Ejemplos de sistemas dinámicos caóticos: el atractor de Lorenz y la dinámica de la herradura de Smale

Ana Rechtman
www-irma.u-strasbg.fr/ rechtman/cv.html

2

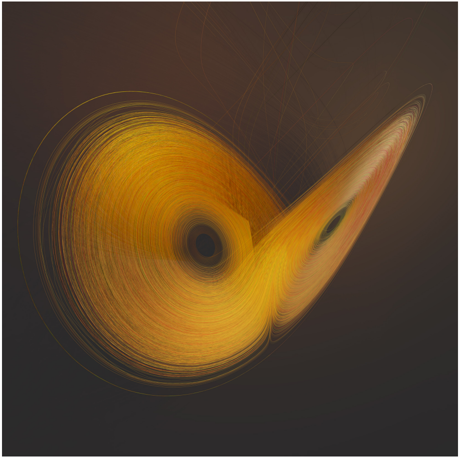
Recordatorios y plan

Recordatorios y plan

- Ecuación de Lorenz, describimos sus puntos fijos y una bifurcación en $r = 1$.

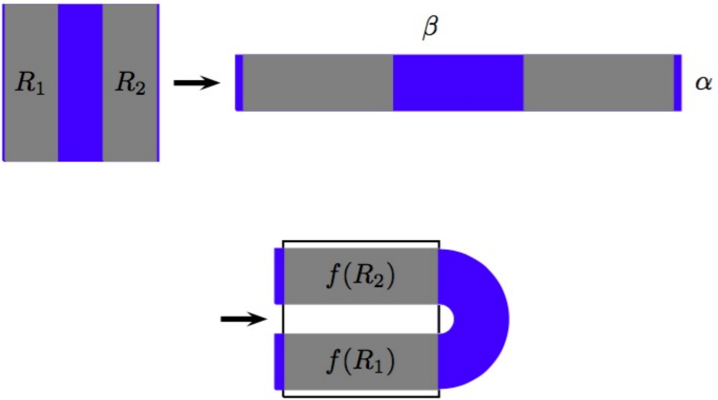
Recordatorios y plan

- Ecuación de Lorenz, describimos sus puntos fijos y una bifurcación en $r = 1$. Nos falta encontrar una herradura escondida en el atractor.



Recordatorios y plan

- Herradura de Smale.

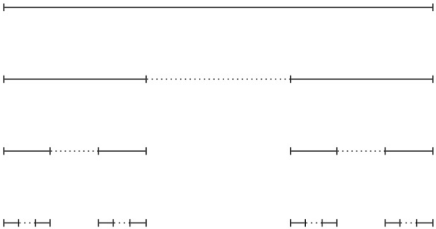


Conjunto de Cantor

¿Qué es un conjunto de Cantor?

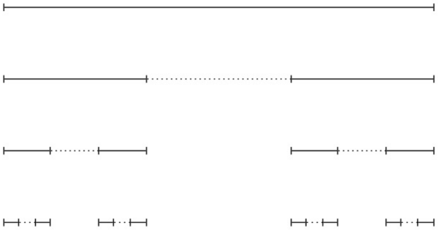
Conjunto de Cantor

¿Qué es un conjunto de Cantor?



Conjunto de Cantor

¿Qué es un conjunto de Cantor?



Definición

Un conjunto es un conjunto de Cantor si es un espacio métrico compacto totalmente disconexo y sin puntos aislados.

Herradura de Smale

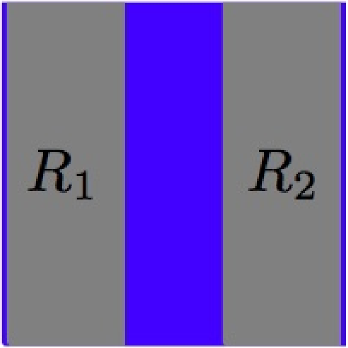
Describir el conjunto invariante de f,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{x \in C \mid f^n(x) \in C \ \forall n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \Gamma^+ \cap \Gamma^-. \end{aligned}$$

Herradura de Smale

Describir el conjunto invariante de f,

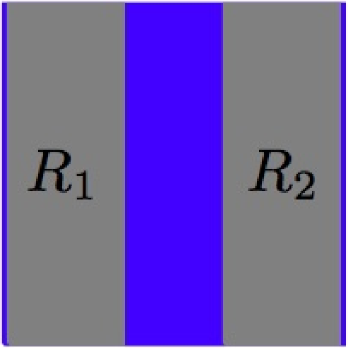
$$\begin{aligned}\Gamma &= \{x \in C \mid f^n(x) \in C \ \forall n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \Gamma^+ \cap \Gamma^-.\end{aligned}$$



Herradura de Smale

Describir el conjunto invariante de f,

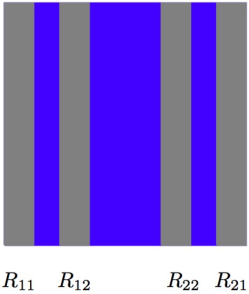
$$\begin{aligned} \Gamma &= \{x \in C \mid f^n(x) \in C \ \forall n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \Gamma^+ \cap \Gamma^-. \end{aligned}$$



Observemos que el ancho de R_i es β^{-1}.

Herradura de Smale

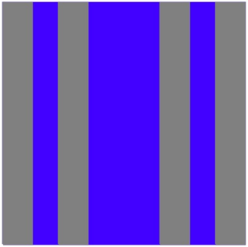
$$\Gamma \quad = \quad \Gamma^{+} \cap \Gamma^{-}.$$



Dominio de f^3

Herradura de Smale

$$\Gamma \;=\; \Gamma^{+} \cap \Gamma^{-}.$$



R_{11} R_{12} R_{22} R_{21}

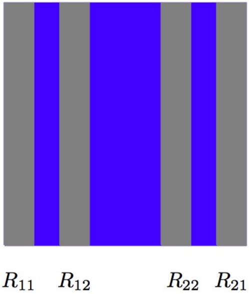
Dominio de f^3

Observaciones

1. $R_{v_0 v_1} \subset R_{v_0}$,

Herradura de Smale

$$\Gamma = \Gamma^+ \cap \Gamma^-.$$



Dominio de f^3

Observaciones

1. $R_{v_0 v_1} \subset R_{v_0}$,
2. $f(R_{v_0 v_1}) \subset R_{v_1}$.

Herradura de Smale

¿Cómo describir el dominio de f^4?

Herradura de Smale

¿Cómo describir el dominio de f^4? (sin dibujar)

Herradura de Smale

¿Cómo describir el dominio de f^4? (sin dibujar)

Dominio de f^4

Está formado por $2^{4-1} = 8$ rectángulos verticales $R_{v_0 v_1 v_2}$.

- $R_{v_0 v_1 v_2} \subset R_{v_0 v_1} \subset R_{v_0}$,
- $f(R_{v_0 v_1 v_2}) \subset R_{v_1 v_2}$ y $f^2(R_{v_0 v_1 v_2}) = R_{v_2}$.

Herradura de Smale

¿Cómo describir el dominio de f^4? (sin dibujar)

Dominio de f^4

Está formado por $2^{4-1} = 8$ rectángulos verticales $R_{v_0 v_1 v_2}$.

- $R_{v_0 v_1 v_2} \subset R_{v_0 v_1} \subset R_{v_0}$,
- $f(R_{v_0 v_1 v_2}) \subset R_{v_1 v_2}$ y $f^2(R_{v_0 v_1 v_2}) = R_{v_2}$.

También,

$$R_{v_0 v_1 v_2} = R_{v_0} \cap f^{-1}(R_{v_1}) \cap f^{-2}(R_{v_2}).$$

Herradura de Smale

¿Cómo describir el dominio de f^4? (sin dibujar)

Dominio de f^4

Está formado por $2^{4-1} = 8$ rectángulos verticales $R_{v_0 v_1 v_2}$.

- $R_{v_0 v_1 v_2} \subset R_{v_0 v_1} \subset R_{v_0}$,
- $f(R_{v_0 v_1 v_2}) \subset R_{v_1 v_2}$ y $f^2(R_{v_0 v_1 v_2}) = R_{v_2}$.

También,

$$R_{v_0 v_1 v_2} = R_{v_0} \cap f^{-1}(R_{v_1}) \cap f^{-2}(R_{v_2}).$$

En general,

$$R_{v_0 \ldots v_n} = R_{v_0} \cap f^{-1}(R_{v_1}) \cap \cdots \cap f^{-n}(R_{v_n}),$$

Herradura de Smale

¿Cómo describir el dominio de f^4? (sin dibujar)

Dominio de f^4

Está formado por $2^{4-1} = 8$ rectángulos verticales $R_{v_0 v_1 v_2}$.

- $R_{v_0 v_1 v_2} \subset R_{v_0 v_1} \subset R_{v_0}$,
- $f(R_{v_0 v_1 v_2}) \subset R_{v_1 v_2}$ y $f^2(R_{v_0 v_1 v_2}) = R_{v_2}$.

También,

$$R_{v_0 v_1 v_2} = R_{v_0} \cap f^{-1}(R_{v_1}) \cap f^{-2}(R_{v_2}).$$

En general,

$$R_{v_0 \dots v_n} = R_{v_0} \cap f^{-1}(R_{v_1}) \cap \cdots \cap f^{-n}(R_{v_n}),$$

define un rectángulo vertical cuyo ancho es $\beta^{-(n+1)}$.

Herradura de Smale

¿Cómo describir el dominio de f^4? (sin dibujar)

Dominio de f^4

Está formado por $2^{4-1} = 8$ rectángulos verticales $R_{v_0 v_1 v_2}$.

- $R_{v_0 v_1 v_2} \subset R_{v_0 v_1} \subset R_{v_0}$,
- $f(R_{v_0 v_1 v_2}) \subset R_{v_1 v_2}$ y $f^2(R_{v_0 v_1 v_2}) = R_{v_2}$.

También,

$$R_{v_0 v_1 v_2} = R_{v_0} \cap f^{-1}(R_{v_1}) \cap f^{-2}(R_{v_2}).$$

En general,

$$R_{v_0 \dots v_n} = R_{v_0} \cap f^{-1}(R_{v_1}) \cap \cdots \cap f^{-n}(R_{v_n}),$$

define un rectángulo vertical cuyo ancho es $\beta^{-(n+1)}$.

$$\Gamma^+ = C_1 \times [0,1],$$

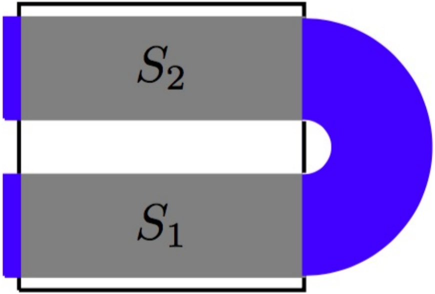
con C_1 un conjunto de Cantor.

Herradura de Smale: conjunto invariante

f^{-1} está definida en $f(R_1) \cup f(R_2) = f(C) \cap C$,

Herradura de Smale: conjunto invariante

f^{-1} está definida en $f(R_1) \cup f(R_2) = f(C) \cap C$,



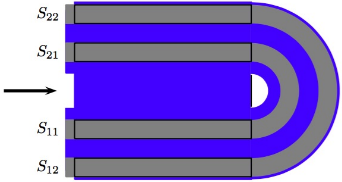
con $S_{w_1} = f(R_{w_1})$.

Herradura de Smale: conjunto invariante

f^{-2} está definida en
$f(f(C) \cap C) \cap C = f(S_1 \cap S_2) \cap C = S_{11} \cap S_{12} \cap S_{22} \cap S_{21}$.

Herradura de Smale: conjunto invariante

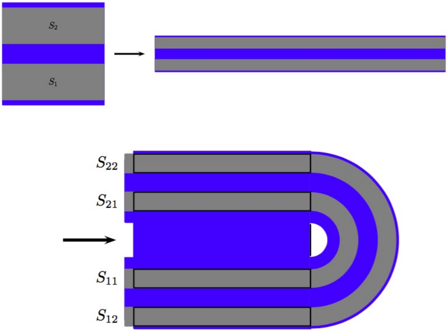
f^{-2} está definida en
$f(f(C) \cap C) \cap C = f(S_1 \cap S_2) \cap C = S_{11} \cap S_{12} \cap S_{22} \cap S_{21}$.



Observemos que $S_{w_1 w_2} \subset S_{w_1}$ y $f^{-1}(S_{w_1 w_2}) = S_{w_2}$.

Herradura de Smale: conjunto invariante

f^{-2} está definida en
$f(f(C) \cap C) \cap C = f(S_1 \cap S_2) \cap C = S_{11} \cap S_{12} \cap S_{22} \cap S_{21}$.



Observemos que $S_{w_1 w_2} \subset S_{w_1}$ y $f^{-1}(S_{w_1 w_2}) = S_{w_2}$.

$$S_{w_1 w_2} = S_{w_1} \cap f(S_{w_2}),$$

es un rectángulo horizontal cuya altura mide α^2.

Herradura de Smale: conjunto invariante

En general,

$$S_{w_1 \dots w_n} = S_{w_1} \cap f(S_{w_2}) \cap \cdots \cap f^{n-1}(S_{w_n})$$

es un rectángulo horizontal cuya altura mide α^n.

Herradura de Smale: conjunto invariante

En general,

$$S_{w_1\dots w_n} = S_{w_1} \cap f(S_{w_2}) \cap \cdots \cap f^{n-1}(S_{w_n})$$

es un rectángulo horizontal cuya altura mide α^n.

$$\Gamma^- = [0,1] \times C_2,$$

con C_2 un conjunto de Cantor.

Herradura de Smale: conjunto invariante

En general,

$$S_{w_1 \dots w_n} = S_{w_1} \cap f(S_{w_2}) \cap \cdots \cap f^{n-1}(S_{w_n})$$

es un rectángulo horizontal cuya altura mide α^n.

$$\Gamma^- = [0,1] \times C_2,$$

con C_2 un conjunto de Cantor.

Conjunto invariante

$\Gamma = \Gamma^+ \cap \Gamma^-$

Herradura de Smale: conjunto invariante

En general,

$$S_{w_1 \dots w_n} = S_{w_1} \cap f(S_{w_2}) \cap \cdots \cap f^{n-1}(S_{w_n})$$

es un rectángulo horizontal cuya altura mide α^n.

$$\Gamma^- = [0, 1] \times C_2,$$

con C_2 un conjunto de Cantor.

Conjunto invariante

$\Gamma = \Gamma^+ \cap \Gamma^-$ es un conjunto de Cantor.

Dinámica simbólica

Sea $\Sigma_2 = \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ el conjunto de las sucesiones bi-infinitas de 1 y 2.

Dinámica simbólica

Sea $\Sigma_2 = \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ el conjunto de las sucesiones bi-infinitas de 1 y 2.

$$\begin{aligned} \overline{v} &\in \Sigma_2 \\ \overline{v} &= \dots v_{-2} v_{-1} \, . \, v_0 v_1 v_2 \dots \\ v_i &\in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Dinámica simbólica

Sea $\Sigma_2 = \{1,2\}^{\mathbb{Z}}$ el conjunto de las sucesiones bi-infinitas de 1 y 2.

$$
\begin{aligned}
\overline{v} &\in \Sigma_2 \\
\overline{v} &= \dots v_{-2} v_{-1} \,.\, v_0 v_1 v_2 \dots \\
v_i &\in \{1,2\}.
\end{aligned}
$$

Distancia en Σ_2

Si $\overline{v}, \overline{w} \in \Sigma_2$ entonces

$$d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) = \sum_i \frac{|v_i - w_i|}{2^{|i|}}.$$

Dinámica simbólica

Sea $\Sigma_2 = \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ el conjunto de las sucesiones bi-infinitas de 1 y 2.

$$\begin{array}{rcl} \overline{v} & \in & \Sigma_2 \\ \overline{v} & = & \ldots v_{-2} v_{-1} . v_0 v_1 v_2 \ldots \\ v_i & \in & \{1, 2\}. \end{array}$$

Distancia en Σ_2

Si $\overline{v}, \overline{w} \in \Sigma_2$ entonces

$$d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) = \sum_i \frac{|v_i - w_i|}{2^{|i|}}.$$

Dado $\epsilon > 0$ y $\overline{v} \in \Sigma_2$, ¿cuáles son los elementos de $\overline{w} \in \Sigma_2$ tales que $d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) < \epsilon$?

La dinámica en Σ_2

Desplazamiento (shift)

$$\begin{aligned} \sigma : \Sigma_2 &\rightarrow \Sigma_2 \\ \ldots v_{-2} v_{-1} \,.\, v_0 v_1 v_2 \ldots &\mapsto \ldots v_{-2} v_{-1} v_0 \,.\, v_1 v_2 \ldots \end{aligned}$$

La dinámica en Σ_2

Desplazamiento (shift)

$$\begin{aligned} \sigma : \Sigma_2 &\to \Sigma_2 \\ \ldots v_{-2} v_{-1} . v_0 v_1 v_2 \ldots &\mapsto \ldots v_{-2} v_{-1} v_0 . v_1 v_2 \ldots \end{aligned}$$

¿Cuál es la dinámica de σ?

σ y f

Teorema

Existe un homeomorfismo $h : \Sigma_2 \to \Gamma$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2 \\ h\big\downarrow & & h\big\downarrow \\ \Gamma & \xrightarrow{f} & \Gamma \end{array}$$

σ y f

Teorema

Existe un homeomorfismo $h : \Sigma_2 \to \Gamma$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2 \\ h\downarrow & & h\downarrow \\ \Gamma & \xrightarrow{f} & \Gamma \end{array}$$

$$R_{v_0 \dots v_n} = R_{v_0} \cap f^{-1}(R_{v_1}) \cap \cdots \cap f^{-n}(R_{v_n}),$$

$$S_{w_1 \dots w_n} = S_{w_1} \cap f(S_{w_2}) \cap \cdots \cap f^{n-1}(S_{w_n}).$$

σ y f

Teorema

Existe un homeomorfismo $h : \Sigma_2 \to \Gamma$ *tal que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2 \\ h\downarrow & & h\downarrow \\ \Gamma & \xrightarrow{f} & \Gamma \end{array}$$

σ y f

Teorema

Existe un homeomorfismo $h : \Sigma_2 \to \Gamma$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2 \\ h\big\downarrow & & h\big\downarrow \\ \Gamma & \xrightarrow{f} & \Gamma \end{array}$$

Decimos que f y σ están topológicamente conjugados.

Observación

h es continua, lo que implica $x, y \in \Gamma$ son cercanos, entonces $h^{-1}(x), h^{-1}(y) \in \Sigma_2$ son cercanos.

Preguntas sobre la dinámica de σ

... o de f.

Preguntas sobre la dinámica de σ

... o de f.

1. Encontrar dos puntos $x, y \in \Gamma$ tales que $f(x) = x$ y $f(y) = y$.

Preguntas sobre la dinámica de σ

... o de f.

1. Encontrar dos puntos $x, y \in \Gamma$ tales que $f(x) = x$ y $f(y) = y$.
2. Dado $n \in \mathbb{N}$ encontrar una órbita periódica de longitud n.

Preguntas sobre la dinámica de σ

... o de f.

1. Encontrar dos puntos $x, y \in \Gamma$ tales que $f(x) = x$ y $f(y) = y$.
2. Dado $n \in \mathbb{N}$ encontrar una órbita periódica de longitud n.
3. Aún mejor, para toda $n \in \mathbb{N}$ demonstrar que existen 2^n órbitas periódicas.

Preguntas sobre la dinámica de σ

... o de f.

1. Encontrar dos puntos $x, y \in \Gamma$ tales que $f(x) = x$ y $f(y) = y$.
2. Dado $n \in \mathbb{N}$ encontrar una órbita periódica de longitud n.
3. Aún mejor, para toda $n \in \mathbb{N}$ demonstrar que existen 2^n órbitas periódicas.
4. Demostrar que las órbitas periódicas son densas:

Preguntas sobre la dinámica de σ

... o de f.

1. Encontrar dos puntos $x, y \in \Gamma$ tales que $f(x) = x$ y $f(y) = y$.
2. Dado $n \in \mathbb{N}$ encontrar una órbita periódica de longitud n.
3. Aún mejor, para toda $n \in \mathbb{N}$ demonstrar que existen 2^n órbitas periódicas.
4. Demostrar que las órbitas periódicas son densas: para toda $\epsilon > 0$ y $\overline{v} \in \Sigma_2$ existe un punto $\overline{w}$ en una órbita periódica tal que $d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) < \epsilon$.

Preguntas sobre la dinámica de σ

... o de f.

1. Encontrar dos puntos $x, y \in \Gamma$ tales que $f(x) = x$ y $f(y) = y$.
2. Dado $n \in \mathbb{N}$ encontrar una órbita periódica de longitud n.
3. Aún mejor, para toda $n \in \mathbb{N}$ demonstrar que existen 2^n órbitas periódicas.
4. Demostrar que las órbitas periódicas son densas: para toda $\epsilon > 0$ y $\overline{v} \in \Sigma_2$ existe un punto $\overline{w}$ en una órbita periódica tal que $d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) < \epsilon$.
5. Dependencia de condiciones iniciales:

Preguntas sobre la dinámica de σ

... o de f.

1. Encontrar dos puntos $x, y \in \Gamma$ tales que $f(x) = x$ y $f(y) = y$.
2. Dado $n \in \mathbb{N}$ encontrar una órbita periódica de longitud n.
3. Aún mejor, para toda $n \in \mathbb{N}$ demonstrar que existen 2^n órbitas periódicas.
4. Demostrar que las órbitas periódicas son densas: para toda $\epsilon > 0$ y $\overline{v} \in \Sigma_2$ existe un punto $\overline{w}$ en una órbita periódica tal que $d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) < \epsilon$.
5. Dependencia de condiciones iniciales: demostrar que para toda $\epsilon > 0$ existen $\overline{v}, \overline{w} \in \Sigma_2$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) < \epsilon$ y $d_{\Sigma_2}(\sigma^n(\overline{v}), \sigma^n(\overline{w})) > 1$.

Preguntas sobre la dinámica de σ

... o de f.

1. Encontrar dos puntos $x, y \in \Gamma$ tales que $f(x) = x$ y $f(y) = y$.
2. Dado $n \in \mathbb{N}$ encontrar una órbita periódica de longitud n.
3. Aún mejor, para toda $n \in \mathbb{N}$ demonstrar que existen 2^n órbitas periódicas.
4. Demostrar que las órbitas periódicas son densas: para toda $\epsilon > 0$ y $\overline{v} \in \Sigma_2$ existe un punto $\overline{w}$ en una órbita periódica tal que $d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) < \epsilon$.
5. Dependencia de condiciones iniciales: demostrar que para toda $\epsilon > 0$ existen $\overline{v}, \overline{w} \in \Sigma_2$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) < \epsilon$ y $d_{\Sigma_2}(\sigma^n(\overline{v}), \sigma^n(\overline{w})) > 1$.
6. Demostrar que la dinámica es transitiva:

Preguntas sobre la dinámica de σ

... o de f.

1. Encontrar dos puntos $x, y \in \Gamma$ tales que $f(x) = x$ y $f(y) = y$.
2. Dado $n \in \mathbb{N}$ encontrar una órbita periódica de longitud n.
3. Aún mejor, para toda $n \in \mathbb{N}$ demonstrar que existen 2^n órbitas periódicas.
4. Demostrar que las órbitas periódicas son densas: para toda $\epsilon > 0$ y $\overline{v} \in \Sigma_2$ existe un punto $\overline{w}$ en una órbita periódica tal que $d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) < \epsilon$.
5. Dependencia de condiciones iniciales: demostrar que para toda $\epsilon > 0$ existen $\overline{v}, \overline{w} \in \Sigma_2$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) < \epsilon$ y $d_{\Sigma_2}(\sigma^n(\overline{v}), \sigma^n(\overline{w})) > 1$.
6. Demostrar que la dinámica es transitiva: existe un punto $\overline{v} \in \Sigma_2$ tal que para toda $\overline{w}$ y $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d_{\Sigma_2}(\sigma^n(\overline{v}), \overline{w}) < \epsilon$.

Preguntas sobre la dinámica de σ

... o de f.

1. Encontrar dos puntos $x, y \in \Gamma$ tales que $f(x) = x$ y $f(y) = y$.
2. Dado $n \in \mathbb{N}$ encontrar una órbita periódica de longitud n.
3. Aún mejor, para toda $n \in \mathbb{N}$ demonstrar que existen 2^n órbitas periódicas.
4. Demostrar que las órbitas periódicas son densas: para toda $\epsilon > 0$ y $\overline{v} \in \Sigma_2$ existe un punto $\overline{w}$ en una órbita periódica tal que $d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) < \epsilon$.
5. Dependencia de condiciones iniciales: demostrar que para toda $\epsilon > 0$ existen $\overline{v}, \overline{w} \in \Sigma_2$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) < \epsilon$ y $d_{\Sigma_2}(\sigma^n(\overline{v}), \sigma^n(\overline{w})) > 1$.
6. Demostrar que la dinámica es transitiva: existe un punto $\overline{v} \in \Sigma_2$ tal que para toda $\overline{w}$ y $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d_{\Sigma_2}(\sigma^n(\overline{v}), \overline{w}) < \epsilon$.
7. Mezclante:

Preguntas sobre la dinámica de σ

... o de f.

1. Encontrar dos puntos $x, y \in \Gamma$ tales que $f(x) = x$ y $f(y) = y$.
2. Dado $n \in \mathbb{N}$ encontrar una órbita periódica de longitud n.
3. Aún mejor, para toda $n \in \mathbb{N}$ demonstrar que existen 2^n órbitas periódicas.
4. Demostrar que las órbitas periódicas son densas: para toda $\epsilon > 0$ y $\overline{v} \in \Sigma_2$ existe un punto $\overline{w}$ en una órbita periódica tal que $d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) < \epsilon$.
5. Dependencia de condiciones iniciales: demostrar que para toda $\epsilon > 0$ existen $\overline{v}, \overline{w} \in \Sigma_2$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d_{\Sigma_2}(\overline{v}, \overline{w}) < \epsilon$ y $d_{\Sigma_2}(\sigma^n(\overline{v}), \sigma^n(\overline{w})) > 1$.
6. Demostrar que la dinámica es transitiva: existe un punto $\overline{v} \in \Sigma_2$ tal que para toda $\overline{w}$ y $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d_{\Sigma_2}(\overline{\sigma^n(v)}, \overline{w}) < \epsilon$.
7. Mezclante: dados dos abiertos $U, V \in C$ que intersectan a Γ, existe $n > 0$ tal que $f^n(U \cap \Gamma) \cap V \neq \emptyset$.

Puntos fijos de la herradura y dinámica hiperbólica

En Σ_2 hay dos puntos fijos de σ:

$$\overline{v}_1 = \ldots 11\,.\,111\ldots \qquad \text{y} \qquad \overline{v}_2 = \ldots 22\,.\,222\ldots.$$

Puntos fijos de la herradura y dinámica hiperbólica

En Σ_2 hay dos puntos fijos de σ:

$$\overline{v}_1 = \ldots 11\,.\,111\ldots \qquad \text{y} \qquad \overline{v}_2 = \ldots 22\,.\,222\ldots.$$

Entonces, $x_1 = h(\overline{v}_1)$ y $x_2 = h(\overline{v}_2)$ son puntos fijos de f.

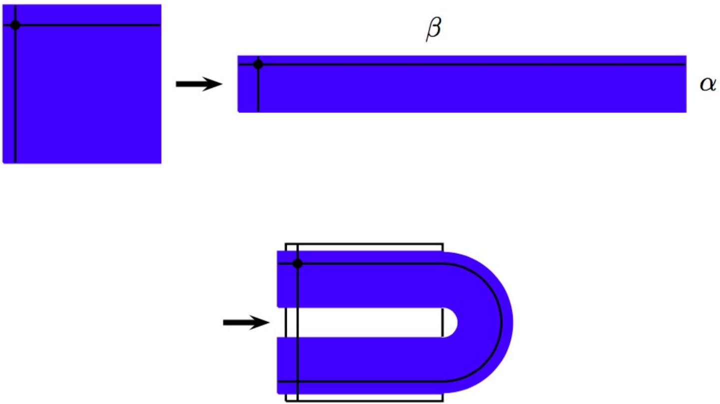
$$x_1 \in R_{11} \cap S_{11} \qquad \text{y} \qquad y \in R_{22} \cap S_{22}.$$

Puntos fijos de la herradura y dinámica hiperbólica

Fijémonos en $x_1 = h(\overline{v}_1)$, la línea vertical que pasa por x_1 es $R_{111\ldots}$.

Puntos fijos de la herradura y dinámica hiperbólica

Fijémonos en $x_1 = h(\overline{v}_1)$, la línea vertical que pasa por x_1 es $R_{111\dots}$. Para $y \in R_{111\dots}$, $f^n(y)$ está bien definido y está en $R_{111\dots}$.



¿Qué pasa con $d_{\mathbb{R}^2}(x_1, f^n(y))$?

Órbita homoclínica

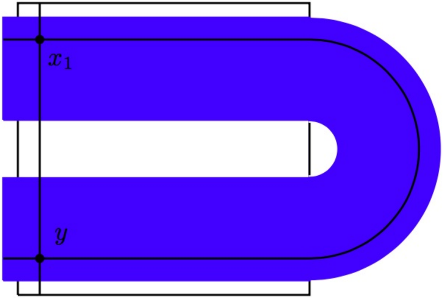
Como $\forall y \in R_{111\ldots} \Rightarrow d_{\mathbb{R}^2}(x_1, f^n(y)) \to 0$, decimos que $R_{111\ldots}$ es la variedad estable de x_1.

Órbita homoclínica

Como $\forall y \in R_{111\ldots} \Rightarrow d_{\mathbb{R}^2}(x_1, f^n(y)) \to 0$, decimos que $R_{111\ldots}$ es la variedad estable de x_1.

De la misma forma, $S_{111\ldots}$ es la variedad inestable de x_1.

x_1 es un punto fijo hiperbólico.

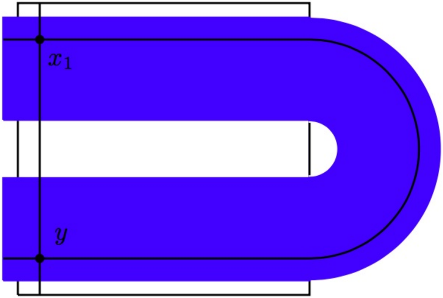


Órbita homoclínica

Como $\forall y \in R_{111\ldots} \Rightarrow d_{\mathbb{R}^2}(x_1, f^n(y)) \to 0$, decimos que $R_{111\ldots}$ es la variedad estable de x_1.

De la misma forma, $S_{111\ldots}$ es la variedad inestable de x_1.

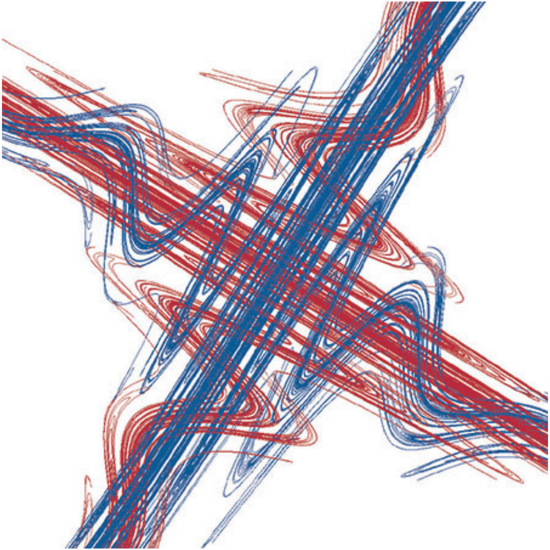
x_1 es un punto fijo hiperbólico.



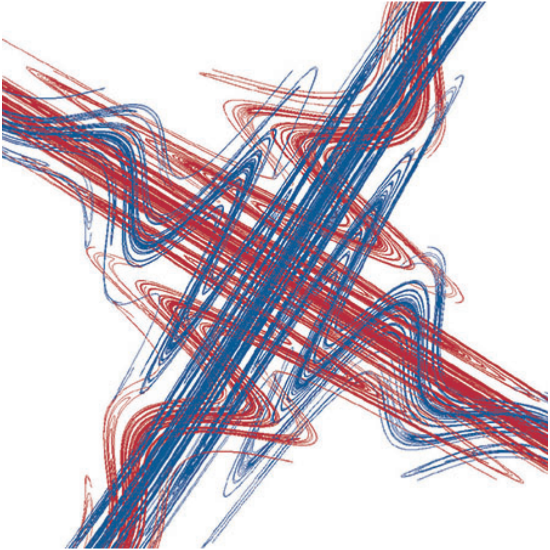
y es un punto de intersección de las variedades estables e inestables de x_1.

Homoclinic tangle

Homoclinic tangle



Homoclinic tangle



Inicialmente descrito por Poincaré.

Dinámica hiperbólica

Definición

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to f(U)$ de clase C^2 un difeomorfismo y Λ un conjunto cerrado invariante.

Dinámica hiperbólica

Definición

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to f(U)$ de clase C^2 un difeomorfismo y Λ un conjunto cerrado invariante. Decimos que Λ es hiperbólico si para toda $x \in \Lambda$

$$\mathbb{R}^n = W^s(x) \oplus W^u(x)$$

Dinámica hiperbólica

Definición

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to f(U)$ de clase C^2 un difeomorfismo y Λ un conjunto cerrado invariante. Decimos que Λ es hiperbólico si para toda $x \in \Lambda$

$$\mathbb{R}^n = W^s(x) \oplus W^u(x)$$

tal que

- *contracción y expansión uniforme,*

Dinámica hiperbólica

Definición

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to f(U)$ de clase C^2 un difeomorfismo y Λ un conjunto cerrado invariante. Decimos que Λ es hiperbólico si para toda $x \in \Lambda$

$$\mathbb{R}^n = W^s(x) \oplus W^u(x)$$

tal que

- *contracción y expansión uniforme,*
- *la descomposición es invariante.*

Dinámica hiperbólica

Definición

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to f(U)$ de clase C^2 un difeomorfismo y Λ un conjunto cerrado invariante. Decimos que Λ es hiperbólico si para toda $x \in \Lambda$

$$\mathbb{R}^n = W^s(x) \oplus W^u(x)$$

tal que

- *contracción y expansión uniforme,*
- *la descomposición es invariante.*

Definición

Λ es un atractor hiperbólico si $\exists V$ vecindad de Λ tal que

$$\Lambda = \cap_{n \geq 0} f^n(V).$$

Dinámica hiperbólica

Definición

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to f(U)$ de clase C^2 un difeomorfismo y Λ un conjunto cerrado invariante. Decimos que Λ es hiperbólico si para toda $x \in \Lambda$

$$\mathbb{R}^n = W^s(x) \oplus W^u(x)$$

tal que

- *contracción y expansión uniforme,*
- *la descomposición es invariante.*

Definición

Λ es un atractor hiperbólico si $\exists V$ vecindad de Λ tal que

$$\Lambda = \cap_{n \geq 0} f^n(V).$$

Decimos que $\cup_{n \geq 0} f^{-n}(V)$ es la cuenca de atracción de Λ.

Dinámica hiperbólica de la herradura

Regreso a la herradura, $\forall x \in \Gamma$

- la variedad estable $W^s(x)$ de x es la línea vertical que pasa por x:

Dinámica hiperbólica de la herradura

Regreso a la herradura, $\forall x \in \Gamma$

- la variedad estable $W^s(x)$ de x es la línea vertical que pasa por x: para toda $y \in W^s(x) \cap \Gamma$

$$d_{\mathbb{R}^2}(f^n(x), f^n(y)) = \alpha^n d(x, y) \to 0;$$

Dinámica hiperbólica de la herradura

Regreso a la herradura, $\forall x \in \Gamma$

- la variedad estable $W^s(x)$ de x es la línea vertical que pasa por x: para toda $y \in W^s(x) \cap \Gamma$

$$d_{\mathbb{R}^2}(f^n(x), f^n(y)) = \alpha^n d(x, y) \to 0;$$

- la variedad inestable $W^u(x)$ de x es la línea horizontal que pasa por x:

Dinámica hiperbólica de la herradura

Regreso a la herradura, $\forall x \in \Gamma$

- la variedad estable $W^s(x)$ de x es la línea vertical que pasa por x: para toda $y \in W^s(x) \cap \Gamma$

$$d_{\mathbb{R}^2}(f^n(x), f^n(y)) = \alpha^n d(x, y) \to 0;$$

- la variedad inestable $W^u(x)$ de x es la línea horizontal que pasa por x: para toda $y \in W^u(x) \cap \Gamma$

$$d_{\mathbb{R}^2}(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = \alpha^n d(x, y) \to 0;$$

Dos teoremas importantes

Teorema (Smale)

Dada una intersección homoclínica transversa de un punto hiperbólico x*,*

Dos teoremas importantes

Teorema (Smale)

Dada una intersección homoclínica transversa de un punto hiperbólico x, se puede encontrar un rectángulo R y $n \in \mathbb{Z}$, tales que f^n actua en R como una herradura.
En particular, hay un conjunto de Cantor C invariante que es un conjunto hiperbólico de f^n y $f^n|_C$ es conjugado al shift en dos elementos.

... y otro teorema

Teorema

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to f(U)$ con un conjunto hiperbólico Λ tal que $\exists V$ vecindad de Λ tal que $\Lambda = \cap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V)$ (es decir Λ es maximal).

... y otro teorema

Teorema

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to f(U)$ con un conjunto hiperbólico Λ tal que $\exists V$ vecindad de Λ tal que $\Lambda = \cap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(V)$ (es decir Λ es maximal). Entonces existe una cubierta finita de Λ por conjuntos $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k \subset \Lambda$ con interiores disjuntos, una matriz de transición A y un mapeo $h : \Sigma_A \to \Lambda$ tales que h es continuo excepto en $\cup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(B)$ y el diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Sigma_A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "h"'] & \Sigma_A \arrow[d, "h"'] \\ \Lambda \arrow[r, "f"] & \Lambda \end{tikzcd}$$

... y otro teorema

Teorema

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to f(U)$ con un conjunto hiperbólico Λ tal que $\exists V$ vecindad de Λ tal que $\Lambda = \cap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V)$ (es decir Λ es maximal). Entonces existe una cubierta finita de Λ por conjuntos $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k \subset \Lambda$ con interiores disjuntos, una matriz de transición A y un mapeo $h : \Sigma_A \to \Lambda$ tales que h es continuo excepto en $\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(B)$ y el diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_A & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_A \\ h\big\downarrow & & h\big\downarrow \\ \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \end{array}$$

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^k$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\Lambda_i) \cap \Lambda_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f(\Lambda_i) \cap \Lambda_j = \emptyset \end{cases}$$