Ejemplos de sistemas dinámicos caóticos: el atractor de Lorenz y la dinámica de la herradura de Smale

Ana Rechtman
www-irma.u-strasbg.fr/∼rechtman/cv.html

3

Ejercicios

$$\begin{array}{rcl}\sigma : \Sigma_2 & \to & \Sigma_2 \\ \ldots v_{-2} v_{-1} . v_0 v_1 v_2 \ldots & \mapsto & \ldots v_{-2} v_{-1} v_0 . v_1 v_2 \ldots\end{array}$$

Ejercicios

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \Sigma_2 & \to & \Sigma_2 \\ \dots v_{-2} v_{-1} \,.\, v_0 v_1 v_2 \dots & \mapsto & \dots v_{-2} v_{-1} v_0 \,.\, v_1 v_2 \dots \end{array}$$

- Aún mejor, para toda $n \in \mathbb{N}$ demonstrar que existen 2^n puntos periódicos.

Ejercicios

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \Sigma_2 & \to & \Sigma_2 \\ \dots v_{-2} v_{-1} \,.\, v_0 v_1 v_2 \dots & \mapsto & \dots v_{-2} v_{-1} v_0 \,.\, v_1 v_2 \dots \end{array}$$

- Aún mejor, para toda $n \in \mathbb{N}$ demonstrar que existen 2^n puntos periódicos.
- Dependencia de condiciones iniciales:

Ejercicios

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \Sigma_2 & \to & \Sigma_2 \\ \dots v_{-2} v_{-1} \,.\, v_0 v_1 v_2 \dots & \mapsto & \dots v_{-2} v_{-1} v_0 \,.\, v_1 v_2 \dots \end{array}$$

- Aún mejor, para toda $n \in \mathbb{N}$ demonstrar que existen 2^n puntos periódicos.
- Dependencia de condiciones iniciales: demostrar que para toda $\epsilon > 0$ existen $\overline{v}, \overline{w} \in \Sigma_2$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) < \epsilon$ y $d_{\Sigma_2}(\sigma^n(\overline{v}), \sigma^n(\overline{w})) > 1$.

Ejercicios

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \Sigma_2 & \to & \Sigma_2 \\ \dots v_{-2} v_{-1} . v_0 v_1 v_2 \dots & \mapsto & \dots v_{-2} v_{-1} v_0 . v_1 v_2 \dots \end{array}$$

- Aún mejor, para toda $n \in \mathbb{N}$ demonstrar que existen 2^n puntos periódicos.
- Dependencia de condiciones iniciales: demostrar que para toda $\epsilon > 0$ existen $\overline{v}, \overline{w} \in \Sigma_2$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) < \epsilon$ y $d_{\Sigma_2}(\sigma^n(\overline{v}), \sigma^n(\overline{w})) > 1$.
- Demostrar que la dinámica es transitiva:

Ejercicios

$$\begin{aligned} \sigma : \Sigma_2 &\to \Sigma_2 \\ \dots v_{-2} v_{-1} \,.\, v_0 v_1 v_2 \dots &\mapsto \dots v_{-2} v_{-1} v_0 \,.\, v_1 v_2 \dots \end{aligned}$$

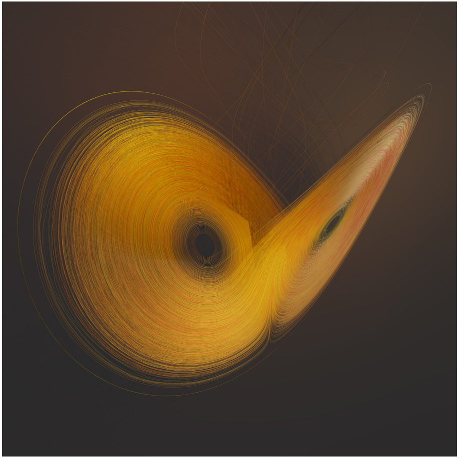
- Aún mejor, para toda $n \in \mathbb{N}$ demonstrar que existen 2^n puntos periódicos.
- Dependencia de condiciones iniciales: demostrar que para toda $\epsilon > 0$ existen $\overline{v}, \overline{w} \in \Sigma_2$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) < \epsilon$ y $d_{\Sigma_2}(\sigma^n(\overline{v}), \sigma^n(\overline{w})) > 1$.
- Demostrar que la dinámica es transitiva: existe un punto $\overline{v} \in \Sigma_2$ tal que para toda $\overline{w}$ y $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d_{\Sigma_2}(\sigma^n(\overline{v}), \overline{w}) < \epsilon$.

Regreso al atractor de Lorenz

- Encontrar una herradura en el atractor de Lorenz.

Regreso al atractor de Lorenz

- Encontrar una herradura en el atractor de Lorenz.
- Estudiar el patron de Williams y Guckenheimer, conocido como el modelo geométrico de las ecuaciones de Lorenz.



Recordatorio de la primera plática

$$
\begin{aligned}
x' &= \sigma(y - x) \\
y' &= rx - y - xz \\
z' &= xy - bz.
\end{aligned}
$$

con $\sigma, r, b > 0$

Recordatorio de la primera plática

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y - x) \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - bz. \end{aligned}$$

con $\sigma, r, b > 0$ ($\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$).

Recordatorio de la primera plática

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y-x) \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - bz. \end{aligned}$$

con $\sigma, r, b > 0$ ($\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$).

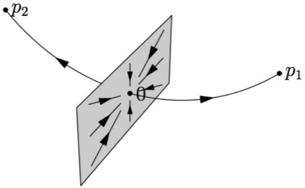
Para $0 < r \leq 1$, hay un sólo punto fijo que es el origen y todos sus valores propios son reales y negativos.

Recordatorio de la primera plática

Si $r > 1$, tenemos dos nuevos puntos fijos

$$\begin{aligned} p_1 &= (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \\ p_2 &= (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1). \end{aligned}$$

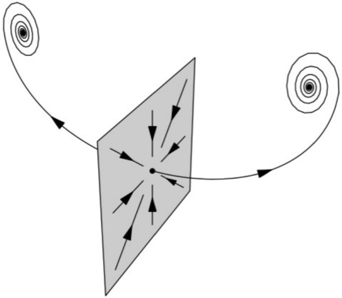
cuyos valores propios cambian pero su parte real es siempre negativa.



El origen es, para $r > 1$, un punto hiperbólico con dos dimensiones atractoras y una expulsora.

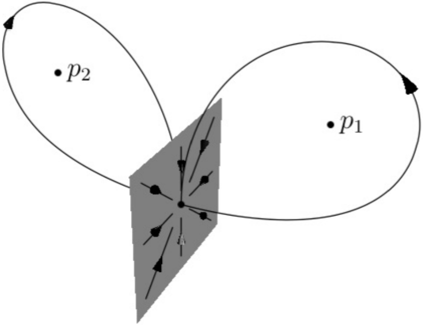
Recordatorio de la primera plática

Cuando r crece,



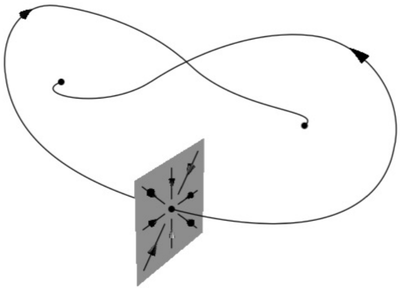
Recordatorio de la primera plática

Para $r = r_0 \sim 13{,}926$,



Recordatorio de la primera plática

Para $r > r_0 \sim 13{,}926$,

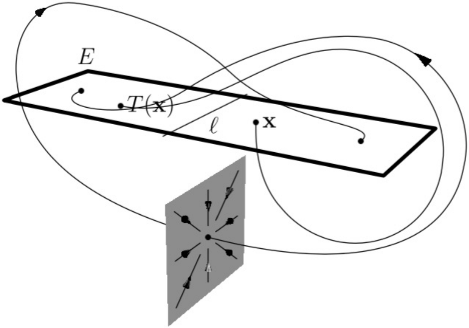


Buscando una herradura

Para $r > r_0 \sim 13{,}926$, buscamos una sección de Poincaré.

Buscando una herradura

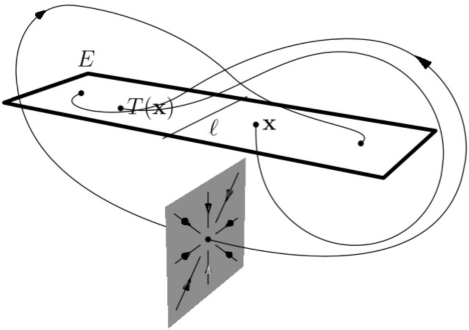
Para $r > r_0 \sim 13{,}926$, buscamos una sección de Poincaré.



Llamamos E al rectángulo.

Buscando una herradura

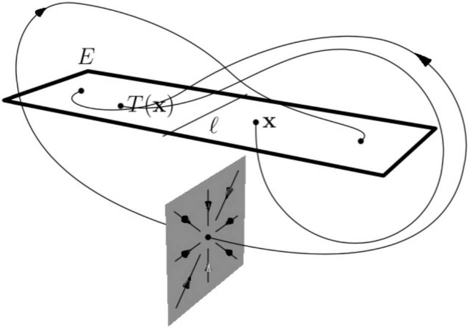
Para $r > r_0 \sim 13{,}926$, buscamos una sección de Poincaré.



Llamamos E al rectángulo. Para $x \in E$ definimos $T(x) \in E$ como el primer retorno

Buscando una herradura

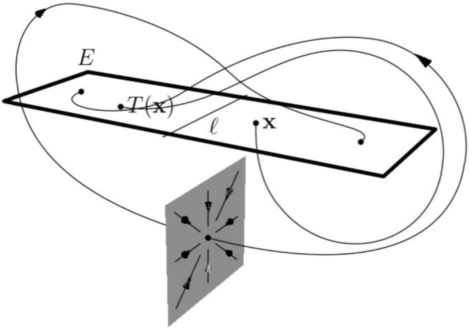
Para $r > r_0 \sim 13{,}926$, buscamos una sección de Poincaré.



Llamamos E al rectángulo. Para $x \in E$ definimos $T(x) \in E$ como el primer retorno (si existe).

Buscando una herradura

Para $r > r_0 \sim 13{,}926$, buscamos una sección de Poincaré.



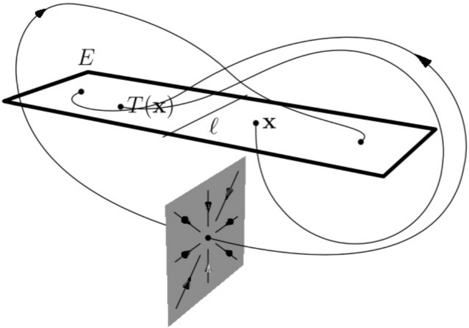
Llamamos E al rectángulo. Para $x \in E$ definimos $T(x) \in E$ como el primer retorno (si existe).

Observación o complicación

La variedad estable del origen intersecta a E en una curva ℓ.

Buscando una herradura

Para $r > r_0 \sim 13{,}926$, buscamos una sección de Poincaré.

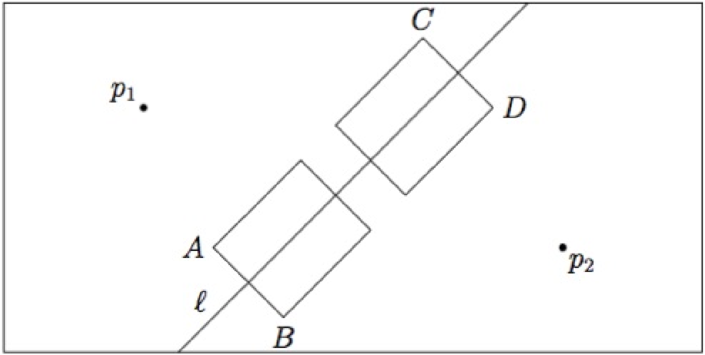


Llamamos E al rectángulo. Para $x \in E$ definimos $T(x) \in E$ como el primer retorno (si existe).

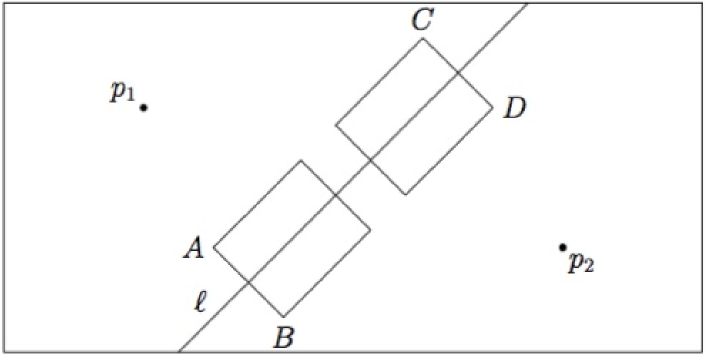
Observación o complicación

La variedad estable del origen intersecta a E en una curva ℓ. Si $x \in \ell$, la órbita no regresa a E.

Buscando una herradura

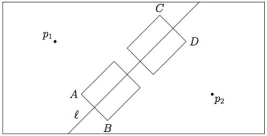


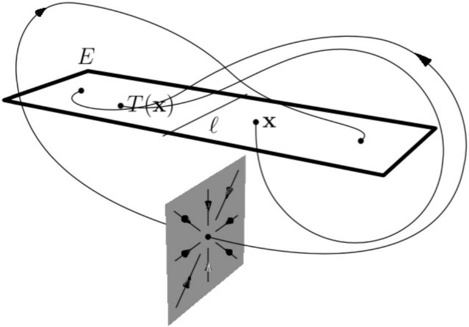
Buscando una herradura



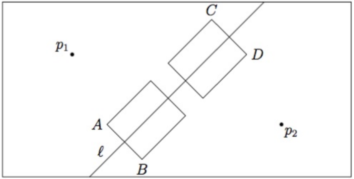
¿Cuál es la imagen de los rectángulos A, B, C y D?

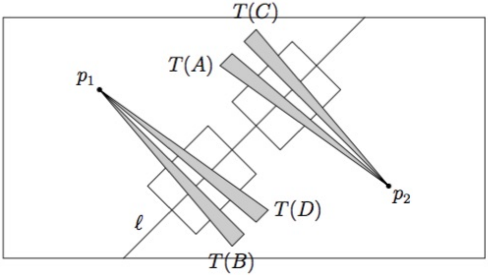
Buscando una herradura





Buscando una herradura



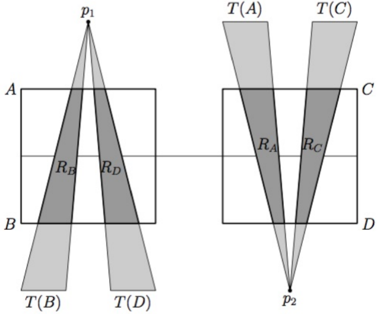


La “herradura” en el sistema de Lorenz

De manera más esquemática tenemos

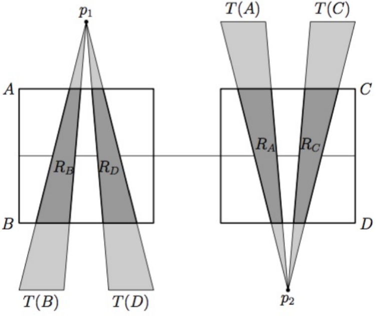
La “herradura” en el sistema de Lorenz

De manera más esquemática tenemos



La “herradura” en el sistema de Lorenz

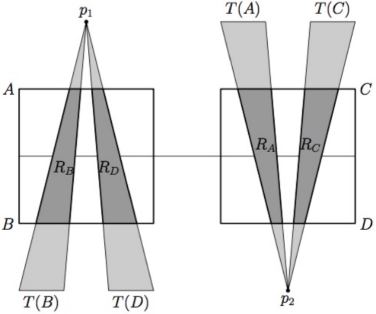
De manera más esquemática tenemos



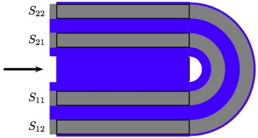
¿Por qué digo que esto es una herradura?

La “herradura” en el sistema de Lorenz

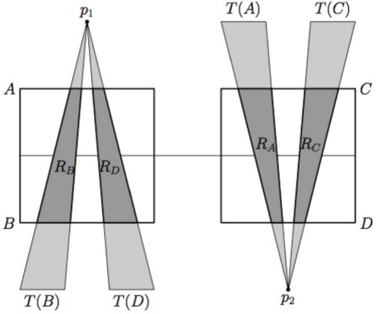
De manera más esquemática tenemos



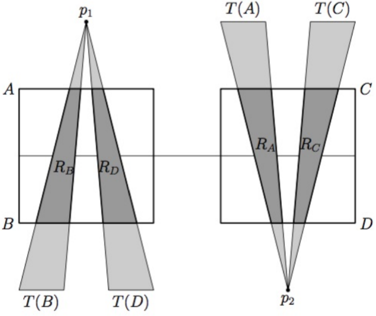
¿Por qué digo que esto es una herradura?



La “herradura” en el sistema de Lorenz

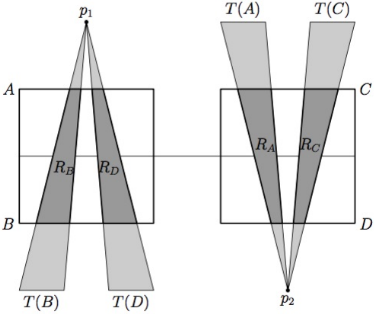


La “herradura” en el sistema de Lorenz



El conjunto invariante (maximal) de T es un conjunto hiperbólico.

La “herradura” en el sistema de Lorenz



El conjunto invariante (maximal) de T es un conjunto hiperbólico.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

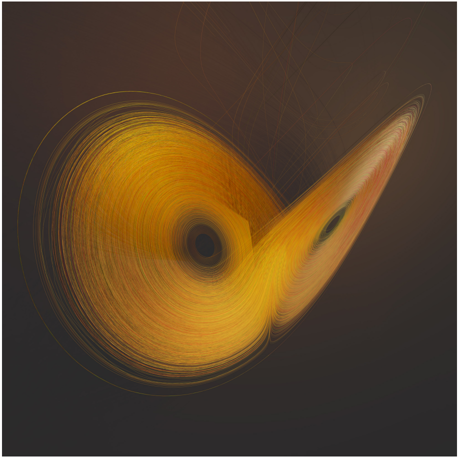
Dinámica simbólica asociada

Matriz de transición

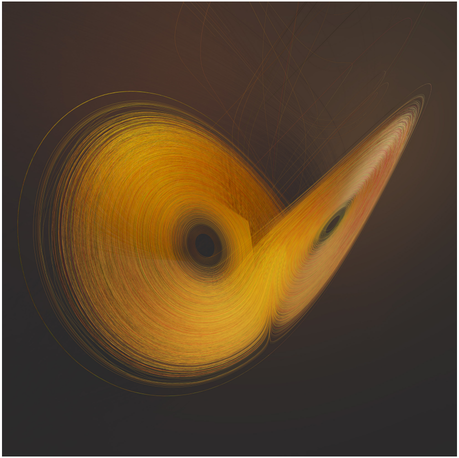
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

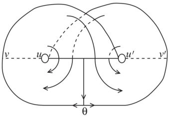
A define un subconjunto de Σ_4 de sucesiones admisibles que codifican la dinámica del conjunto invariante de T.

Otro manera de verlo: el patrón de Williams

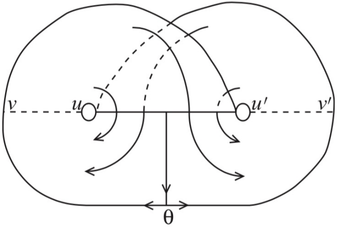


Otro manera de verlo: el patrón de Williams

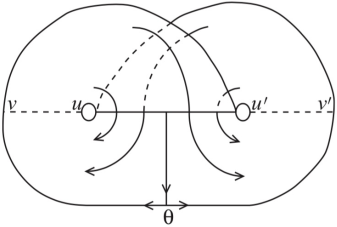


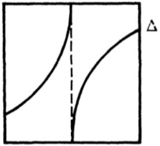


Otro manera de verlo: el patrón de Williams



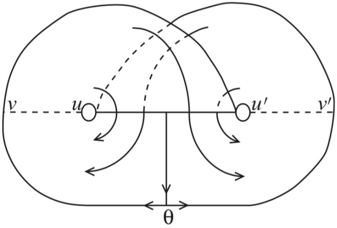
Otro manera de verlo: el patrón de Williams

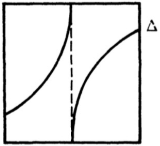




Graph of f
$f' > \sqrt{2}$

Otro manera de verlo: el patrón de Williams



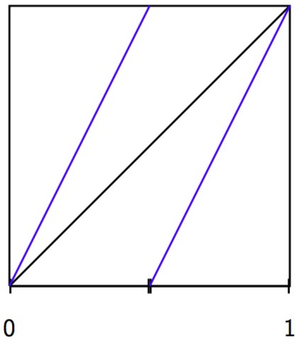


Graph of f
$f' > \sqrt{2}$

La dinámica de una aplicación así está conjugada a la dinámica de la aplicación $x \mapsto 2x \bmod(1)$.

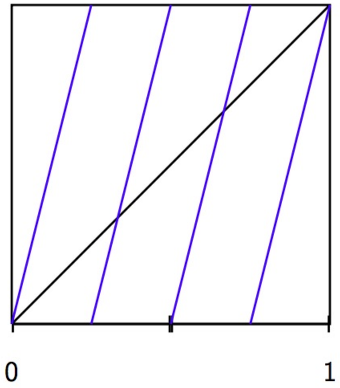
La aplicación $x \mapsto 2x\textbf{mod}(1)$

¿Cuál es la dinámica de las iteraciones positivas de $x \mapsto 2x\text{mod}(1)$?



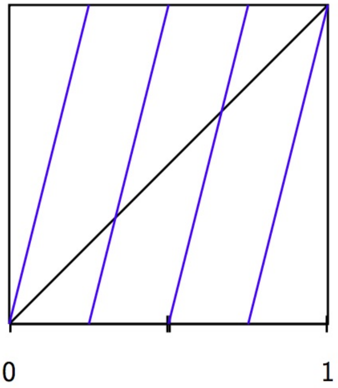
La aplicación $x \mapsto 2x\textbf{mod}(1)$

La segunda iteración



La aplicación $x \mapsto 2x\mathbf{mod}(1)$

La segunda iteración



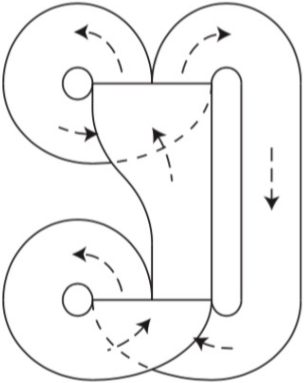
... y el desplazamiento

La aplicación $x \mapsto 2x\text{mod}(1)$ está conjugada al desplazamiento en Σ_2^+.

Nudos y flujos en dimensión 3

Teorema (Ghrist)

Existe un flujo en $\mathbb{S}^3$ tal que todo nudo aparece como órbita periódica.



¿Cómo se ve $\mathbb{S}^3$?

$\mathbb{S}^3$ y el mapeo de Hopf

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$

¿Cómo se ve $\mathbb{S}^3$?

$\mathbb{S}^3$ y el mapeo de Hopf

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{S}^3 & \rightarrow & \mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ (z_1, z_2) & \mapsto & \dfrac{z_1}{z_2} \end{array}$$

¿Cómo se ve $\mathbb{S}^3$?

$\mathbb{S}^3$ y el mapeo de Hopf

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{S}^3 & \to & \mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ (z_1, z_2) & \mapsto & \dfrac{z_1}{z_2} \end{array}$$

¿Qué son las fibras?

Fibración de Hopf

Estudiemos los siguientes conjuntos:

- Las fibras $h^{-1}(p)$ con $p \in \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, si
  1. $p = \infty$;

Fibración de Hopf

Estudiemos los siguientes conjuntos:

- Las fibras $h^{-1}(p)$ con $p \in \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, si
  1. $p = \infty$;
  2. $p = 0$;

Fibración de Hopf

Estudiemos los siguientes conjuntos:

- Las fibras $h^{-1}(p)$ con $p \in \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, si
  1. $p = \infty$;
  2. $p = 0$;
  3. $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq \mathbb{C}^*$.
- La imagen inversa del círculo $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid |p|^2 = 1\}$.

Flujo de Hopf

Tomamos un campo vectorial tangente a los círculos de Hopf y de norma 1,

Flujos en $\mathbb{S}^3$ y órbitas periódicas

Flujo de Hopf

Tomamos un campo vectorial tangente a los círculos de Hopf y de norma 1, en particular la caractéristica de Euler de $\mathbb{S}^3$ es cero,

Flujos en $\mathbb{S}^3$ y órbitas periódicas

Flujo de Hopf

Tomamos un campo vectorial tangente a los círculos de Hopf y de norma 1, en particular la caractéristica de Euler de $\mathbb{S}^3$ es cero, el flujo de dicho campo vectorial es

$$(z_1, z_2) \mapsto (e^{it} z_1, e^{it} z_2) = \phi_t(z_1, z_2).$$

Flujos en $\mathbb{S}^3$ y órbitas periódicas

Flujo de Hopf

Tomamos un campo vectorial tangente a los círculos de Hopf y de norma 1, en particular la caractéristica de Euler de $\mathbb{S}^3$ es cero, el flujo de dicho campo vectorial es

$$(z_1, z_2) \mapsto (e^{it} z_1, e^{it} z_2) = \phi_t(z_1, z_2).$$

Entonces, $\phi_{2\pi} = \phi_0 = Id$.

¿Cómo construir un flujo en $\mathbb{S}^3$ con sólo 2 órbitas periódicas?,

Flujos en $\mathbb{S}^3$ y órbitas periódicas

Flujo de Hopf

Tomamos un campo vectorial tangente a los círculos de Hopf y de norma 1, en particular la caractéristica de Euler de $\mathbb{S}^3$ es cero, el flujo de dicho campo vectorial es

$$(z_1, z_2) \mapsto (e^{it} z_1, e^{it} z_2) = \phi_t(z_1, z_2).$$

Entonces, $\phi_{2\pi} = \phi_0 = Id$.

¿Cómo construir un flujo en $\mathbb{S}^3$ con sólo 2 órbitas periódicas?, ¿1?

Teorema para mañana

Teorema (K. Kuperberg)

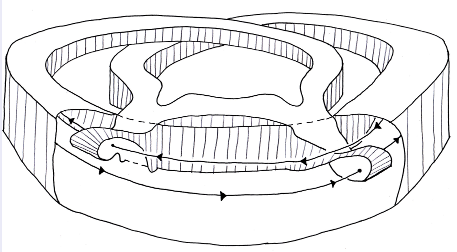
Sea M una variedad compacta y sin frontera de dimensión 3. Entonces M admite un campo vectorial sin singularidades y sin órbitas periódicas de clase C^∞.

Teorema para mañana

Teorema (K. Kuperberg)

Sea M una variedad compacta y sin frontera de dimensión 3. Entonces M admite un campo vectorial sin singularidades y sin órbitas periódicas de clase C^∞.

Demostración



Un poco de historia precedente al teorema de Kuperberg

Desde 1950

- Seifert pregunta si todo campo vectorial no singular en $\mathbb{S}^3$ tiene una órbita periódica.

Un poco de historia precedente al teorema de Kuperberg

Desde 1950

- Seifert pregunta si todo campo vectorial no singular en $\mathbb{S}^3$ tiene una órbita periódica.
- Wilson construye ejemplos con un número finito de órbitas periódicas, en cualquier variedad compacta y sin frontera.

Un poco de historia precedente al teorema de Kuperberg

Desde 1950

- Seifert pregunta si todo campo vectorial no singular en $\mathbb{S}^3$ tiene una órbita periódica.
- Wilson construye ejemplos con un número finito de órbitas periódicas, en cualquier variedad compacta y sin frontera.
- Schweitzer construye ejemplos sin órbitas periódicas de clase C^1, en cualquier variedad compacta y sin frontera.

Restricción a familias de campos de vectoriales

En dimensión 3, sabemos que algunas familias de campos vectoriales siempre tienen órbitas periódicas:

Restricción a familias de campos de vectoriales

En dimensión 3, sabemos que algunas familias de campos vectoriales siempre tienen órbitas periódicas:

- Los campos de Reeb de una estructura de contacto (Taubes).

Restricción a familias de campos de vectoriales

En dimensión 3, sabemos que algunas familias de campos vectoriales siempre tienen órbitas periódicas:

- Los campos de Reeb de una estructura de contacto (Taubes).
- Los campos geodesibles que preservan un volumen si la variedad no es un fibrado en toros sobre el círculo (Hutchings - Taubes, R.)

Restricción a familias de campos de vectoriales

En dimensión 3, sabemos que algunas familias de campos vectoriales siempre tienen órbitas periódicas:

- Los campos de Reeb de una estructura de contacto (Taubes).
- Los campos geodesibles que preservan un volumen si la variedad no es un fibrado en toros sobre el círculo (Hutchings - Taubes, R.)
- Los campos geodesibles de clase C^ω en $\mathbb{S}^3$ (R.)

Restricción a familias de campos de vectoriales

En dimensión 3, sabemos que algunas familias de campos vectoriales siempre tienen órbitas periódicas:

- Los campos de Reeb de una estructura de contacto (Taubes).
- Los campos geodesibles que preservan un volumen si la variedad no es un fibrado en toros sobre el círculo (Hutchings - Taubes, R.)
- Los campos geodesibles de clase C^ω en $\mathbb{S}^3$ (R.)
- Las soluciones de la ecuación autónoma de Euler de clase C^ω y cuando la variedad no es un fibrado en toros sobre el círculo (Etnyre - Ghrist).

Restricción a familias de campos de vectoriales

En dimensión 3, sabemos que algunas familias de campos vectoriales siempre tienen órbitas periódicas:

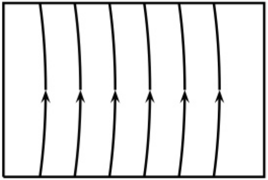
- Los campos de Reeb de una estructura de contacto (Taubes).
- Los campos geodesibles que preservan un volumen si la variedad no es un fibrado en toros sobre el círculo (Hutchings - Taubes, R.)
- Los campos geodesibles de clase C^ω en $\mathbb{S}^3$ (R.)
- Las soluciones de la ecuación autónoma de Euler de clase C^ω y cuando la variedad no es un fibrado en toros sobre el círculo (Etnyre - Ghrist).

Teorema (G. Kuperberg)

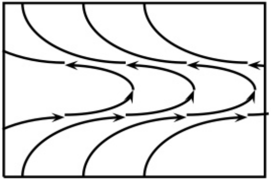
Toda variedad compacta y sin frontera de dimensión 3 admite un campo vectorial no singular y sin órbitas periódicas que preserva el volumen de clase C^1.

Construcción de K. Kuperberg - paso 1

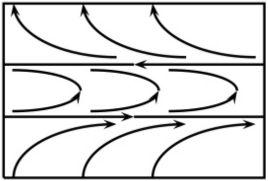
Los cilindros con coordenada r =constante son invariantes.



$r \approx 1, 3$

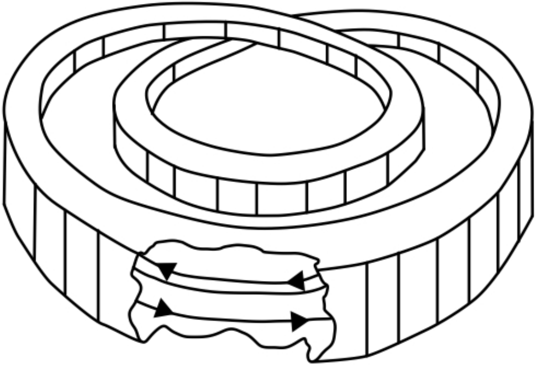


$r \approx 2$

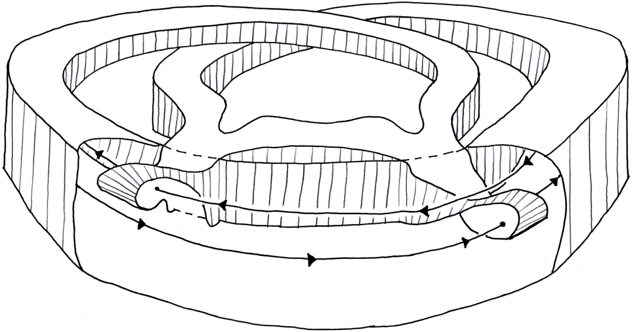


$r = 2$

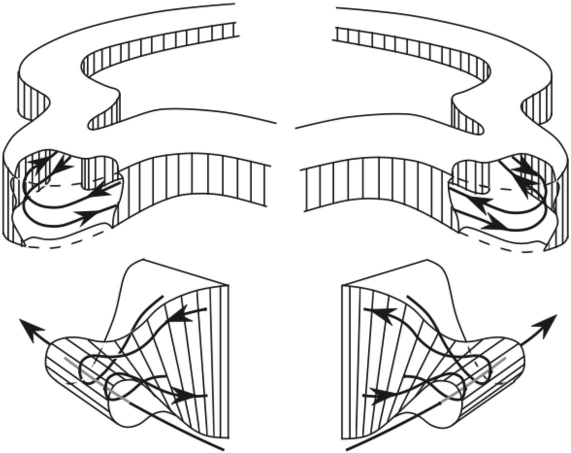
Construcción de K. Kuperberg - paso 2



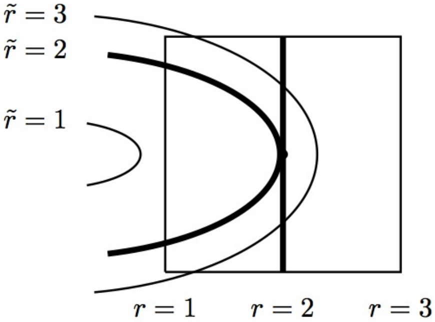
La trampa de K. Kuperberg



Autoinserciones



La desigualdad del radio



Salvo en los puntos especiales,

$$\tilde{r} > r.$$