidimensionnel de dimension $\dim H + 1$. Plus généralement, on pourrait, pour $d \in \{1, \ldots, \dim A - \dim X - \dim H\}$, trouver sans grand changement un fermé V_d équidimensionnel de dimension $\dim H + d$ vérifiant les mêmes conditions ainsi que la majoration plus forte $\deg V_d \leq \rho(\deg H)^{1-d/\mathrm{codim} H}$.
Démonstration : Pour établir l'énoncé, nous pouvons modifier le couple $(\bar{A}, \mathcal{L})$ qui sert à mesurer les degrés (seule la valeur de ρ est affectée). Dans le cas abélien, nous choisissons $\mathcal{L}$ de sorte que $\mathcal{L} = f^*\mathcal{L}'$ pour une isogénie $f\colon A \to A'$ vers une variété abélienne polarisée $(A', \mathcal{L}')$ produit de variétés simples $(A_i, \mathcal{L}_i)$ deux à deux égales ou non isogènes et telles que $\mathrm{End} A_i$ est un ordre maximal de $\mathrm{End} A_i \otimes \mathbb{Q}$. Dans le cas torique, nous utilisons $((\mathbb{P}^1)^n, \mathcal{O}(1))$ (et $f = \mathrm{id}_A$). Écrivons maintenant $H = \gamma + B$ avec $\gamma \in \Gamma$ et B une sous-variété semi-abélienne de A. Soit B' une sous-variété semi-abélienne telle que $B \subset B'$ et B'/B simple. Si nous appliquons l'hypothèse $x \in Z_{X,\Gamma}$ à B et B' nous trouvons

$$\begin{cases} \dim_x X \cap H & \leq & \max(0, \dim X + \dim B - \dim A) = 0 \\ \dim_x X \cap (\gamma + B') & \leq & \max(0, \dim X + \dim B' - \dim A) < \dim(B'/B). \end{cases}$$

Notons $\pi\colon B' \to B'/B$ la projection et Y l'union des composantes de $X \cap (\gamma + B')$ contenant x. Nos inégalités montrent que x est un point isolé de $Y \cap (\gamma + \pi^{-1}(0)) \subset X \cap H$ et $\pi(Y - \gamma) \neq B'/B$. Par suite, si C est une courbe de B'/B non contenue dans $\pi(Y - \gamma)$, définie sur K_Γ (B et B' le sont car $A_{\mathrm{tors}} \subset \Gamma$) et contenant 0 alors $V = \gamma + \pi^{-1}(C)$ est définie sur K_Γ, contient $H = \gamma + \pi^{-1}(0)$ et x est isolé dans $X \cap V$ car les composantes de cette intersection qui contiennent x sont contenues dans $Y \cap V = Y \cap (\gamma + \pi^{-1}(C \cap \pi(Y - \gamma)))$ donc dans $Y \cap (\gamma + \pi^{-1}(0))$ où x est isolé. Il reste donc seulement à choisir B' et C pour pouvoir estimer le degré de V comme dans l'énoncé. Vu le choix de $\mathcal{L}$, ceci peut se faire au but de f (quitte à choisir C comme l'image réciproque d'une courbe à travers l'isogénie $B'/B \to f(B')/f(B)$ induite par f). Nous nous autorisons donc à noter encore B l'image de B dans $A' = \prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$ où les A_i sont simples deux à deux non isogènes. Nous avons $B = \prod_{i=1}^m B_i$ avec $B_i \subset A_i^{n_i}$ et $\mathrm{codim} B_i = q_i \dim A_i$ pour un entier q_i. Nous fixons une norme sur $\mathrm{End} A_i \otimes \mathbb{R}$ qui induit une norme sur $\mathrm{Hom}(A_i^n, A_i) \otimes \mathbb{R} \simeq (\mathrm{End} A_i \otimes \mathbb{R})^{n_i}$. D'après les résultats de [LR] il existe $\varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_{i,q_i} \in \mathrm{Hom}(A_i^n, A_i)$, libres sur $\mathrm{End} A_i$, nuls sur B_i tels que

$$c^{-1}(\deg B_i) \leq \prod_{j=1}^{q_i} |\varphi_{i,j}|^{s \dim A_i} \leq c(\deg B_i)\,;$$

nous utilisons ici le lemme de Siegel sur $\mathrm{End}A_i \otimes \mathbb{Q}$ [LR, théorème 3.1], le calcul du degré de B_i comme hauteur [LR, théorème 5.1] ainsi que la dualité [LR, théorème 7.1] pour passer de l'espace des $\varphi\colon A_i \to A_i^{n_i}$ d'image contenue dans B_i à celui des $\varphi\colon A_i^{n_i} \to A_i$ nuls sur B_i ; pour la minoration on emploie [LR, proposition 8.2]. Dans le cas torique ($s = m = \dim A_1 = 1$) le même argument vaut avec le lemme de Siegel usuel et l'expression de $\deg B$ comme volume du module des relations de B. Nous supposons la fonction $j \mapsto |\varphi_{i,j}|$ croissante pour tout i et nous choisissons i_0 tel que la norme $|\varphi_{i_0,q_{i_0}}|$ soit maximale. Ce choix donne

$$|\varphi_{i_0,q_{i_0}}|^{-s} \prod_{i,j} |\varphi_{i,j}|^{s \dim A_i} \le \left(\prod_{i,j} |\varphi_{i,j}|^{s \dim A_i} \right)^{1-1/\mathrm{codim}B} \le c'(\deg B)^{1-1/\mathrm{codim}H}$$

(on fait usage de $\max(x_1, \ldots, x_N) \ge (x_1 \cdots x_N)^{1/N}$ pour $N = \sum_i q_i \dim A_i = \mathrm{codim}B$). Il va donc nous suffire de majorer $\deg V$ par un multiple du membre de gauche. Pour cela définissons $B' \subset A'$ par $B' = \prod_{i=1}^m B_i'$ avec $B_i' = B_i$ si $i \neq i_0$ et $B_{i_0}' = \left(\bigcap_{j=1}^{q_{i_0}-1} \mathrm{Ker}\varphi_{i_0,j} \right)^0$. Ainsi $B \subset B'$ et le morphisme $\varphi_{i_0,q_{i_0}}$ induit une isogénie $\alpha\colon B'/B \to A_{i_0}$. Nous pouvons choisir dans A_{i_0} des courbes définies sur K_Γ, contenant 0, de degré borné et telles qu'aucun fermé strict ne les contient toutes (si A_{i_0} est plongé dans $\mathbb{P}^\ell$ on le coupe par des variétés linéaires de dimension $\ell - \dim A_{i_0} + 1$). Pour une telle courbe C' on pose $\alpha^{-1}(C') = C$ et on évalue $\deg \pi^{-1}(C)$. Ici $\pi^{-1}(C) = \pi^{-1}\alpha^{-1}(C') = p_{i_0}^{-1}\varphi_{i_0,q_{i_0}}^{-1}(C') \cap B'$ donc $\deg \pi^{-1}(C) \le \deg B' \cdot \deg p_{i_0}^{-1}\varphi_{i_0,q_{i_0}}^{-1}(C')$. Par les arguments ci-dessus on a

$$\deg B' \le c|\varphi_{i_0,q_{i_0}}|^{-s \dim A_{i_0}} \prod_{i,j} |\varphi_{i,j}|^{s \dim A_i}$$

tandis que $\deg p_{i_0}^{-1}\varphi_{i_0,q_{i_0}}^{-1}(C') \le c|\varphi_{i_0,q_{i_0}}|^{s(\dim A_{i_0}-1)}$ (dans le cas abélien on obtient cette relation comme dans le lemme 6.1 ; dans le cas torique elle est inutile car $\pi^{-1}(C) = B'$). Ensuite on mutliplie et l'on a le résultat (voir aussi la partie 6 de [R1] pour une démonstration essentiellement analogue). □

Démonstration du théorème : Quitte à faire une extension finie de k, on peut supposer X définie sur k. Soit x un élément de l'ensemble de l'énoncé. Il appartient à une variété de Γ-torsion H que nous choisissons de dimension minimale. Fixons $\varepsilon = (\dim A)^{-2}$. Par le théorème 3.7, nous avons

$$\omega_{K_\Gamma}^H(x)^{1+\varepsilon}(\deg H)^{2\varepsilon} h(x) \ge c_\Gamma'(\varepsilon)$$

lorsque $\{x\}$ n'est pas de Γ-torsion c'est-à-dire si $x \notin \Gamma$. Nous appliquons la proposition précédente à x et obtenons un fermé V. Comme X et V sont définis sur K_Γ et que x est isolé dans $X \cap V$ nous avons

$$[K_\Gamma(x) : K_\Gamma] \le \deg(X \cap V) \le \deg X \deg V \le \rho(\deg X)(\deg H)^{1-1/\mathrm{codim}H}.$$

Par suite

$$\omega_{K_\Gamma}^H(x)^{\dim H} \le \frac{[K_\Gamma(x) : K_\Gamma]}{\deg H} \le \rho(\deg X)(\deg H)^{-1/\mathrm{codim}H}.$$

En utilisant $h(x) \le \beta$, on obtient, pour un réel $c > 0$ indépendant de x :

$$(\deg H)^{2\varepsilon-(1+\varepsilon)/(\dim H \cdot \mathrm{codim}H)} \ge c.$$

Ensuite par le choix de ε, nous notons

$$2\varepsilon - \frac{1+\varepsilon}{\dim H \cdot \mathrm{codim}H} \le 2\varepsilon - \frac{1}{\dim H(\dim A - \dim H)} \le 2\varepsilon - \frac{4}{(\dim A)^2} = -2\varepsilon.$$

Ceci fournit $\deg H \le c^{-1/2\varepsilon}$. Si $x \in \Gamma$ ce qui précède n'est pas valable mais ici $H = \{x\}$ donc $\deg H = 1$. Maintenant l'ensemble $\mathcal{G}$ des sous-groupes algébriques connexes de codimension $> \dim X$ et de degré $\le \max(1, c^{-1/2\varepsilon})$ est fini et nous venons de montrer que si x appartient à l'ensemble de l'énoncé alors il existe $B \in \mathcal{G}$ tel que $x \in \Gamma + B$. Par suite notre ensemble est contenu dans l'union

$$\bigcup_{B\in\mathcal{G}} (X \setminus Z_{X,\Gamma}) \cap (\Gamma + B)$$

qui est finie par le lemme 4.1. □

Bien entendu, dans l'état actuel des connaissances, ce théorème ne s'applique qu'à $\Gamma = A_{\mathrm{tors}}$ lorsque A est un tore ou une variété abélienne à mutliplications complexes (d'après les résultats de Delsinne et Carrizosa, voir théorème 3.3). Toutefois la conclusion est encore valable pour Γ de rang fini quelconque grâce à la bijection du corollaire 4.1. Avec le résultat de hauteur bornée rappelé plus haut, nous avons donc la conclusion suivante.

Corollaire 4.2 *Si A_{tors} est de Dobrowolski alors la conjecture de Zilber-Pink est vraie pour tout Γ sous la condition $X \neq Z_{X,A}$.*

c) Application du problème de Bogomolov

Plus récemment le problème de Bogomolov effectif (dire que $\Gamma = A$ est de Dobrowolski) a été utilisé pour traiter les points de petite hauteur dans la conjecture de Zilber-Pink. Ceci a été mis en œuvre par Habegger [Ha1] dans les tores puis par Viada [Vi2] dans les variétés abéliennes. Cette approche est aussi utilisée par Maurin [Mau1, Mau2, Mau3] dans ses résultats sur les tores. Notre présentation suit essentiellement [Mau3, partie 7] mais à la fois pour les tores et pour les variétés abéliennes.

Toujours dans le cadre des notations 1.1 avec la hauteur normalisée h nous définissons pour un réel ε et une partie S de A le cône suivant :

$$\mathcal{C}(S, \varepsilon) = \{x + z \mid x \in S, \quad h(z) \le \varepsilon(1 + h(x))\}.$$

Nous démontrons alors le résultat suivant.

Théorème 4.6 *Si A est de Dobrowolski alors pour tout réel β, toute sous-variété X de A transverse et de stabilisateur fini, tout sous-groupe Γ de rang fini, il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\{x \in X \cap \mathcal{C}(\Gamma + A^{[\dim X+1]}, \varepsilon) \mid h(x) \le \beta\}$$

n'est pas dense dans X.

Pour démontrer ceci, nous pouvons comme plus haut changer de compactification. Dans le cas torique, nous choisissons $\bar{A} = (\mathbb{P}^1)^n$. Nous posons $|x| = h(x)^{1/s}$ pour $x \in A$ (rappelons que $s = 1$ si A est un tore et $s = 2$ sinon). De cette façon, $|\cdot|$ induit une norme sur $A(\bar{k}) \otimes \mathbb{R}$. De plus nous choisissons une norme sur $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{R}$ liée à la précédente par la propriété $|\varphi(x)| \le |\varphi||x|$ pour tous $x \in A$ et $\varphi \in \mathrm{End}(A)$. D'après l'appendice, un couple $(c_0, \mathcal{B})$ et une notion de projecteur normalisé sont associés à cette norme. Nous utilisons de manière cruciale ces outils dans les preuves qui suivent.

Lemme 4.2 *Si $x \in \Gamma + A^{[r]}$ alors il existe $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$, $P \in A^{[r]}$ tels que $x = \gamma + P$ et $\max(|\gamma|, |P|) \le (c_0 + 1)|x|$.*

Démonstration : Écrivons $x = \gamma' + P'$ avec $\gamma' \in \Gamma$ et $P' \in A^{[r]}$. Soit φ un projecteur normalisé tel que $\mathrm{rg}\varphi \geq r$ et $\varphi(P') = 0$. Notons $a = a(\varphi)$ et γ un élément tel que $a\gamma = \varphi(x)$. Comme $a\gamma = \varphi(\gamma')$ on a $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$. Par ailleurs $a\varphi(x-\gamma) = a\varphi(x) - \varphi(a\gamma) = (a\varphi - \varphi\circ\varphi)(x) = 0$ donc $P = x - \gamma \in A^{[r]}$. Enfin $\max(|\gamma|, |P|) \leq |x| + |\gamma| \leq |x| + a^{-1}|\varphi(x)| \leq |x| + a^{-1}|\varphi||x| \leq (c_0+1)|x|$. □

Voyons maintenant que nous pouvons approcher efficacement nos projecteurs normalisés par un ensemble fini.

Lemme 4.3 *Il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout réel $Q \geq c$, il existe un ensemble fini de projecteurs 2-normalisés E_Q tel que si $\psi \in E_Q$ alors $Q < a(\psi) \leq 2Q$ et, pour tout projecteur normalisé φ, il existe $\psi \in E_Q$ de même rang que φ avec $|\varphi/a(\varphi) - \psi/a(\psi)| \leq c/a(\psi)$.*

Démonstration : Soit $B \in \mathcal{B}$. On considère le sous-groupe $\Lambda_B = \{\chi \in \mathrm{End}(A) \mid \mathrm{Im}\chi \subset B \text{ et } \chi(B) = 0\}$ de $\mathrm{End}(A)$. On note λ_B la distance minimale d'un point de $\Lambda_B \otimes \mathbb{R}$ à Λ_B. On choisit aussi un projecteur normalisé ψ_B tel que $\mathrm{Im}\psi_B = B$ et l'on pose $c_B = \max(\lambda_B, a(\psi_B))$. On définit alors $c = \max\{c_B \mid B \in \mathcal{B}\}$. Soient maintenant Q et φ comme dans l'énoncé. On note $B = \mathrm{Im}\varphi$. On choisit un entier a multiple de $a(\psi_B)$ tel que $Q < a \leq 2Q$ (ceci est possible car $Q \geq c \geq a(\psi_B)$). Nous avons alors

$$a\left(\frac{\varphi}{a(\varphi)} - \frac{\psi_B}{a(\psi_B)}\right) \in \Lambda_B \otimes \mathbb{Q}$$

donc il existe $\chi \in \Lambda_B$ avec

$$\left|a\left(\frac{\varphi}{a(\varphi)} - \frac{\psi_B}{a(\psi_B)}\right) - \chi\right| \leq \lambda_B.$$

Posons $\psi = (a/a(\psi_B))\psi_B + \chi \in \mathrm{End}(A)$ et vérifions les propriétés requises. Comme $\mathrm{Im}\psi_B = B$ et $\mathrm{Im}\chi \subset B$ on a $\mathrm{Im}\psi \subset B$. De plus $\chi(B) = 0$ donne $\chi\circ\psi_B = \chi\circ\chi = 0$ et $\mathrm{Im}\chi \subset B$ entraîne $\psi_B \circ \chi = a(\psi_B)\chi$. En combinant ceci on trouve $\psi\circ\psi = a\psi$. En particulier $\mathrm{Im}\psi = B$. Enfin $|\psi| \leq |a\varphi/a(\varphi)| + \lambda_B \leq c_0 a + \lambda_B$. Par le choix de $Q \geq c$ on a $a \geq \lambda_B \geq c_0^{-1}\lambda_B$ donc $|\psi| \leq 2c_0 a$. Tout ceci montre que ψ est un projecteur 2-normalisé avec $a(\psi) = a$. Par définition $|\varphi/a(\varphi) - \psi/a| \leq \lambda_B/a \leq c/a$ et ψ est choisi dans l'ensemble fini des projecteurs 2-normalisés de norme au plus $4c_0Q$. □

Nous entamons maintenant la démonstration du théorème 4.6. Nous commençons par une série de réductions de cet énoncé jusqu'à obtenir une assertion de minoration d'un minimum essentiel qui l'entraîne. Pour alléger les notations, nous notons $\mathcal{X}_{d,D}$ l'ensemble des sous-variétés de A transverses, de stabilisateur fini, de dimension d et de degré D ainsi que $\mathcal{P}_d$ (*resp.* $\mathcal{P}_d^{(2)}$) l'ensemble des projecteurs normalisés (*resp.* 2-normalisés) de rang au moins $d+1$. On rappelle que $A^{[d+1]} = \bigcup_{\varphi\in\mathcal{P}_d} \mathrm{Ker}\varphi$.

Proposition 4.7 *Soient Γ un groupe de rang fini et d, D des entiers avec $0 < d < g = \dim A$ et $D \geq 1$. Dans la liste suivante, chaque assertion entraîne la précédente.*

(1) *Pour tout $\beta_1 \in \mathbb{R}$ il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que si $X_1 \in \mathcal{X}_{d,D}$ alors $F_1 = \{x_1 \in X_1 \cap \mathcal{C}(\Gamma + A^{[d+1]}, \varepsilon_1) \mid |x_1| \leq \beta_1\}$ n'est pas dense dans X_1.*

(2) *Pour tout $\beta_2 \in \mathbb{R}$ il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que si $X_2 \in \mathcal{X}_{d,D}$ alors l'ensemble F_2 des $x_2 \in X_2$ qui s'écrivent $x_2 = \gamma_2 + P_2 + z_2$ avec $\gamma_2 \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$, $P_2 \in A^{[d+1]}$, $z_2 \in A$ et $|\gamma_2| \leq \beta_2$, $|P_2| \leq \beta_2$, $|z_2| \leq \varepsilon_2$ n'est pas dense dans X_2.*

(3) *Pour tout $\beta_3 \in \mathbb{R}$ il existe $\varepsilon_3 > 0$ tel que si $X_3 \in \mathcal{X}_{d,D}$ alors l'ensemble F_3 des $x_3 \in X_3$ qui s'écrivent $x_3 = P_3 + z_3$ avec $P_3 \in A^{[d+1]}$, $z_3 \in A$ et $|P_3| \leq \beta_3$, $|z_3| \leq \varepsilon_3$ n'est pas dense dans X_3.*

(4) *Pour tout $\beta_4 \in \mathbb{R}$ il existe $\varepsilon_4 > 0$ tel que si $X_4 \in \mathcal{X}_{d,D}$ alors l'ensemble F_4 des $x_4 \in X_4$ pour lesquels $|x_4| \leq \beta_4$ et il existe $\varphi_4 \in \mathcal{P}_d$ avec $|\varphi(x_4)| \leq |\varphi_4|\varepsilon_4$ n'est pas dense dans X_4.*

(5) *Il existe* $\varepsilon_5 > 0$ *tel que pour tous* $X_5 \in \mathcal{X}_{d,D}$ *et* $\varphi_5 \in \mathcal{P}_d^{(2)}$ *on ait*

$$\mu^{\mathrm{ess}}((\mathrm{id} + \varphi_5)(X_5)) \geq a(\varphi_5)^{1/g}\varepsilon_5.$$

Démonstration : Nous ne changeons pas les assertions si nous imposons de plus dans chacune $\beta_i \geq 1$ et $\varepsilon_i \leq 1/4$. Nous démontrons donc les 4 implications requises avec ces conditions supplémentaires. (2) $\Longrightarrow$ (1) On pose $\beta_2 = (c_0 + 1)(2\beta_1 + 1)$. L'assertion (2) fournit $\varepsilon_2 > 0$ et on définit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^s(2\beta_1 + 2)^{-s}$ puis $X_2 = X_1$. Il suffit alors de voir $F_1 \subset F_2$. Si $x_1 \in F_1$ on écrit $x_1 = y + z_2$ avec $y \in \Gamma + A^{[d+1]}$, $z_2 \in A$ et $h(z_2) \leq \varepsilon_1(h(y)+1)$. On a $|z_2| \leq \varepsilon_1^{1/s}(|y|+1)$ puis $|y| \leq |x_1|+|z_2| \leq \beta_1+(1/2)(|y|+1)$ donc $|y| \leq 2\beta_1 + 1$. Ceci fournit $|z_2| \leq \varepsilon_2$. D'autre part, par le lemme 4.2, y s'écrit $\gamma_2 + P_2$ avec $\gamma_2 \in \Gamma_{\mathrm{sat}}$ et $P_2 \in A^{[d+1]}$ et $\max(|\gamma_2|, |P_2|) \leq (c_0 + 1)|y| \leq \beta_2$. Ceci montre bien $x_1 \in F_2$. (3) $\Longrightarrow$ (2) Nous employons $\beta_3 = \beta_2$ et $\varepsilon_2 = \varepsilon_3/2$. Comme Γ_{sat} est de rang fini, nous pouvons écrire $\{\gamma_2 \in \Gamma_{\mathrm{sat}} \mid |\gamma| \leq \beta_2\} = \bigcup_{\gamma_3 \in S}\{\gamma_2 \in \Gamma_{\mathrm{sat}} \mid |\gamma_2 - \gamma_3| \leq \varepsilon_2\}$ où S est un ensemble fini. Montrons alors $F_2 \subset \bigcup_{\gamma_3 \in S} \gamma_3 + F_3$ où chaque F_3 est défini avec $X_3 = X_2 - \gamma_3$. En effet si $x_2 = \gamma_2 + P_2 + z_2 \in F_2$ alors $x_2 - \gamma_3 = P_2 + z_2 + (\gamma_2 - \gamma_3)$ avec $|P_2| \leq \beta_2$ et, si $z_3 = z_2 + (\gamma_2 - \gamma_3)$, $|z_3| \leq 2\varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Nous avons bien $X_3 \in \mathcal{X}_{d,D}$ car $\deg(X_2 - \gamma_3) = \deg(X_2)$ et $\mathrm{Stab}(X_2 - \gamma_3) = \mathrm{Stab}(X_2)$. (4) $\Longrightarrow$ (3) Ici $\beta_4 = \beta_3 + 1$, $\varepsilon_4 = \varepsilon_3$, $X_4 = X_3$. Si $x_3 = P_3 + z_3$ il existe $\varphi_4 \in \mathcal{P}_d$ avec $\varphi_4(P_3) = 0$ donc $|\varphi_4(x_3)| = |\varphi_4(z_3)| \leq |\varphi_4||z_3| \leq |\varphi_4|\varepsilon_4$. De plus $|x_3| \leq \beta_3 + \varepsilon_3 \leq \beta_4$. Ceci montre directement $F_3 \subset F_4$. (5) $\Longrightarrow$ (4) Nous posons $Q = (2(c + 1)\beta_4\varepsilon_5^{-1})^{2g}$ et $\varepsilon_4 = \varepsilon_5(4Qc_0)^{-1}$ où c est défini par le lemme 4.3. Ces choix sont faits pour avoir $(c + 1)\beta_4 + 2c_0Q\varepsilon_4 \leq Q^{1/2g}\varepsilon_5$ (avec $Q \geq c \geq 1$). On pose aussi $X_5 = X_4$. Si $x_4 \in F_4$ il existe $\varphi_4 \in \mathcal{P}_d$ avec $|\varphi_4(x_4)| \leq |\varphi_4|\varepsilon_4$. Par le lemme 4.3, il existe $\varphi_5 \in E_Q$ avec $\varphi_5 \in \mathcal{P}_d^{(2)}$ et $|\varphi_5/a(\varphi_5) - \varphi_4/a(\varphi_4)| \leq c/a(\varphi_5)$. Alors

$$\begin{aligned}
|x_4 + \varphi_5(x_4)| &\leq |x_4| + a(\varphi_5)\left|\left(\frac{\varphi_5}{a(\varphi_5)} - \frac{\varphi_4}{a(\varphi_4)}\right)(x_4) + \frac{\varphi_4(x_4)}{a(\varphi_4)}\right| \\
&\leq |x_4| + c|x_4| + a(\varphi_5)\frac{|\varphi_4|}{a(\varphi_4)}\varepsilon_4 \\
&\leq (c + 1)\beta_4 + 2c_0Q\varepsilon_4 \leq Q^{1/2g}\varepsilon_5.
\end{aligned}$$

Par suite $h((\mathrm{id} + \varphi_5)(x_4)) \leq Q^{1/g}\varepsilon_5 < \mu^{\mathrm{ess}}((\mathrm{id} + \varphi_5)(X_5))$. Comme $\mathrm{id} + \varphi_5$ est une isogénie (on a $(\mathrm{id} + \varphi_5) \circ ([a(\varphi_5) + 1] - \varphi_5) = [a(\varphi_5) + 1]$), on en déduit que x_4 appartient à un fermé strict de X_4 dépendant de φ_5. La conclusion découle ensuite de la finitude de E_Q. □

Il nous suffit donc maintenant de démontrer l'assertion (5) puisque (1) entraîne le théorème. Nous allons même établir un énoncé un peu plus fort dans la mesure où (1) montre que le ε du théorème ne dépend de X que par son degré (mais il dépend de β).

Proposition 4.8 *Si A est de Dobrowolski, il existe un réel $c > 0$ tel que pour toute sous-variété X de A transverse de stabilisateur fini et tout projecteur 2-normalisé φ de rang au moins* $\dim X + 1$ *on a*

$$\mu^{\mathrm{ess}}((\mathrm{id} + \varphi)(X)) \geq c(\deg X)^{-g}a(\varphi)^{1/g}.$$

Démonstration : Nous abrégeons $a = a(\varphi)$ et $d = \dim X$. Si $\mathrm{rg}\varphi = g$, nous avons $\varphi = [a]$ et l'énoncé est clair. Nous supposons donc dans la suite $\mathrm{rg}\varphi \leq g - 1$ (et ainsi $d \leq g - 2$ et $g \geq 3$). Notons Y une composante de degré minimal de $Z = [a + 1]^{-1}(\mathrm{id} + \varphi)(X)$ et N le nombre de composantes de Z. Nous utilisons $\varepsilon = 1/g(g-2)$. Nous pouvons appliquer le fait que A est de Dobrowolski à la variété Y (transverse car X l'est) et d'après $[a + 1]Y = (\mathrm{id} + \varphi)(X)$ nous trouvons

$$\mu^{\mathrm{ess}}((\mathrm{id} + \varphi)(X)) = (a + 1)^s\mu^{\mathrm{ess}}(Y) \geq c_A(\varepsilon)(a + 1)^s\omega_{\bar{k}}(Y)^{-1-\varepsilon}$$

$$\geq c_A(\varepsilon)(a+1)^s(\deg Y)^{-(1+\varepsilon)/(g-d)} \geq c_A(\varepsilon)(a+1)^s\left(\frac{N}{\deg Z}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{g-d}}.$$

Comme $Z = ([a+1]-\varphi)^{-1}(\mathrm{id}+\varphi)^{-1}(\mathrm{id}+\varphi)(X) = ([a+1]-\varphi)^{-1}(X+\mathrm{Ker}(\mathrm{id}+\varphi))$ le nombre N est supérieur au nombre de composantes de $X+\mathrm{Ker}(\mathrm{id}+\varphi)$ qui vaut

$$\mathrm{Card}\left(\frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{id}+\varphi)}{\mathrm{Stab}(X)\cap\mathrm{Ker}(\mathrm{id}+\varphi)}\right) \geq \frac{\mathrm{CardKer}(\mathrm{id}+\varphi)}{\mathrm{CardStab}(X)} \geq \frac{(a+1)^{s\mathrm{rg}\varphi}}{(\deg X)^{d+1}}.$$

Ici la majoration du dénominateur résulte de l'inégalité de Bézout (en écrivant $\mathrm{Stab}(X) = \bigcap_{x\in X} X-x$) tandis qu'au numérateur nous avons $\mathrm{CardKer}(\mathrm{id}+\varphi) = (a+1)^{s\mathrm{rg}\varphi}$ car $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}+\varphi) = \mathrm{Ker}[a+1]\cap\mathrm{Im}\varphi$ (on utilise $\varphi(x) = -x \Longrightarrow x\in\mathrm{Im}\varphi$ et $x\in\mathrm{Im}\varphi \Longrightarrow \varphi(x) = ax$). D'un autre côté nous avons $\deg Z = (a+1)^{s(g-d)}\deg(\mathrm{id}+\varphi)(X)$ et $\deg(\mathrm{id}+\varphi)(X) \leq c'(a+1)^{sd}\deg X$ (ce degré est majoré par un multiple de $|\mathrm{id}+\varphi|^{sd}\deg X$ par le lemme 6.2 et $|\mathrm{id}+\varphi| \leq |\mathrm{id}|+2c_0a$). En combinant nous avons

$$\frac{\deg Z}{N} \leq c'(a+1)^{s(g-\mathrm{rg}\varphi)}(\deg X)^{d+2} \leq c'(a+1)^{s(g-d-1)}(\deg X)^g.$$

Par suite

$$\mu^{\mathrm{ess}}((\mathrm{id}+\varphi)(X)) \geq c_A(\varepsilon)c'^{-\frac{1+\varepsilon}{g-d}}(\deg X)^{-\frac{g}{g-d}(1+\varepsilon)}(a+1)^{s\left(1-(1+\varepsilon)(1-\frac{1}{g-d})\right)}$$

et ceci donne l'énoncé avec $(1+\varepsilon)/(g-d) \leq 1$, $a+1 \geq a$ et $1-(1+\varepsilon)(1-(g-d)^{-1}) \geq 1-(1+\varepsilon)(1-(g-1)^{-1}) = 1/g$ par le choix de ε. $\square$

Il importe de noter ici que la condition $Z_{X,A} \neq A$ entraîne à la fois X transverse et $\mathrm{Stab}(X)$ fini. Par conséquent les résultats de hauteur bornée rappelés à la fin du paragraphe a) donnent l'énoncé suivant (on connaît aussi des versions plus fortes avec un cône).

Corollaire 4.3 *Si A est de Dobrowolski alors la conjecture de Zilber-Pink est vraie pour tout Γ sous la condition $X \neq Z_{X,A}$.*

Dans la démonstration de la proposition 4.8, l'hypothèse que A est de Dobrowolski est immédiatement combinée avec une majoration de l'indice d'obstruction $\omega_{\bar{k}}(Y)$ par une puissance du degré $\deg(Y)^{1/(g-d)}$. Par conséquent il nous suffirait de savoir que A est faiblement de Dobrowolski au sens donné à ce terme dans le théorème 3.3 et donc le théorème 4.6 ainsi que son corollaire ci-dessus valent sous cette hypothèse (et donc inconditionnellement pour les produits de variétés abéliennes à multiplications complexes, de courbes elliptiques et de surfaces abéliennes).

Comme conséquence du théorème 4.6 nous pouvons aussi écrire un résultat du même type avec une hypothèse plus faible sur X. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}$ nous notons $A_\varepsilon^{[r]} = \{P+z \mid P \in A^{[r]} \text{ et } h(z) \leq \varepsilon\}$.

Théorème 4.9 *Si A est de Dobrowolski alors, pour tout réel β et toute sous-variété X de A de stabilisateur fini et 0-transverse, il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\{x \in X \cap A_\varepsilon^{[\dim X+1]} \mid h(x) \leq \beta\}$$

n'est pas dense dans X.

Démonstration : Notons $\gamma + A'$ le plus petit translaté de sous-variété semi-abélienne contenant X. Par hypothèse sur X, le seul sous-groupe algébrique de A contenant $\gamma + A'$ est A lui-même. Quitte à modifier γ par un élément de A', nous pouvons supposer que γ est 0-transverse. Ceci signifie que l'application linéaire

$\mathrm{End}A \to A$, $\varphi \mapsto \varphi(\gamma)$ est injective et, comme sa source est de dimension finie, on en déduit que $|\varphi| \le c|\varphi(\gamma)|$ pour un réel $c > 0$. Notons aussi que si $z \in A$ est de hauteur suffisamment petite alors $\gamma - z$ est encore 0-transverse ; sinon on aurait $\varphi(\gamma) = \varphi(z)$ pour un $\varphi \neq 0$ d'où $|\varphi| \le c|\varphi(\gamma)| = c|\varphi(z)| \le c|\varphi||z|$ ce qui est absurde pour $|z| > 1/c$. La sous-variété $Y = X - \gamma$ de A' est transverse et de stabilisateur fini. Posons encore $\Gamma = (\mathrm{Hom}(A, A') \cdot \gamma)_{\mathrm{sat}}$ de rang fini. Le lemme 3.7 montre que le sous-groupe A' de A' est de Dobrowolski donc, par le théorème 4.6, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que l'ensemble

$$\{y \in Y \cap \mathcal{C}(\Gamma + A'^{[\dim X+1]}, \varepsilon') \mid |y| \le |\gamma| + \beta^{1/s}\}$$

n'est pas dense dans Y. Il nous suffit donc de trouver $\varepsilon > 0$ tel que $(\gamma + A') \cap A_\varepsilon^{[\dim X+1]}$ soit inclus dans $\gamma + \mathcal{C}(\Gamma + A'^{[\dim X+1]}, \varepsilon')$. Considérons donc $y \in A'$ tel que $\gamma + y = P + z$ avec $P \in A^{[\dim X+1]}$ et $|z| \le \varepsilon^{1/s}$. Quitte à modifier P et z par un point de torsion nous supposons $P \in B$ pour B une sous-variété semi-abélienne de A de codimension au moins $\dim X + 1$. Par hypothèse $\gamma - z = P - y \in B + A'$; pour ε assez petit ceci force $B + A' = A$. Nous pouvons donc appliquer la proposition 6.2 et elle nous fournit $\varphi \colon A \to A'$ et $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $\varphi_{|A'} \circ \varphi = a\varphi$, $|\varphi_{|A'}| \le c_0 a$ et $\mathrm{Ker}^0\varphi = B$. Écrivons $\varphi(\gamma) = a\gamma'$ et $\varphi(z) = az'$ avec $\gamma', z' \in \mathrm{Im}\varphi \subset A'$ puis $P' = y + \gamma' - z' \in A'$. Nous avons $\gamma' \in \Gamma$. De plus $\varphi(\gamma - \gamma') = a\gamma' - \varphi_{|A'}(\gamma') = 0$ car $\gamma' \in \mathrm{Im}\varphi$ et de même $\varphi(z - z') = 0$. Ceci montre $\varphi(P') = \varphi(y + \gamma' - z') = \varphi(P + z - z' + \gamma' - \gamma) = 0$ car $P \in B \subset \mathrm{Ker}\varphi$. Ainsi $P' \in \mathrm{Ker}\varphi \cap A'$ et $\mathrm{codim}_{A'}\mathrm{Ker}\varphi \cap A' = \mathrm{codim}_{A'} B \cap A' = \mathrm{codim}_A B \ge \dim X + 1$ en utilisant $B + A' = A$. Nous obtenons $P' \in A'^{[\dim X+1]}$. Calculons encore $|a\gamma'| = |\varphi(\gamma')| = |\varphi(\gamma' - P')| \le |\varphi_{|A'}||\gamma' - P'| \le c_0 a|\gamma' - P'|$ et, finalement,

$$|z'| = \frac{1}{a}|\varphi(z)| \le \frac{|\varphi|}{a}\varepsilon^{1/s} \le \frac{\varepsilon^{1/s}}{a} c|\varphi(\gamma)| = c\varepsilon^{1/s}|\gamma'| \le cc_0\varepsilon^{1/s}| - \gamma' + P'|$$

(dans ce calcul on voit φ comme un élément de $\mathrm{End}A$). Ceci nous montre $y = -\gamma' + P' + z' \in \mathcal{C}(\Gamma + A'^{[\dim X+1]}, cc_0\varepsilon^{1/s})$ et donne la conclusion pour ε assez petit. □

Signalons que ce résultat serait faux si l'on remplaçait $A_\varepsilon^{[r]}$ par le cône $\mathcal{C}(A^{[r]}, \varepsilon)$ (voir [Mau3, partie 12]).

Par ailleurs, l'on peut aussi combiner cet énoncé avec un résultat de hauteur bornée puisque nous avons montré $(\gamma + A') \cap A_\varepsilon^{[\dim X+1]} \subset \gamma + \mathcal{C}(\Gamma + A'^{[\dim X+1]}, \varepsilon')$ indépendamment de la borne de hauteur.

5 Variétés semi-abéliennes

Dans cette dernière partie, nous évoquons brièvement les problèmes qui se posent pour étendre ce qui précède aux variétés semi-abéliennes. Si l'on résume notre démarche en 3 étapes :

(1) montrer un résultat de hauteur bornée (voir la fin du paragraphe a) de la partie 4 et les notes de Ph. Habegger) ;

(2) montrer que A_{tors} ou A est de Dobrowolski ;

(3) déduire de (2) un résultat de non-densité des points de hauteur bornée (voir théorèmes 4.4 et 4.6) ;

aucune de ces étapes n'est connue à ce jour dans le cas général des variétés semi-abéliennes. Nous ne traitons pas ici de (1). L'extension de (3) en suivant les démonstrations faites dans la partie précédente se heurte surtout au fait que l'on utilise fréquemment le théorème de complète réductibilité qui ne vaut pas dans le cas semi-abélien. Toutefois, l'obstruction la plus évidente vient de (2) au moins si l'on se concentre sur $A_{\rm tors}$: on peut en effet démontrer qu'il existe des variétés semi-abéliennes A pour lesquelles le groupe $A_{\rm tors}$ n'est **pas** de Dobrowolski.

Nous rappelons succintement l'argument dû à Daniel Bertrand et basé sur l'existence des points déficients mis en évidence par Jacquinot et Ribet (voir [JR] ; les auteurs précisent que la construction est essentiellement due à Breen ; les points déficients sont aussi nommés points de Ribet par Daniel Bertrand). Soit A une variété semi-abélienne extension d'une variété abélienne A_0 par le tore $\mathbb{G}_{\rm m}$. On construit alors [JR] un morphisme de groupes $u\colon \mathrm{Hom}(\widehat{A_0}, A_0) \to A$ et on appelle points déficients les éléments du groupe de rang fini $A_{\rm défi} = (\mathrm{Im}u)_{\rm div}$. Ces points possèdent deux propriétés remarquables qui les apparentent aux points de torsion : d'une part ils sont rationnels sur $K_{A_{\rm tors}}$ (voir [JR]) et d'autre part la partie de degré 1 de leur hauteur (notée $\hat{h}_{\mathcal{L}_{\rm lin}}$ à la fin de la partie 2) est nulle (voir [Be1, p. 243]). Pourtant, et c'est bien sûr tout l'intérêt de cette construction, on démontre qu'il existe des exemples où $A_{\rm défi} \neq A_{\rm tors}$ et même où $A_{\rm défi}$ contient des points 0-transverses.

Il y a alors deux façons de montrer que $A_{\rm tors}$ n'est pas de Dobrowolski. En premier lieu si P est un point de A et Q_n un point de n-division de P ($nQ_n = P$) alors $\omega_k(Q_n) \leq c(\mathrm{Card}\mathrm{Ker}[n])^{1/\dim A} = cn^{(2g+1)/(g+1)}$ si $g = \dim A_0 = \dim A - 1$. Si l'on suppose que P est déficient, on a aussi $h(Q_n) = n^{-2}h(P)$ car la partie de degré 1 de la hauteur est nulle. Par suite $\omega_k(Q_n)^{1+\varepsilon}h(Q_n) \leq cn^{((2g+1)\varepsilon-1)/(g+1)}$ tend vers 0 pour ε assez petit, ce qui contredit la propriété de Dobrowolski si P, donc Q_n, est 0-transverse (ceci montre même en fait que $\{0\}$ n'est pas de Dobrowolski).

Alternativement, on peut utiliser seulement la première propriété des points déficients qui donne $\omega_{K_{A_{\rm tors}}}(Q_n) = 1$ et le fait que $h(Q_n)$ tend vers 0 (l'inégalité $h(Q_n) \leq n^{-1}h(P)$ est vraie sans utiliser que P est déficient) pour conclure de même que $A_{\rm tors}$ ne peut pas être de Dobrowolski.

Au vu de ce résultat négatif, on peut se demander quelle est la bonne généralisation du problème de Lehmer aux variétés semi-abéliennes les plus générales. Le formalisme introduit dans le présent texte permet de formuler l'hypothèse suivante.

Question. Le groupe de rang fini $A_{\rm défi}$ est-il de Dobrowolski ?

Cette suggestion, peu étayée pour l'instant, est une partie de la motivation de l'introduction de la notion de groupe de Dobrowolski et de son application à des groupes de rang fini non nul (comme dans le théorème 4.4). Si la réponse à la question est positive, la voie serait ouverte aux applications à la conjecture de Zilber-Pink (modulo les points (1) et (3) ci-dessus).

Pour terminer mentionnons encore que les points déficients sont aussi à la base d'un contre-exemple de Daniel Bertrand à la conjecture de Manin-Mumford relative pour les familles de variétés semi-abéliennes (voir [Be3] ; on pourra consulter également [Be4]).

6 Appendice : projecteurs normalisés

Soit A une variété abélienne ou un tore. Nous considérons une norme quelconque $|\cdot|$ sur $\mathrm{End}A \otimes \mathbb{R}$.

Proposition 6.1 *Il existe un réel $c_0 \geq 1$ et une famille finie $\mathcal{B}$ de sous-variétés semi-abéliennes de A tels que, pour toute sous-variété semi-abélienne B de A, il existe $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\varphi \in \mathrm{End}A$ tels que*

$$\varphi \circ \varphi = a\varphi, \qquad |\varphi| \leq c_0 a, \qquad \mathrm{Im}\varphi \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}^0\varphi = B.$$

Cette proposition (démontrée ci-dessous) permet de donner la définition principale de cette partie. Nous fixons une fois pour toutes un couple $(c_0, \mathcal{B})$ comme dans la proposition.

Définition 6.1 *On appelle projecteur normalisé un élément* $\varphi \in \mathrm{End}A$ *pour lequel il existe* $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *avec* $\varphi \circ \varphi = a\varphi$, $|\varphi| \leq c_0 a$ *et* $\mathrm{Im}\varphi \in \mathcal{B}$*. Si un tel* φ *est non nul, l'entier* a *est unique, on l'appelle le paramètre de* φ *et on le note* $a(\varphi)$*. On pose aussi* $a(0) = 1$.

On remarque que si φ est un projecteur normalisé non nul et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ alors il en est de même de $m\varphi$ et $a(m\varphi) = ma(\varphi)$. Cette remarque et la proposition montrent

$$A^{[r]} = \bigcup_{\mathrm{rg}\varphi \geq r} \mathrm{Ker}\varphi$$

où l'union porte sur les projecteurs normalisés de rang au moins r (on écrit naturellement $\mathrm{rg}\varphi = \dim \mathrm{Im}\varphi$; pour la notation $A^{[r]}$ voir le début de la partie 4). Cette formule explique (en partie) l'utilité de cette notion pour la conjecture de Zilber-Pink.

Nous définissons aussi (pour un usage plus technique, voir paragraphe c) de la partie 4) une notion de projecteur 2-normalisé en remplaçant simplement dans la définition $|\varphi| \leq c_0 a$ par $|\varphi| \leq 2c_0 a$. Nous utilisons également la notation $a(\varphi)$ dans ce contexte.

Nous établissons maintenant la proposition 6.1 comme cas particulier ($A' = A$) de l'énoncé plus général suivant.

Proposition 6.2 *Soient* A' *une sous-variété semi-abélienne de* A *et* $|\cdot|$ *une norme sur* $\mathrm{End}(A') \otimes \mathbb{R}$*. Il existe un réel* $c_0 \geq 1$ *et une famille finie* $\mathcal{B}$ *de sous-variétés semi-abéliennes de* A' *tels que, pour toute sous-variété semi-abélienne* B *de* A *vérifiant* $B + A' = A$*, il existe* $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *et* $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, A')$ *avec*

$$\varphi_{|A'} \circ \varphi = a\varphi, \qquad |\varphi_{|A'}| \leq c_0 a, \qquad \mathrm{Im}\varphi \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}^0\varphi = B.$$

Démonstration : Choisissons $B_1, \ldots, B_t$ des sous-variétés semi-abéliennes simples de A' telles que l'addition induise une isogénie $B_1 \times \cdots \times B_t \to A'$. Définissons $\mathcal{B}$ comme l'ensemble de toutes les sommes d'un nombre quelconque de B_i. Vérifions d'abord que pour B comme dans l'énoncé il existe $B' \in \mathcal{B}$ avec $A = B + B'$ et $B \cap B'$ fini. Prenons pour cela un élément $B' \in \mathcal{B}$ tel que $A = B + B'$ et minimal pour cette propriété. Il en existe car $A = B + A'$. Écrivons $B' = B_{i_1} + \cdots + B_{i_k}$ et $\tilde{B}_j = B + B_{i_1} + \cdots + B_{i_j}$ pour $0 \leq j \leq k$. Si la suite des $\tilde{B}_j$ n'est pas strictement croissante, disons $\tilde{B}_{j-1} = \tilde{B}_j$ alors $A = B + B_{i_1} + \cdots + B_{i_{j-1}} + B_{i_{j+1}} + \cdots + B_{i_k}$ contredisant la minimalité de B'. Ainsi $\tilde{B}_{j-1} \neq \tilde{B}_j$ et par suite $\tilde{B}_j/\tilde{B}_{j-1}$ est isogène à B_{i_j} par simplicité. Ceci entraîne $\dim B + B' = \dim B + \dim B'$ et donc $B \cap B'$ fini.

Si nous disposons d'un tel B' l'application composée $B' \hookrightarrow A \xrightarrow{\pi} A/B$ est une isogénie χ de degré $\mathrm{Card}(B \cap B')$ donc il existe une isogénie $\chi' \colon A/B \to B'$ telle que $\chi \circ \chi' = [\mathrm{Card}(B \cap B')]$. Posons $a = \mathrm{Card}(B \cap B')$ et $\varphi = (B' \hookrightarrow A') \circ \chi' \circ \pi$. Nous avons $\mathrm{Im}\varphi = B' \in \mathcal{B}$ et $\mathrm{Ker}^0\varphi = B$ tandis que $\varphi_{|A'} \circ \varphi = (B' \hookrightarrow A') \circ \chi' \circ \pi \circ (A' \hookrightarrow A) \circ (B' \hookrightarrow A') \circ \chi' \circ \pi = (B' \hookrightarrow A') \circ \chi' \circ \chi \circ \chi' \circ \pi = a\varphi$. Pour établir la proposition, il reste à choisir B' de sorte que $|\varphi_{|A}|$ soit majoré par un multiple de a. Nous imposons pour cela que $\mathrm{Card}(B \cap B')$ soit maximal. Si $B'' \in \mathcal{B}$ est tel que $B \cap B''$ est fini alors $\deg(\varphi_{|B''}) = \mathrm{Card}(B'' \cap \pi^{-1}(\mathrm{Ker}\chi')) \leq \deg \chi' \mathrm{Card}(B \cap B'') \leq a^{\dim B'}$. Par ailleurs pour $1 \leq i \leq t$, le choix d'une isogénie $A/\sum_{j \neq i} B_j \to B_i$ donne une surjection $\pi_i \colon A \to B_i$ telle que $\pi_{i|B_j} = 0$ si $i \neq j$ et l'on peut imposer également que $\pi_{i|B_i}$ soit la multiplication par un entier, disons a', que l'on peut même prendre indépendant de i. Maintenant si $B' = \sum_{i \in I} B_i$ on considère $j \in I$ et $k \notin I$ et $B'' = \sum_{i \in I \cup \{k\} \setminus \{j\}} B_i$. Comme $\chi' \circ \pi_{|B'} = [a]$ on a $\pi_\ell \circ \varphi_{|B'} = [aa'\delta_{i,\ell}]$ si $i \in I$. Par suite $(\prod_{i \in I} \pi_i) \circ \varphi_{|B''}$ composée avec l'isogénie $\prod_{i \in I \cup \{k\} \setminus \{j\}} B_i \to B''$ est le produit de l'endomorphisme $[aa']$ de $\prod_{i \in I \setminus \{j\}} B_i$ par un morphisme $B_k \to \prod_{i \in I} B_i$ déduit de $\varphi_{|B_k}$. Le degré de ce produit est donc $(aa')^{s(\dim B'-\dim B_j)}\deg(\pi_j\circ\varphi_{|B_k})$ et ceci montre $\deg(\pi_j\circ\varphi_{|B_k})\leq ca^{s(\dim B_j-\dim B')}\deg(\varphi_{|B''})$ pour un réel c indépendant de B. Si $\dim B_j\neq\dim B_k$ alors $\pi_j\circ\varphi_{|B_k}=0$ donc on a dans tous les cas $\deg(\pi_j\circ\varphi_{|B_k})\leq ca^{s\dim B_k}$. Comme les éléments non nuls de $\mathrm{Hom}(B_k,B_j)$ sont des isogénies on a $|\pi_j\circ\varphi_{|B_k}|\leq\deg(\pi_j\circ\varphi_{|B_k})^{1/s\dim B_k}$ pour un choix idoine de norme sur $\mathrm{Hom}(B_k,B_j)\otimes\mathbb{R}$. Enfin l'application linéaire $\mathrm{Hom}(A',B')\to\prod_{j\in I,\ 1\leq k\leq t}\mathrm{Hom}(B_k,B_j)$, $\psi\mapsto(\pi_j\circ\psi_{|B_k})_{j,k}$ est injective donc $|\psi|\leq c\sum_{j\in I,\ 1\leq k\leq t}|\pi_j\circ\psi_{|B_k}|$. En appliquant ceci à $\psi=\varphi_{|A'}$ il vient $|\varphi_{|A'}|\leq c_0a$ car $|\pi_j\circ\varphi_{|B_k}|\leq ca$ si $k\notin I$ par ce qui précède et $\pi_j\circ\varphi_{|B_k}=[aa'\delta_{j,k}]$ si $k\in I$ (pour une version de cette démonstration dans le cas des tores voir [Mau3, prop. 7.1]). $\square$

Nous terminons par deux lemmes qui ne concernent pas uniquement les projecteurs normalisés mais contrôlent le degré de variétés associées à un endomorphisme φ en termes de sa norme.

Lemme 6.1 *Il existe $c>0$ tel que si $\varphi\in\mathrm{End}A$ on a* $\deg(\mathrm{Ker}\varphi)\leq c|\varphi|^{s\dim\mathrm{Im}\varphi}$.

Démonstration : Dans le cas abélien,

$$\deg(\mathrm{Ker}\varphi)=\frac{(\varphi^*\mathcal{L})^{\cdot\dim\mathrm{Im}\varphi}\cdot\mathcal{L}^{\cdot\dim\mathrm{Ker}\varphi}\cdot A}{\mathcal{L}^{\cdot\dim A}\cdot A}$$

est un polynôme en φ de degré $2\dim\mathrm{Im}\varphi$ d'où la majoration. Dans le cas torique, on peut choisir une compactification particulière $(\bar{A},\mathcal{L})$ de A par exemple $(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(1))$. Alors, si φ correspond à une matrice (m_{ij}), le fermé $\mathrm{Ker}\varphi$ est défini par les équations

$$\prod_{j=0}^{n}X_j^{\max(0,m_{ij})}=\prod_{j=0}^{n}X_j^{\max(0,-m_{ij})}$$

en posant $m_{i0}=-\sum_{j=1}^{n}m_{ij}$. Ces équations sont toutes de degré au plus $c|\varphi|$ donc d'après le théorème de Bézout le fermé équidimensionnel $\mathrm{Ker}\varphi$ vérifie $\deg(\mathrm{Ker}\varphi)\leq(c|\varphi|)^{s\mathrm{codim}\mathrm{Ker}\varphi}=(c|\varphi|)^{s\dim\mathrm{Im}\varphi}$. $\square$

Lemme 6.2 *Il existe $c>0$ tel que si X est une sous-variété de A et $\varphi\in\mathrm{End}A$ une isogénie alors* $\deg\varphi(X)\leq c|\varphi|^{s\dim X}\deg X$.

Démonstration : Étant donné $\varphi\in\mathrm{End}(A)$ notons $\alpha(\varphi)$ le plus petit entier naturel tel qu'il existe une compactification $\pi\colon\bar{A}_\varphi\to\bar{A}$ de A et une extension $\bar{\varphi}\colon\bar{A}_\varphi\to\bar{A}$ de φ telles que $\bar{\varphi}^*\mathcal{L}^{\otimes-1}\otimes\pi^*\mathcal{L}^{\otimes\alpha(\varphi)}$ est engendré sur A par ses sections globales sur $\bar{A}_\varphi$ (pour vérifier l'existence d'un tel entier voir démonstration du lemme 3.2). Notons aussi $\bar{X}$ et $\bar{X}_\varphi$ l'adhérence de X dans $\bar{A}$ et $\bar{A}_\varphi$. Lorsque φ est une isogénie, on a les majorations

$$\deg\varphi(X)=\mathcal{L}^{\cdot\dim X}\cdot\overline{\varphi(X)}=\mathcal{L}^{\cdot\dim X}\cdot\bar{\varphi}(\bar{X}_\varphi)\leq(\bar{\varphi}^*\mathcal{L})^{\cdot\dim X}\cdot\bar{X}_\varphi$$

$$\leq(\pi^*\mathcal{L}^{\otimes\alpha(\varphi)})^{\cdot\dim X}\cdot\bar{X}_\varphi=(\alpha(\varphi)^{\dim X})\mathcal{L}^{\cdot\dim X}\cdot\bar{X}=\alpha(\varphi)^{\dim X}\deg X.$$

Par conséquent, pour établir le lemme, il nous suffit de montrer que $\alpha(\varphi)$ est majoré par un multiple de $|\varphi|^s$. Pour ceci, nous pouvons même choisir un couple particulier $(\bar{A},\mathcal{L})$: dans le cas torique nous nous limitons à $\bar{A}=(\mathbb{P}^1)^n$ et dans le cas abélien nous imposons que $\mathcal{L}$ soit engendré par ses sections globales. Nous avons alors pour $m\in\mathbb{Z}$ et $\varphi\in\mathrm{End}(A)$ l'estimation $\alpha(m\varphi)\leq|m|^s\alpha(\varphi)$ d'après $[m]^*\mathcal{L}\simeq\mathcal{L}^{\otimes|m|^s}$. Voyons ensuite $\alpha(\varphi+\psi)\leq s(\alpha(\varphi)+\alpha(\psi))$ pour $\varphi,\psi\in\mathrm{End}A$. Ceci donnera le résultat car, en fixant une base $\varphi_1,\ldots,\varphi_t$ de $\mathrm{End}A$, ces relations entraînent $\alpha(\sum_{i=1}^t m_i\varphi_i)\leq s^{t-1}\sum_{i=1}^t m_i^s\alpha(\varphi_i)\leq c|\sum_{i=1}^t m_i\varphi_i|^s$ pour tous $m_1,\ldots,m_t\in\mathbb{Z}$. Dans le cas abélien, la majoration de $\alpha(\varphi+\psi)$ découle du théorème du cube ([Mu, page 59] avec $f=\varphi$, $g=\psi=-h$ et $\mathcal{L}$ symétrique) : $(\varphi+\psi)^*\mathcal{L}^{\otimes-1}\otimes[\varphi^*\mathcal{L}\otimes\psi^*\mathcal{L}]^{\otimes2}\simeq$

$(\varphi - \psi)^*\mathcal{L}$ est engendré par ses sections globales. Dans le cas torique, en écrivant $\varphi + \psi = \mathrm{add} \circ (\varphi, \psi)$, il suffit de montrer que, sur une compactification convenable G de $A \times A$ au-dessus de $\bar{A} \times \bar{A}$ avec une extension $\overline{\mathrm{add}}\colon G \to A$ de $\mathrm{add}\colon A \times A \to A$, le faisceau $\overline{\mathrm{add}}^* \mathcal{L}^{\otimes -1} \otimes p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L}$ est engendré sur $A \times A$ par ses sections globales sur G. Par produit, il suffit même de faire ceci pour $A = \mathbb{G}_\mathrm{m}$, $\bar{A} = \mathbb{P}^1$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$. On choisit alors pour G l'adhérence dans $(\mathbb{P}^1)^3$ du graphe de $\mathrm{add}\colon \mathbb{G}_\mathrm{m}^2 \to \mathbb{G}_\mathrm{m}$. Le faisceau en question est la restriction à G de $\mathcal{O}(1, 1 - 1)$ et il possède une section globale σ qui l'engendre au-dessus de $\mathbb{G}_\mathrm{m}^2$: en coordonnées $((X_0 : X_1), (Y_0 : Y_1), (Z_0 : Z_1))$ de $(\mathbb{P}^1)^3$, le fermé G est défini par $X_0 Y_0 Z_1 = X_1 Y_1 Z_0$ et σ est obtenue en recollant $X_1 Y_1 / Z_1$ et $X_0 Y_0 / Z_0$. Pour une variante de cet argument voir [Mau3, lemmes 4.1 et 4.2]. $\square$

7 Développements récents

Nous mentionnons brièvement ici quelques progrès autour des conjectures étudiées ci-dessus qui sont intervenus depuis l'écriture de ce texte en 2011.

Dans la direction de la conjecture 3.4, Amoroso [Am] a montré que, pour le groupe Γ engendré par les nombres $2^{3^{-n}}$ $(n \geq 1)$ et leurs conjugués, un élément de $K_\Gamma^\times$ qui n'est pas dans Γ_{sat} est de hauteur au moins $\log(3/2)/18$. Il s'agit du cas de degré 1 de la conjecture (pour un groupe particulier). D'autre part, Pottmeyer (non publié) a démontré que si Γ est un sous-groupe saturé de rang fini de $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ alors $K_\Gamma^\times / \Gamma$ est un groupe abélien libre : ceci va aussi dans le sens de la conjecture puisque ce serait une conséquence d'une minoration de la hauteur sur $K_\Gamma^\times \setminus \Gamma$.

En ce qui concerne la conjecture de Zilber-Pink, un résultat d'Habegger et Pila [HP] permet de remplacer les arguments de minorations de hauteurs par des résultats de o-minimalité. Par conséquent les corollaires 4.2 et 4.3 deviennent inconditionnels : si $Z_{X,A} \neq X$ alors la conjecture de Zilber-Pink vaut pour X et pour tout groupe Γ de rang fini. En particulier, la conjecture 4.1 vaut pour les courbes $(\dim X = 1)$.

Références

[Am] F. Amoroso. On a conjecture of G. Rémond. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Série V* 15. 2016. p. 599–608.

[AD1] F. Amoroso et S. David. Le problème de Lehmer en dimension supérieure. *J. Reine Angew. Math.* 513. 1999. p. 145–179.

[AD2] F. Amoroso et S. David. Densité des points à coordonnées multiplicativement indépendantes. *Ramanujan J.* 5. 2001. p. 237–246.

[AD3] F. Amoroso et S. David. Minoration de la hauteur normalisée dans un tore. *J. Inst. Math. Jussieu* 2. 2003. p. 335–381.

[AD4] F. Amoroso et S. David. Distribution des points de petite hauteur dans les groupes multiplicatifs. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Série V* 3. 2004. p. 325–348.

[AV1] F. Amoroso et E. Viada. Small points on subvarieties of a torus. *Duke Math. J.* 150. 2009. p. 407–442.

[AV2] F. Amoroso et E. Viada. Small points on rational subvarieties of a torus. *Comment. Math. Helv.* 87. 2012. p. 355–383.

[AZ] F. Amoroso et U. Zannier. A relative Dobrowolski lower bound over abelian extensions. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Série IV* 29. 2000. p. 711–727.

[Be1] D. Bertrand. Minimal heights and polarizations on groupe varieties. *Duke Math. J.* 80. 1995. p. 223–250.

[Be2] D. Bertrand. Duality on tori and multiplicative dependence relations. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 62. 1997. p. 198–216.

[Be3] D. Bertrand. Special points and Poincaré bi-extensions, with an appendix by Bas Edixhoven. 2011. 13 pages. `arXiv:1104.5178`.

[Be4] D. Bertrand. Unlikely intersections in Poincaré biextensions over elliptic schemes. *Notre Dame J. Form. Log.* 54. 2013. p. 365–375.

[BHMZ] E. Bombieri, P. Habegger, D. Masser et U. Zannier. A note on Maurin's theorem. *Rendiconti Lincei Mat. Appl.* 21. 2010. p. 251–260.

[BMZ1] E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier. Intersecting a curve with algebraic subgroups of multiplicative groups. *Internat. Math. Res. Notices* 20. 1999. p. 1119–1140.

[BMZ2] E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier. Finiteness results for multiplicatively dependent points on complex curves. *Michigan Math. J.* 51. 2003. p. 451–466.

[BMZ3] E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier. Intersecting curves and algebraic subgroups : conjectures and more results. *Trans. Amer. Math. Soc.* 358. 2006. p. 2247–2257.

[BMZ4] E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier. Anomalous subvarieties — structure theorems and applications. *Internat. Math. Res. Notices* 19. 2007. p. 1–33.

[BMZ5] E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier. Intersecting a plane with algebraic subgroups of multiplicative groups. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Série V* 7. 2008. p. 51–80.

[BMZ6] E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier. On unlikely intersections of complex varieties with tori. *Acta Arith.* 133. 2008. p. 309–323.

[Ca1] M. Carrizosa. Problème de Lehmer relatif pour les variétés abéliennes CM. Thèse Université Paris VI. 2008.

[Ca2] M. Carrizosa. Problème de Lehmer et variétés abéliennes CM. *C. R. Acad. Sci.* 346. 2008. p. 1219–1224.

[Ca3] M. Carrizosa. Petits points et multiplication complexe. *Internat. Math. Res. Notices* 16. 2009. p. 3016–3097.

[C-L] A. Chambert-Loir. Relations de dépendance et intersections exceptionnelles. Séminaire Bourbaki. Janvier 2011. *Astrisque* 348. 2012. p. 149–188.

[Ch] M. Chardin. Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique. *Bull. Soc. Math. France* 117. 1989. p. 305–318.

[DH] S. David et M. Hindry. Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M. *J. Reine Angew. Math.* 529. 2000. p. 1–74.

[DP1] S. David et P. Philippon. Sous-variétés de torsion des variétés semi-abéliennes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 331. 2000. p. 587–592.

[DP2] S. David et P. Philippon. Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes. II. *Comment. Math. Helv.* 77. 2002. p. 639–700.

[dlMF] A. C. de la Maza et E. Friedman. Heights of algebraic numbers modulo multiplicative group actions. *J. Number Theory* 128. 2008. p. 2199–2213.

[Del] E. Delsinne. Le problème de Lehmer relatif en dimension supérieure. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 42. 2009. p. 981–1028.

[Do] E. Dobrowolski. On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial. *Acta Arith.* 34. 1979. p. 391–401.

[F1] G. Faltings. Diophantine approximation on abelian varieties. *Ann. of Math.* 133. 1991. p. 549–576.

[F2] G. Faltings. The general case of S. Lang's conjecture. Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (Abano Terme, 1991). *Perspect. Math.* 15. Academic Press. San Diego. 1994. p. 175–182.

[Ga] A. Galateau. Une minoration du minimum essentiel sur les variétés abéliennes. *Comment. Math. Helv.* 85. 2010. p. 775–812.

[Ha1] P. Habegger. A Bogomolov property for curves modulo algebraic subgroups. *Bull. Soc. Math. France* 137 2009. p. 93–125.

[Ha2] P. Habegger. On the bounded height conjecture. *Int. Math. Res. Not.* 2009. p. 860–886.

[Ha3] P. Habegger. Intersecting subvarieties of abelian varieties with algebraic subgroups of complementary dimension. *Invent. math.* 176. 2009. p. 405–447.

[HP] P. Habegger et J. Pila. O-minimality and certain atypical intersections. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (5)* à paraître.

[Hi] M. Hindry. Autour d'une conjecture de Serge Lang. *Invent. math.* 94. 1988. p. 575–603.

[JR] O. Jacquinot et K. Ribet. Deficient points on extensions of abelian varieties bt $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. *J. Number Th.* 25. 1987. p. 133–151.

[La1] M. Laurent. Minoration de la hauteur de Néron-Tate. Séminaire de théorie des nombres. Paris 1981–82. *Progr. Math.* 38. Birkhuser Boston, Boston, MA. 1983. p. 137–151.

[La2] M. Laurent. Équations diophantiennes exponentielles. *Invent. math.* 78. 1984. p. 299–327.

[Le] D. Lehmer. Factorisation of some cyclotomic functions, *Ann. Math.* 34. 1933. p. 461–479.

[LR] C. Liebendörfer et G. Rémond. Hauteurs de sous-espaces sur les corps non commutatifs. *Math. Z.* 255. 2007. p. 549–577.

[McQ] M. McQuillan. Division points on semi-abelian varieties. *Invent. math.* 120. 1995. p. 143–159.

[Mau1] G. Maurin. Courbes algébriques et équations multiplicatives. *Math. Ann.* 341. 2008. p. 789–824.

[Mau2] G. Maurin. Conjecture de Zilber-Pink pour les sous-variétés des tores. Thèse Université Grenoble I. 17 juin 2010.

[Mau3] G. Maurin. Équations multiplicatives sur les sous-variétés des tores. *Int. Math. Res. Not.* 2011. p. 1–108.

[Mu] D. Mumford. *Abelian varieties.* Oxford University Press, London. 1974.

[Pi] R. Pink. A Common Generalization of the Conjectures of André-Oort, Manin-Mumford, and Mordell-Lang. Prépublication 2005.

[Po] B. Poonen. Mordell-Lang plus Bogomolov. *Invent. math.* 137. 1999. p. 413–425.

[Ra1] N. Ratazzi. Théorème de Dobrowolski-Laurent pour les extensions abéliennes sur une courbe elliptique à multiplication complexe. *Int. Math. Res. Not.* 2004. 58. p. 3121–3152.

[Ra2] N. Ratazzi. Densité de points et minoration de hauteur. *J. Number Theory* 106. 2004. p. 112–127.

[Ray] M. Raynaud. Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion. Arithmetic and geometry, Vol. I. *Progr. Math.* 35. Birkhäuser. Boston. 1983. p. 327–352.

[R1] G. Rémond. Intersection de sous-groupes et de sous-variétés I. *Math. Ann.* 333. 2005. p. 525–548.

[R2] G. Rémond. Intersection de sous-groupes et de sous-variétés II. *J. Inst. Math. Jussieu* 6. 2007. p. 317–348.

[R3] G. Rémond. Intersection de sous-groupes et de sous-variétés III. *Comment. Math. Helv.* 84. 2009. p. 835–863.

[RV] G. Rémond et E. Viada. Problème de Mordell-Lang modulo certaines sous-variétés abéliennes. *Internat. Math. Res. Notices* 35. 2003. p. 1915–1931.

[Sm] C. Smyth. On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer. *Bull. London Math. Soc.* 3. 1971. p. 169–175.

[Vi1] E. Viada. A functorial lower bound for the essential minimum of varities in a power of an elliptic curve. arXiv:0908.3062

[Vi2] E. Viada. Lower bounds for the normalized height and non-dense subsets of varieties in an abelian variety. *Int. J. of Number Th.* 6. 2010. p. 1–29.

[Voj] P. Vojta. Integral points on subvarieties of semiabelian varieties, I. *Invent. math.* 126. 1996. p. 133–181.

[Vou] P. Voutier. An effective lower bound for the height of algebraic numbers. *Acta Arith.* 74. 1996. p. 81–95.

[Z] B. Zilber. Exponential sums equations and the Schanuel conjecture. *J. London Math. Soc.* 65. 2002. p. 27–44.

Gaël Rémond
Institut Fourier, UMR 5582
CS 40700
38058 Grenoble Cedex 9
France
`Gael.Remond@univ-grenoble-alpes.fr`