

La conjecture de Sefeirt pour de flots qui
préservent un volume

Ana Rechtman

8 octobre 2008

Table des matières

Introduction	iii
1 Pièges de Wilson et Kuperberg	1
1.1 Piège de Wilson	1
1.2 Piège de Kuperberg	4
2 Pièges qui préservent un volume	13
2.1 Flots qui préservent une forme volume	13
2.2 Piège de Wilson qui préserve le volume	15
2.3 Feuilletages singuliers	18

Introduction

La recherche de flots sans orbites périodiques sur la sphère \mathbb{S}^3 , et plus généralement sur des variétés fermées de dimension trois, est motivée par une question posée par Seifert en 1950 dans l'article où il montre que tout champ de vecteurs sur \mathbb{S}^3 suffisamment proche de la fibration de Hopf a au moins une orbite périodique [Sei50]. La réponse affirmative à cette question est devenue la conjecture de Seifert : *tout champ de vecteurs différentiable non singulier sur \mathbb{S}^3 a au moins une orbite périodique*. On sait maintenant que la réponse est non, c'est-à-dire qu'il existe des champs de vecteurs sur \mathbb{S}^3 sans orbites périodiques et sans points fixes. Rappelons nous qu'il existent des champs de vecteurs non singuliers sur toute variété fermée de dimension trois, car sa caractéristique d'Euler est nulle.

La réponse a été trouvée progressivement. En 1966, F. W. Wilson a montré qu'il existe des champs de vecteurs non singuliers de classe C^∞ qui n'ont qu'un nombre fini d'orbites périodiques [Wil66]. Plus tard, en 1974, P. Schweitzer construit des contre-exemples à la conjecture de classe C^1 [Sch74]. En suivant la même méthode, J. Harrison en 1988 a construit des contre-exemples de classe C^2 [Har88]. Finalement en 1993, K. Kuperberg a prouvé :

Théorème 0.0.1 *Sur toute variété fermée de dimension trois, il existe un champ de vecteurs non singulier, analytique réel, dont aucune orbite n'est périodique [Kup94].*

L'idée principale dans ces preuves est de construire un *piège* qui modifie localement un champ de vecteurs non singulier. Un piège est une variété $P = D \times [-1, 1]$, où D est une variété compacte à bord de dimension deux. La variété P doit être munie d'un champ de vecteurs non singulier w avec les conditions suivantes :

- (i) $w = \frac{\partial}{\partial z}$ près du bord de P , où z denote la coordonnée de $[-1, 1]$. De plus, une trajectoire du flot engendré par w ne peut sortir de P que par $D \times \{1\}$;
- (ii) si un point $(x, -1)$ est dans la même trajectoire que $(y, 1)$, alors $x = y$, c'est-à-dire toute trajectoire de w qui entre dans P et en sort, sort en face de son entrée ;
- (iii) il existe au moins un point dans $D \times \{-1\}$ dont la trajectoire ne sort pas de P . On dit que la trajectoire est piégée par P ;

(iv) il existe un plongement $i : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui préserve la direction verticale près du bord de P , c'est-à-dire $di(w) = \frac{\partial}{\partial x_3}$ près de ∂P .

Si un piège a toutes les propriétés sauf (iii), on peut coller deux copies pour obtenir un piège avec cette propriété. Avec un tel piège on peut modifier localement un champ de vecteurs non singulier V dans \mathbb{S}^3 de la façon suivante : on prend une boîte à flot près d'un point périodique, c'est-à-dire un système de coordonnées dans un voisinage du point tel que $V = \frac{\partial}{\partial x_3}$ à l'intérieur du voisinage. On utilise le plongement i pour mettre P dans la boîte à flot de façon que la trajectoire périodique de V ne sorte pas de P . On obtient un flot sur \mathbb{S}^3 sans cette orbite périodique, qui coïncide avec V hors de la boîte. En fait, on peut faire ceci dans toute variété fermée de dimension 3.

Le piège construit par Wilson contient deux orbites périodiques et le flot est de classe C^∞ , ce piège peut être aussi construit dans le cas analytique réel. Dans le piège de Schweitzer il n'y a pas d'orbites périodiques mais le champ de vecteurs n'est que C^1 , et dans celui de K. Kuperberg le champ de vecteurs est analytique réel ou C^∞ et sans orbites périodiques.

On peut se demander ce qui se passe dans le cas des champs qui préservent une forme volume, c'est-à-dire, est ce qu'un champ non singulier de classe C^∞ dans la sphère de dimension trois qui préserve un volume, a nécessairement une orbite périodique? Dans cette direction G. Kuperberg a construit, sur toute variété fermée de dimension trois un champ non singulier C^∞ qui préserve un volume et qui n'a qu'un nombre fini d'orbites périodiques. Dans le même article [Kup96], il présente une amélioration à la construction de P. Schweitzer pour obtenir un piège de classe C^1 qui préserve un volume sans orbite périodique.

Dans la première partie de ces notes on décrira les constructions de Wilson et Kuperberg. Nous verrons pour quelles raisons ces pièges ne préservent aucune forme volume. Ensuite on donnera une construction d'un piège à la Wilson qui préserve un volume. Finalement, nous allons montrer pourquoi on n'obtient pas un piège qui préserve un volume si on répète la construction de Kuperberg en partant du piège de Wilson modifié.

Chapitre 1

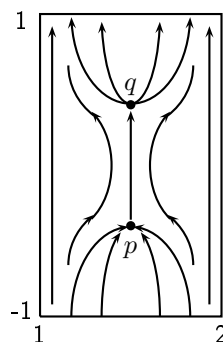
Pièges de Wilson et Kuperberg

1.1 Piège de Wilson

Dans [Wil66] Wilson introduit une méthode simple pour construire un piège, qui lui permet de montrer :

Théorème 1.1.1 *Sur toute variété fermée de dimension trois, il existe un champ de vecteurs non singulier qui n'a qu'un nombre fini d'orbites périodiques.*

Preuve. On commence par considérer un rectangle $R = [1, 2] \times [-1, 1]$ de coordonnées (r, z) avec un champ de vecteurs W_1 dont les trajectoires sont décrites dans la figure ci-dessous.



Le flot engendré par W_1 possède les propriétés suivantes :

- il est de classe C^∞ , avec deux singularités de type selle-nœud, p et q ;
- il coïncide avec le champ $\frac{\partial}{\partial z}$ au voisinage du bord de R ;
- il existe un intervalle ouvert I tel que les orbites qui rentrent par $I \times \{-1\}$ ne sortent pas de R . En fait, elles convergent vers la singularité p ;
- le champ est antisymétrique par rapport à la droite $\{z = 0\}$, c'est-à-dire les orbites sont symétriques avec l'orientation contraire. Ceci implique que toute orbite qui entre dans R et en sort, sort en face de son entrée.

Soit $P' = \mathbb{S}^1 \times R$ où on prend les coordonnées (θ, r, z) . On appelle maintenant W_2 le champ de vecteurs tangent à $\{\cdot\} \times R$ qui se projette sur W_1 . Les deux singularités p et q , forment deux cercles de singularités dans P' . Soit $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ , nulle dans un voisinage du bord de R , strictement positive en p et négative en q . Le champ défini par la somme $W_3 = W_2 + f \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}$ a deux orbites périodiques décrites par les points (θ, p) et (θ, q) , avec directions opposées. Le champ W_3 est non singulier dans P' .

Pour obtenir le piège de Wilson, on plonge P' dans $P = D_2^2 \times [-1, 1]$, où D_2^2 est le disque fermé de rayon 2, en envoyant le point (θ, r, z) sur le point $(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$. Si on prolonge W_3 au cylindre $D_1^2 \times [-1, 1]$ par le champ vertical $\frac{\partial}{\partial z}$ on obtient un piège muni d'un champ W non singulier. Le champ W a deux orbites périodiques et les propriétés suivantes :

- $W = \frac{\partial}{\partial z}$ près du bord de P ;
- il existe un ouvert non vide $U \subset D_2^2$ ($U = I \times \mathbb{S}^1$) tel que les orbites des points de $U \times \{-1\}$ ne sortent pas de P ;
- le champ est antisymétrique par rapport au plan $\{z = 0\}$.

On considère V un champ de vecteurs non singulier de classe C^∞ sur une variété M fermée de dimension 3. Comme V est non singulier, on peut trouver une boîte à flot autour de z pour tout $z \in M$, c'est-à-dire un voisinage de z difféomorphe à P où le flot V est un multiple constant de $\frac{\partial}{\partial x_3}$.

Comme M est compacte il existe une collection finie de boîtes à flot $\{P_i \simeq D_i \times [-1, 1]\}$ difféomorphes à P , telle que $\{U_i \times [-1, 1]\}$ est un recouvrement de M . Chaque $U_i \subset D_i$ est difféomorphe à U . En utilisant le flot engendré par V , on peut faire que les boîtes soient disjointes deux à deux et que les $U_i \times \{-1\}$ rencontrent toutes les trajectoires de V .

Cela implique qu'on a une collection finie de boîtes à flot pour le champ V telle que quand on plonge P avec le champ W à l'intérieur, les images de $U \times \{-1\}$ rencontrent toutes les orbites de V . Quitte à multiplier le champ W par une fonction C^∞ strictement positive dans un voisinage du bord de P , on obtient un champ V' sur M qui coïncide avec V hors des boîtes et avec un multiple de W à l'intérieure. On utilise la fonction pour ajuster W à V , le champ obtenu a les mêmes orbites que W à l'intérieure de P .

Nous affirmons que toutes les orbites périodiques de V' sont celles qui sont dans les boîtes. Soit z un point en dehors des boîtes. Si son orbite par V' entre et sorte d'une boîte, le point de sortie est le même que le point de sortie de l'orbite de z par le champ V , c'est-à-dire on continue sur la même orbite du champ V . Comme les images de $U \times \{-1\}$ rencontrent toutes les orbites, il y a une boîte dans laquelle l'orbite de z pénètre et ne sort pas. Alors z n'est pas un point périodique de V' , et V' a un nombre fini d'orbites périodiques.

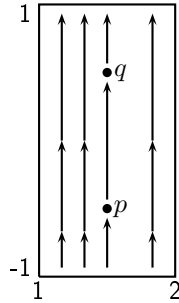
□

Il faut remarquer que pour qu'un flot ϕ_t préserve un volume il est nécessaire que pour tout ouvert Ω , $\overline{\phi_t(\Omega)} \not\subset \Omega$ pour tout t . Dans ce piège il y a un ensemble de points ouvert, $U \times]-1, -1 + \epsilon] \subset D_2^2 \times [-1, 1]$, tel que ces orbites ne sortent pas de $D_2^2 \times [-1, 1]$. Alors il existe un ouvert dans P tel qu'il contient son image par le flot engendré par W . Donc P ne peut pas préserver un volume. En général pour qu'un piège préserve un volume, l'ensemble des orbites piégées doit être un fermé d'intérieur vide.

Maintenant on va construire la modification du piège de Wilson qu'utilise K. Kuperberg, où l'ensemble des points d'entrée dont les orbites sont piégées est un cercle. On considère $\mathcal{P}' = A \times [-1, 1]$, A l'anneau $\mathbb{S}^1 \times [1, 2]$. Sur \mathcal{P}' on a les coordonnées (θ, r, z) . On cherche un champ \mathcal{W} de classe C^∞ tangent aux cylindres $\{r = \text{const.}\}$ et satisfaisant :

- près du bord il coïncide avec le champ vertical, $\frac{\partial}{\partial z}$;
- il est antisymétrique par rapport au plan $\{z = 0\}$;
- il a une composante verticale strictement positive, sauf sur les deux orbites périodiques que sont dans le cylindre $\{r = \frac{3}{2}\}$.

Pour construire un flot avec ces caractéristiques, on peut répéter la construction de Wilson. Soit $R = [1, 2] \times [-1, 1]$ comme avant, avec un champ de vecteurs \mathcal{W}_1 comme dans la figure :



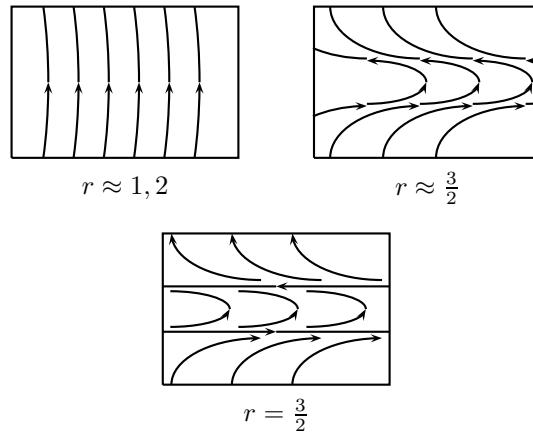
Dans $\mathcal{P}' = \mathbb{S}^1 \times R$ on peut considérer le champ tangent à $\{\cdot\} \times R$ qui se projette sur \mathcal{W}_1 . En utilisant une fonction C^∞ , $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ comme avant, le champ de vecteurs $\mathcal{W} = \mathcal{W}_2 + f \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}$ a les caractéristiques cherchées. En fait, comme p et q sont dans le cylindre $\{r = \frac{3}{2}\}$, l'orbite d'un point $(\theta, r, -1)$ arrive au point $(\theta, r, 1)$ si $r \neq \frac{3}{2}$ (après un temps qui tend vers l'infini quand r tend vers $\frac{3}{2}$), et pour $r = \frac{3}{2}$ s'accumule sur l'orbite décrite par les points (θ, p) .

Finalement, on plonge \mathcal{P}' dans $\mathcal{P} = D_2^2 \times [-1, 1]$, en envoyant le point (θ, r, z) sur le point $(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$. À priori, ce piège pourrait préserver une forme volume car l'ensemble des points d'entrée dont les orbites sont piégées par \mathcal{P} , est un cercle. Comme on verra dans la section 2.2, il ne préserve pas de forme volume.

1.2 Piège de Kuperberg

Après la description de la construction du piège de Kuperberg, on verra que la raison pour laquelle il ne préserve pas de volume, est qu'il existe un ensemble ouvert de points d'entrée tel que ses orbites sont piégées. La magnifique idée de K. Kuperberg est d'insérer des parties du piège de Wilson \mathcal{P} , avec le champ \mathcal{W} , dans lui même de sorte que ces orbites périodiques, qu'on appelle $O_1 = \{(\theta, p) | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ et $O_2 = \{(\theta, q) | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, soient piégées.

Le champ \mathcal{W} est tangent aux cylindres $\{r = \text{const.}\}$ où il décrit les orbites :



On commence la construction en plongeant $\mathcal{P} = A \times [-1, 1]$ dans \mathbb{R}^3 comme le montre le premier dessin de la figure 1.1, en gardant la direction verticale du flot près du bord de \mathcal{P} . On va auto-insérer deux parties pour obtenir un piège K comme ce du dessin 1.2, de la forme décrite ci-dessous.

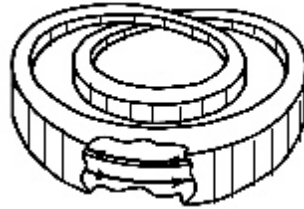
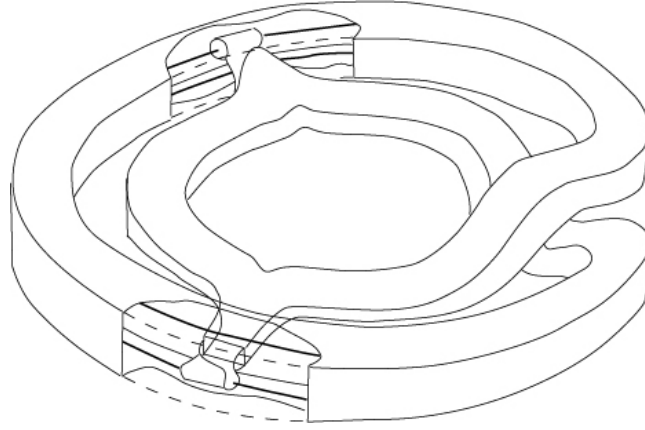
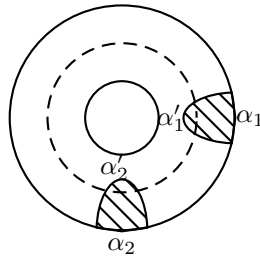


FIG. 1.1 – Plongement de \mathcal{P}

Soit L_1 (respectivement L_2) un disque topologique fermé dans l'anneau A bordé par $\alpha_1 \cup \alpha'_1$ (resp. $\alpha_2 \cup \alpha'_2$). L'arc α'_1 (resp. α'_2) est contenu dans l'intérieur de A , et α_1 (resp. α_2) dans le cercle $\{r = 2\}$, qui est une partie du bord de A . Les parties de \mathcal{P} qu'on va insérer dans \mathcal{P} sont les *langués* $L_1 \times [-1, 1]$ et $L_2 \times [-1, 1]$. On suppose que les deux langués sont disjointes et qu'elles contiennent, chacune un segment du cercle $\{r = \frac{3}{2}\}$.

FIG. 1.2 – Piège de Kuperberg K 

On prend β_1 un arc du cercle $\{r = 1\} \subset A$. Soit $\sigma_1 : L_1 \times [-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}$ un plongement C^∞ qui possède les propriétés suivantes :

- $\sigma_1(\alpha'_1 \times [-1, 1]) = \beta_1 \times [-1, 1]$;
- $(L_1 \times [-1, 1]) \cap \sigma_1(L_1 \times [-1, 1]) = \emptyset$;
- pour tout $a \in L_1$, $\sigma_1(\{a\} \times [-1, 1])$ est contenue dans une orbite du flot engendré par \mathcal{W} . Comme \mathcal{W} est vertical près du bord de \mathcal{P} , donc près de $\beta_1 \times [-1, 1]$, et horizontal sur les orbites périodiques, ceci exige que l'image de $L_1 \times \{\cdot\}$ soit transverse au champ \mathcal{W} . C'est-à-dire, elle doit faire *un quart de tour*;
- $\sigma_1(L_1 \times \{\cdot\})$ rencontre l'orbite O_1 dans un unique point et elle ne rencontre pas O_2 .

De la même manière, on construit un plongement σ_2 de $L_2 \times [-1, 1]$ dans \mathcal{P} , tel que l'image rencontre l'orbite O_2 et ne rencontre pas O_1 . On le fait de sorte que

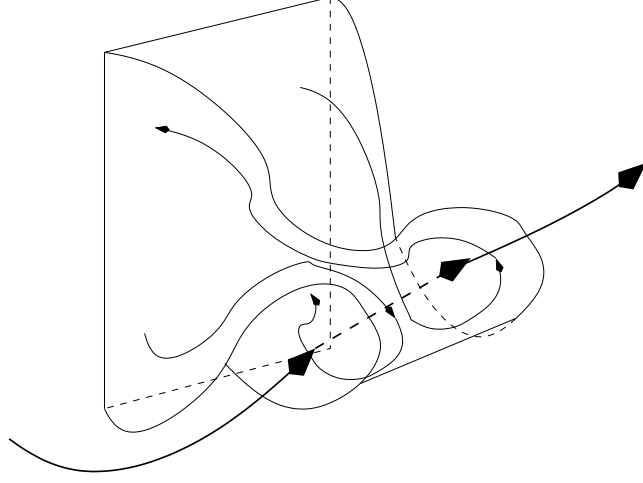


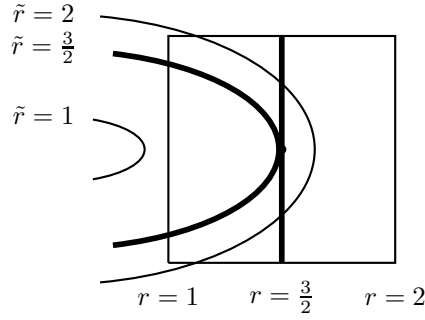
FIG. 1.3 – Orbite piégée

$\sigma_1(L_1 \times [-1, 1])$ soit disjointe de $\sigma_2(L_2 \times [-1, 1])$. On identifie les points de

$$\mathcal{P}' = \overline{\mathcal{P} \setminus (\sigma_1(L_1 \times [-1, 1]) \cup \sigma_2(L_2 \times [-1, 1]))}$$

avec leurs images respectives sous σ_1 et σ_2 , pour obtenir le piège de Kuperberg K . Comme dans l'insertion du piège de Wilson, on peut avoir besoin de multiplier le champ \mathcal{W} à l'intérieur des langues par une fonction C^∞ strictement positive, pour que le champ de vecteurs \mathcal{K} construit dans K soit différentiable. Cette correction ne change pas les trajectoires.

Pour que K soit un piège aperiodique on doit s'assurer que O_1 et O_2 soient piégées par l'insertion des langues. Ceci exige que L_i , pour $i = 1, 2$, contient un point de la forme $(\rho_i, \frac{3}{2})$ tel que l'image du segment $\{(\rho_i, \frac{3}{2}) \times [-1, 1]\} \subset L_i \times [-1, 1]$ soit un arc de l'orbite O_i . Si en plus $\sigma_i(\tilde{\theta}, \tilde{r}, \tilde{z}) = (\theta, r, z)$ implique que $\tilde{r} > r$ pour tout $(\tilde{\theta}, \tilde{r}, \tilde{z})$, sauf si $(\tilde{\theta}, \tilde{r}, \tilde{z}) = (\rho_i, \frac{3}{2}, \tilde{z})$ qui va sur l'orbite O_i , on dira que σ_i a la *condition du rayon*.



Après identification, on obtient un compact K . Soit τ la projection naturelle de \mathcal{P}' sur K . Le bord de K est composé par une surface latérale

$$\tau[(\partial A \setminus (\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \beta_1 \cup \beta_2)) \times [-1, 1]],$$

tangente au champ \mathcal{K} , et deux surfaces transverses à \mathcal{K} , $\tau[(A \setminus (L_1 \cup L_2)) \times \{\pm 1\}]$ qui sont l'entrée et la sortie de K , respectivement. Clairement K peut être plongé dans \mathbb{R}^3 de façon C^∞ et de sorte que les verticales sont préservées. Le champ \mathcal{K} prolongé à l'extérieur de K par le champ vertical constant est de classe C^∞ . Ainsi, K pourra être inséré dans $D^2 \times [-1, 1]$, où D^2 est un disque fermé, et utilisé comme le piège de Wilson pour intercepter les orbites d'un champ de vecteurs donné dans une variété de dimension trois, cette fois ci sans créer des nouvelles orbites périodiques. On va montrer en suivant les notes de É. Ghys [Ghy95] que cette construction nous donne le piège cherché : \mathcal{K} n'a pas d'orbites périodiques dans K .

Proposition 1.2.1 *Le compact K muni du champ de vecteurs \mathcal{K} , est un piège apériodique.*

Avant la preuve, on va introduire un peu de terminologie. Dans \mathcal{P}' un point de

$$A \times \{-1\} \cup \sigma_1(L_1 \times \{-1\}) \cup \sigma_2(L_2 \times \{-1\})$$

est un point d'entrée. On l'appelle un point d'entrée primaire s'il est dans $(A \setminus (L_1 \cup L_2)) \times \{-1\}$ qui est la surface d'entrée de K , et secondaire sinon. Respectivement, on a les points de sortie primaires et secondaires. On utilise la même terminologie pour les points de K , en considérant leurs images inverses par τ . On dit qu'un point d'entrée et un point de sortie dans \mathcal{P}' sont en face s'ils sont de la forme $(\theta, r, -1)$ et $(\theta, r, 1)$. Pour généraliser, on dira que leurs images par τ sont en face.

Une orbite de \mathcal{W} rencontre un certain nombre de points d'entrée et sortie, alors on peut la décomposer en intervalles. Les adhérences de ces intervalles, qui sont dans \mathcal{P}' , sont des *arcs de Wilson*. Chacune des orbites périodiques de \mathcal{W} intersecte \mathcal{P}' dans un seul arc de Wilson, qu'on notera par O'_1 et O'_2 , respectivement. Généralement les arcs de Wilson sont des composantes connexes des orbites de \mathcal{W} , l'exception sont les orbites qui rencontrent les surfaces $\sigma_i(\alpha_i \times [-1, 1])$, pour $i = 1, 2$.

Prenons deux points $p = (\theta, r, z)$ et $\tilde{p} = (\tilde{\theta}, \tilde{r}, \tilde{z})$ dans \mathcal{P}' , on dit que p est \mathcal{W} -avant \tilde{p} si une des conditions suivantes est satisfaite :

- ils sont sur la même orbite non périodique de \mathcal{W} et p précède à \tilde{p} dans la direction naturelle de l'orbite ;
- ils sont dans la même orbite périodique.

Dans les deux cas $r = \tilde{r}$. Pour deux arcs de Wilson, w et \tilde{w} , on dit que w est \mathcal{W} -avant \tilde{w} si l'origine de w est \mathcal{W} -avant de celle de \tilde{w} . On peut ainsi dire qu'un arc de Wilson est \mathcal{W} -entre deux points ou deux arcs.

Les arcs de Wilson w_1 et w_2 sont \mathcal{K} -consécutifs si l'extrémité final (bout) de w_1 et l'origine de w_2 ont la même image par τ . On définit un arc de Kuperberg comme un arc compact d'une orbite de \mathcal{K} dans K , tel que l'origine et le bout sont des points d'entrée ou de sortie.

Preuve. Soit γ un arc de Kuperberg, il rencontre successivement des points d'entrée et sortie p_0, p_1, \dots, p_k . Notons que seule l'origine p_0 peut être un point d'entrée primaire et seul le bout p_k peut être un point de sortie primaire. On trouve une suite d'arcs de Wilson w_1, w_2, \dots, w_k \mathcal{K} -consécutifs, dont les images par τ sont des parties de γ , $\tau(w_i)$ entre p_{i-1} et p_i .

On introduit la suite de *niveaux*, $n(i)$ pour $i = 1, 2, \dots, k$, associée à l'arc de Kuperberg γ défini par $n(1) = 0$ et

$$n(i+1) = \begin{cases} n(i) + 1 & \text{si } p_i \text{ est un point d'entrée,} \\ n(i) - 1 & \text{si } p_i \text{ est un point de sortie,} \end{cases}$$

pour $i = 1, 2, \dots, k-1$. Si nécessaire on notera $n_\gamma(i)$ à la place de $n(i)$, pour spécifier l'arc de Kuperberg qu'on suit. La proposition résulte du lemme suivant.

Lemme 1.2.2 *On suppose que $k > 1$, que $n(i) \geq 0$ pour tout i et que $n(k)$ est nul. Alors l'arc de Wilson w_1 est \mathcal{W} -avant w_k .*

Notons que si l'arc de Wilson w est \mathcal{W} -avant \tilde{w} , et l'origine de w est un point d'entrée et le bout de \tilde{w} est un point de sortie, alors ces deux points sont l'un en face à l'autre.

Preuve. On procède par récurrence sur le nombre k . Il est impossible d'avoir $k = 2$ car $n(2) = 1$, alors le premier cas à considérer est $k = 3$. Dans ce cas la suite est nécessairement $0, 1, 0$. On conclut que p_1 est une entrée secondaire et p_2 est une sortie secondaire. Alors il existe un arc $\overline{w_2}$ contenu dans l'union des langues $(L_1 \cup L_2) \times [-1, 1]$, tel que son image par τ connecte les points p_1 et p_2 . L'image de $\overline{w_2}$ par l'insertion des langues dans \mathcal{P}' est un arc \tilde{w}_2 contenu dans une orbite de \mathcal{W} , et connecte le bout de w_1 avec l'origine de w_3 . Alors ces deux derniers points sont face à face dans le bord d'une langue, c'est-à-dire w_1 et w_3 sont dans la même orbite de \mathcal{W} et w_1 est \mathcal{W} -avant w_3 .

Supposons que le lemme est établi jusqu'à $k-1$. On a les deux cas suivants.

(1) *Il existe $1 < i < k$ tel que $n(i) = 0$.*

Donc on peut décomposer γ en deux arcs de Kuperberg qui vérifient chacun les hypothèses du lemme pour des valeurs strictement inférieures à k . On obtient le lemme par récurrence.

(2) *Si non $n(i) \geq 1$ pour $i = 2, 3, \dots, k-1$.*

On prend l'arc $\gamma' = \gamma \setminus (w_1 \cup w_k)$, qui vérifie les hypothèses du lemme pour $k - 2$ car $n_{\gamma'}(i) = n_\gamma(i) - 1$. Alors par récurrence on a que w_2 est \mathcal{W} -avant w_{k-1} . En considérant l'arc $l = w_2 \cup w_3 \cup \dots \cup w_{k-1}$, on obtient une décomposition de γ en trois arcs w_1, l, w_k . En suivant l'argument du cas $k = 3$ on établit le lemme. \square

Nous pouvons maintenant montrer que K , avec le champ de vecteurs \mathcal{K} , est un piège apériodique. D'abord on va montrer qu'il satisfait les caractéristiques d'un piège décrites dans l'introduction.

- (i) *Par construction, le champ de vecteurs \mathcal{K} est vertical près du bord.*
(ii) *Soit γ un arc de Kuperberg, décomposé par des arcs de Wilson w_1, w_2, \dots, w_k , où w_i va de p_{i-1} à p_i . On prend p_0 un point d'entrée primaire et p_k un point de sortie primaire. Alors p_0 et p_k sont face à face.*

Pour montrer cette affirmation on va voir que γ vérifie les hypothèses du lemme 1.2.2. D'abord on affirme que $n(i) \geq 0$. Supposons qu'il existe $1 < i \leq k$ tel que $n(i) < 0$. Comme $n(2) = 1$, on peut considérer j le premier nombre strictement supérieur à 1 tel que $n(j) = 0$. Le lemme montre que p_0 et p_j sont l'un en face à l'autre et donc que p_j est un point de sortie primaire, ce qui n'arrive que pour $j = k$.

Supposons, maintenant que $n(k) > 0$. Si on parcourt γ dans le sens inverse on a que $n_{-\gamma}(k) = 0$ par définition. Donc $n_{-\gamma}(1) < 0$, que n'est pas possible car $n_{-\gamma}(i) \geq 0$ pour $i = 1, 2, \dots, k$. Donc $n(k) = 0$ et le lemme implique (ii).

- (iii) *Une orbite qui pénètre dans K par un point du type $\tau(\theta, \frac{3}{2}, -1)$ n'en ressort pas.*

Supposons qu'il existe un point du type $\tau(\theta, \frac{3}{2}, -1)$ tel que son orbite ressort de K . En utilisant (ii) on conclut que le point de sortie serait $\tau(\theta, \frac{3}{2}, 1)$, donc les points $(\theta, \frac{3}{2}, -1)$ et $(\theta, \frac{3}{2}, 1)$ seraient dans la même orbite de \mathcal{W} , ce qui est une contradiction.

- (iv) *On a déjà dit que K est plongé dans \mathbb{R}^3 de façon à préserver la direction verticale.*

- (v) *\mathcal{K} est apériodique.*

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe une orbite périodique. Cet orbite contient au moins un point d'entrée ou de sortie secondaire p_0 . On obtient un arc de Kuperberg γ , avec l'origine et le bout en p_0 , qu'on décompose en une suite d'arcs de Wilson \mathcal{K} -consécutifs w_1, w_2, \dots, w_{k+1} , avec $w_1 = w_{k+1}$ qui commence en p_0 . Le choix de p_0 est arbitraire parmi les points $p_0, p_1, \dots, p_k = p_0$ rencontrés par γ . On choisit k minimal, donc les arcs w_1, \dots, w_k sont distincts deux à deux.

Si $n(k+1) = 0$, γ rencontre le même nombre de points d'entrée que de sortie. On prend p_0 de sorte que $n(i) \geq 0$, pour $i = 1, 2, \dots, k+1$, ce qui ne change pas $n(k+1)$ car on est dans une orbite périodique. Par le lemme 1.2.2, w_1 est \mathcal{W} -avant w_{k+1} . Comme $w_1 = w_{k+1}$, il coïncide avec O'_1 ou O'_2 . L'origine de w_2 est un des points $(\rho_i, \frac{3}{2}, 0)$, $i = 1, 2$, et son bout est un point d'entrée. Donc $n(2) = 1$ et $n(3) = 2$. Soit $i > 1$ le plus petit entier tel que $n(i) = 0$. Alors $n(i-1) = 1$ et p_{i-1} est un point de sortie. Par le lemme p_1 et p_{i-1}

sont en face. Ceci est absurde car les orbites de \mathcal{W} dans le cylindre $\{r = \frac{3}{2}\}$ ne le traversent pas.

Si le dernier niveau, $n(k+1)$ est égal à m , on peut supposer $m > 0$, car le cas négatif est analogue si on parcourt γ dans le sens contraire. De nouveau on choisi p_0 pour que $n(i) \geq 0$, pour $i = 1, \dots, k+1$. Si $n(i+1) = n(i) + 1$, p_i est un point d'entrée et par la condition du rayon $r(i+1) \geq r(i)$, où $r(i)$ est le rayon du cylindre qui contient à w_i . L'égalité $r(i+1) = r(i)$ implique que w_i est O'_1 ou O'_2 .

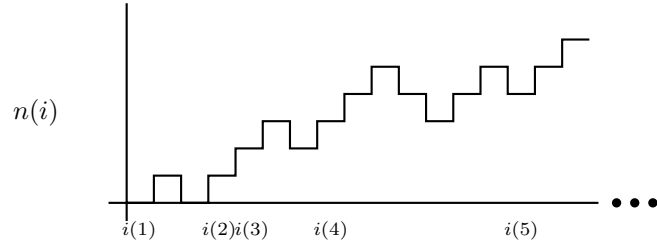
Supposons d'abord que la suite de niveaux est strictement croissante, c'est-à-dire $n(i) = i - 1 = n(i+1) - 1$. Donc

$$r(1) \geq r(2) \geq \dots \geq r(k+1),$$

mais comme $w_1 = w_{k+1}$, $r(1) = r(k+1)$. Alors tous les arcs w_i sont dans le cylindre $\{r = \frac{3}{2}\}$ et coïncident avec O'_1 ou O'_2 . Ceci est absurde car ces arcs de Wilson ne sont pas \mathcal{K} -consécutifs.

Si ce n'est pas le cas, c'est-à-dire la suite $n(i)$ n'est pas strictement croissante, on peut trouver une suite d'indices $1 = i(1) < i(2) < \dots < i(n+1) \leq k+1$ tel que pour $a = 1, 2, \dots, n+1$ on a

$$n(i(a)) = a - 1 \quad \text{et} \quad n(j) \geq a - 1 \quad \text{pour} \quad j \geq i(a).$$



Si $i(a+1) > i(a) + 1$ on considère la suite d'arcs de Wilson \mathcal{K} -consécutifs $w_{i(a)}, w_{i(a)+1}, \dots, w_{i(a+1)-1}$. Comme $n(i(a)) = n(i(a+1) - 1)$, on peut utiliser le lemme 1.2.2 pour obtenir que $w_{i(a)}$ est \mathcal{W} -avant $w_{i(a+1)-1}$ et donc $r(i(a)) = r(i(a+1) - 1)$. De même, on obtient que $r(i(n+1)) = r(k+1)$. La condition du rayon implique que $r(i(a+1)) \geq r(i(a+1) - 1)$ pour $a = 1, 2, \dots, n$, mais $r(1) = r(k+1)$, donc tous les $r(i(a))$ sont égaux et chaque $w_{i(a+1)-1}$ coïncide avec O'_1 ou O'_2 . Comme $w_{i(a)}$ est \mathcal{W} -avant $w_{i(a+1)-1}$ (si $i(a+1) > i(a) + 1$) on a que $w_{i(a)}$ coïncide aussi avec O'_1 ou O'_2 , ce qui est une contradiction dans le cas où la suite des niveaux n'est pas strictement croissante car les w_1, w_2, \dots, w_k sont distincts. Donc \mathcal{K} est apériodique. □

Muni du piège de Kuperberg on peut prouver le théorème 0.0.1. Terminons la section en montrant que K ne peut pas préserver un volume.

Proposition 1.2.3 *Il existe $\epsilon > 0$ tel que l'orbite par rapport à \mathcal{K} d'un point du type $\tau(\theta, r, -1)$ avec $\frac{3}{2} - \epsilon < r < \frac{3}{2}$, ne passe pas par le point en face $\tau(\theta, r, 1)$. En particulier, si $\tau(\theta, r, -1)$ est un point d'entrée primaire son orbite ne ressort pas de K .*

Ceci implique qu'il existe un ouvert non vide Ω dans $(A \setminus (L_1 \cup L_2)) \times \{-1\}$, dont les orbites sont piégées par K . On obtient le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.4 *Le piège K muni du champ de vecteurs \mathcal{K} ne préserve aucun volume.*

Preuve de 1.2.3. Pour simplifier on écrira $\sigma_i(L_i)$ à la place de $\sigma_i(L_i \times \{-1\})$.

Soit $p = (\theta, r, z)$ un point de $\sigma_1(L_1)$ proche au bout de l'arc O'_1 . Si on suit l'orbite qui passe par p , elle revient à $\sigma_1(L_1)$ sur un point $\tilde{p} = (\tilde{\theta}, r, \tilde{z})$. Donc la distance $|z - \tilde{z}|$ est majorée par un multiple constant de la distance de p au bout de O'_1 .

Notons, par ailleurs, que la partie $\sigma_1(L_1 \cap \{r < \frac{3}{2}\}) \subset \sigma_1(L_1)$ est bordée par une courbe lisse contenue dans $\sigma_1(L_1 \cap \{r \leq \frac{3}{2}\})$. En fait cette courbe passe par le bout de O'_1 , car ce point est dans $\sigma_1(L_1 \cap \{r = \frac{3}{2}\})$. Donc la courbe est tangente à $\sigma_1(L_1 \cap \{r = \frac{3}{2}\})$ au bout de O'_1 .

On conclut qu'il existe $\epsilon > 0$ assez petit tel que l'orbite d'un point du type $(\theta, r, -1)$, avec $\frac{3}{2} - \epsilon < r < \frac{3}{2}$, rencontre la surface $\sigma_1(L_1 \cap \{r < \frac{3}{2}\})$. Nous affirmons que ce choix de ϵ suffit pour établir la proposition.

On suppose le contraire, c'est-à-dire que l'orbite d'un point du type $\tau(\theta, r, -1)$ par \mathcal{K} , avec $\frac{3}{2} - \epsilon < r < \frac{3}{2}$, passe par le point en face $\tau(\theta, r, 1)$. Soit γ l'arc de Kuperberg entre ces deux points. On considère, parmi les arcs de Wilson qui forment γ , ceux dont la coordonnée r est strictement inférieure à $\frac{3}{2}$. Soit w l'un de ceux pour lequel la coordonnée r est maximale.

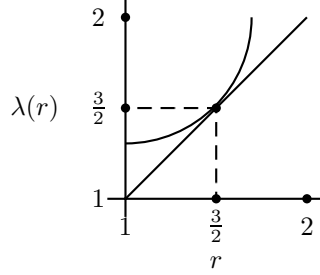
Considérons l'orbite du champ \mathcal{W} qui contient w , et soit $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$ la suite des arcs de Wilson dans cette orbite. Donc w coïncide avec l'un des ω_i , pour $1 \leq i \leq l$. On sait que cette orbite rencontre nécessairement une des surfaces $\sigma_1(L_1 \cap \{r < \frac{3}{2}\})$, $\sigma_2(L_2 \cap \{r < \frac{3}{2}\})$. Soit ω_j le premier des arcs de Wilson qui a son bout dans une de ces surfaces, on peut supposer que $j \geq i$, l'autre cas étant analogue. Donc les arcs $\omega_i, \omega_{i+1}, \dots, \omega_{j-1}$ ont comme bouts des points d'entrée secondaire dans $\sigma_1(L_1 \cap \{r > \frac{3}{2}\})$ ou $\sigma_2(L_2 \cap \{r > \frac{3}{2}\})$, par la définition de j . On a besoin du résultat suivant.

Lemme 1.2.5 *L'orbite par \mathcal{K} d'un point du type $\tau(\theta, r, -1)$, avec $r > \frac{3}{2}$, passe par $\tau(\theta, r, 1)$. De plus, elle contient tous les arcs de Wilson qui sont \mathcal{W} -entre $(\theta, r, -1)$ et $(\theta, r, 1)$.*

Si on suppose le lemme vrai on obtient que les $\tau(\omega_i), \tau(\omega_{i+1}), \dots, \tau(\omega_j)$ sont sur γ , l'arc de Kuperberg. L'image du bout de ω_j par σ_1^{-1} ou σ_2^{-1} est un point de la forme $(\bar{\theta}, \bar{r}, -1)$ avec $r < \bar{r} < 2$. Donc l'arc de Wilson \mathcal{K} -consécutif à ω_j a sa coordonnée r comprise entre celle de w et $\frac{3}{2}$. Mais on avait choisi w l'arc avec la coordonnée r maximale, alors on a trouvé une contradiction. \square

Il manque seulement de prouver le lemme 1.2.5 qu'on a utilisé.

Preuve de 1.2.5. La condition du rayon implique qu'il existe une fonction $\lambda : [1, 2] \rightarrow [1, 2]$ croissante telle que $\lambda(r) > r$ si $r \neq \frac{3}{2}$, et $\lambda(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$, et telle que si σ_1 ou σ_2 envoient le point $(\tilde{\theta}, \tilde{r}, \tilde{z})$ sur (θ, r, z) on a que $\tilde{r} \geq \lambda(r)$. La suite $\lambda^{-n}(2)$ est décroissante et tend vers $\frac{3}{2}$.



Alors si $r > \frac{3}{2}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda^{-(n+1)}(2) < r \leq \lambda^{-n}(2)$, on va montrer le lemme par récurrence sur n . Si $n = 0$, l'arc de Wilson qui commence dans $(\theta, r, -1)$ n'intercepte pas les images des langues $L_i \times [-1, 1]$ par σ_1 et σ_2 , donc il arrive au point $(\theta, r, 1)$.

Soit $n > 0$ tel que $\lambda^{-(n+1)}(2) < r < \lambda^{-n}(2)$ et w_1, w_2, \dots, w_k les arcs de Wilson qui sont \mathcal{W} -entre $(\theta, r, -1)$ et $(\theta, r, 1)$. On veut montrer que $\tau(w_i)$, pour $i = 1, 2, \dots, k$, est dans l'orbite de $\tau(\theta, r, -1)$ par rapport à \mathcal{K} . On prend j le dernier indice tel que $\tau(w_j)$ appartient à l'orbite, on veut montrer que $j = k$. Si ce n'est pas le cas, le bout de w_j est une entrée secondaire, et l'arc \mathcal{K} -consécutif a comme origine un point $(\tilde{\theta}, \tilde{r}, -1)$ avec $\lambda^{-n}(2) < \tilde{r}$. Donc il existe $m \leq n$ tel que $\lambda^{-m}(2) < \tilde{r} < \lambda^{-m+1}(2)$, et par hypothèse de récurrence l'orbite du point $\tau(\tilde{\theta}, \tilde{r}, -1)$ passe par $\tau(\tilde{\theta}, \tilde{r}, 1)$. L'image de $(\tilde{\theta}, \tilde{r}, 1)$ par σ_1 ou σ_2 est le point d'origine de l'arc w_{j+1} , donc $\tau(w_{j+1})$ est dans l'orbite du champ \mathcal{K} qui passe par $\tau(\theta, r, -1)$, ce qu'est une contradiction à la définition de j .

□

On conclut qu'aucun piège de Kuperberg construit avec un piège de Wilson où le champ est tangent aux cylindres $\{r = \text{const.}\}$ et qui satisfait la condition du rayon ne peut pas préserver un volume. D'ailleurs cette condition est nécessaire pour la preuve de l'apériodicité du piège.

Chapitre 2

Pièges qui préservent un volume

2.1 Flots qui préservent une forme volume

On va étudier les champs qui préservent un volume et les feuilletages qu'ils engendrent. Pour un champ de vecteurs différentiable V sur \mathbb{R}^n , avec le système de coordonnées canonique, on a comme conséquence du théorème de Liouville que si la divergence $\mathbf{div}(V)$ est nulle le flot engendré préserve le volume $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. Par définition, une structure de volume différentiable dans une variété lisse de dimension n est donné par une n -forme non nulle de classe C^∞ , qu'on appelle une *forme volume*. Pour une forme volume α dans une variété M , la divergence d'un champ de vecteurs V dans l'espace tangent devient la dérivé de Lie

$$\mathbf{L}_V(\alpha) = d(\iota_V(\alpha)),$$

où d est la différentielle extérieure et ι_V est la contraction par V . De manière équivalente, si M est une variété fermée on peut définir un flot comme une action différentiable du groupe \mathbb{R} , $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$. On dit que le champ V engendre le flot ϕ si

$$V(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(t, x),$$

pour tout $x \in M$. Donc si la divergence de V est nulle, le flot ϕ préserve la forme volume α . Alors α est constante le long des orbites de ϕ , c'est-à-dire $\alpha(x) = (\phi_t)^*\alpha(x)$ où $(\phi_t)^*$ est le tiré en arrière par le difféomorphisme ϕ_t , correspondant au flot à un temps fixe t .

Les trajectoires de V sont déterminées par la $(n-1)$ -forme fermée $\beta = \iota_V(\alpha)$ de la façon suivante : β a un noyau de dimension 1 en chaque point de M où elle

est différente de 0. Le champ de vecteurs V est contenu dans le noyau de β , les points où β est nulle sont les singularités de V .

Par ailleurs, comme la contraction par V est une transformation inversible et linéaire, si on se donne une $(n - 1)$ -forme fermée β et une forme volume α , on trouve un champ de vecteurs V tel que $\beta = \iota_V(\alpha)$. Alors le flot engendré par V préserve α .

Si V n'a pas de singularités, les orbites du flot associé forment un feuilletage non singulier \mathcal{H} de dimension 1 sur M . La ex-conjecture de Seifert peut être formulé en termes de feuilletages : *tout feuilletage non singulier de dimension 1 sur \mathbb{S}^3 (ou bien sur une variété fermée de dimension trois) a une feuille fermée.*

En général, une mesure sur un feuilletage de dimension 1 d'une variété de dimension n , est définie comme une mesure pour tout $(n - 1)$ -disque transverse invariant par isotopie parallèle au feuilletage. Dans le cas des champs qui préservent une forme volume sur une variété M de dimension 3, le feuilletage \mathcal{H} est défini par la 2-forme fermée β comme l'unique feuilletage parallèle au noyau de β . Alors, si on prend un disque D^2 plongé transversalement à \mathcal{H} par $i : D^2 \rightarrow M$, la mesure sur le disque est défini par le tiré en arrière $i^*(\beta)$, qui est une forme volume différentiable. Donc β détermine une mesure sur le feuilletage \mathcal{H} .

Dans le cas où $n = 2$, la 1-forme β est la différentielle d'une fonction F , probablement multivalué. On obtient un champ de vecteurs V et le flot engendré ϕ . Les orbites de ϕ sont les courbes de niveau de F . Si en plus M est une variété orientée munie d'une métrique riemannienne et si la forme α est la forme volume associée cette métrique, on a que le champ V est déterminé par l'équation

$$V = e^{\frac{\pi i}{2}} \nabla F,$$

car $\text{div}(V) = 0$. On dit que V est le champ hamiltonien associé à F .

Pour nous, un flot de classe C^r qui préserve un volume est engendré par un champ de vecteurs de classe C^r , dont la divergence est nulle par rapport à une forme volume de classe C^∞ dans une variété lisse de dimension trois.

Signalons en passage deux résultats concernant l'équivalence de mesures dans une variété. Le premier, d'Oxtoby et Ulam publié en 1941 dans l'article [OU41], établi que deux mesures de probabilité μ_1 et μ_2 dans une variété compacte et connexe M qui ont les propriétés :

- μ_i n'a pas d'atomes, c'est-à-dire $\mu_i(\{\cdot\}) = 0$;
- pour tout ouvert $\Omega \subset M$ non vide $\mu_i(\Omega) > 0$;
- $\mu_i(\partial M) = 0$;

sont homéomorphes. C'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme $h : M \rightarrow M$ tel que $\mu_1(\Omega) = \mu_2(h(\Omega))$ pour tout $\Omega \subset M$. En plus si on prend un homéomorphisme $g : M \rightarrow M$, on peut choisir h à manière que $h|_{\partial M} = g|_{\partial M}$. En particulier h peut être l'identité sur ∂M . Ceci est équivalent à dire qu'il n'y a qu'une mesure de probabilité sur M , à homéomorphisme près.

Pour deux formes volume α_1 et α_2 dans une variété M de classe C^∞ , compacte et connexe, on dira qu'elles sont difféomorphes s'il existe un difféomorphisme f de M tel que $\alpha_1 = \alpha_2 \cdot f$. Le deuxième résultat dû à J. Moser [Mos65], établit que α_1

est difféomorphe à $a \cdot \alpha_2$ où

$$a = \frac{\int_M \alpha_1}{\int_M \alpha_2} \in \mathbb{R}.$$

Dans les sections suivantes on va construire un piège de Wilson qui préserve un volume, et on montrera qu'on ne peut pas faire une construction à la Kuperberg pour obtenir un piège qui préserve un volume sans orbites périodiques. Une caractéristique importante des flots qui préservent une forme volume α en dimension trois et que leur feuilletage \mathcal{H} est transversalement symplectique, c'est-à-dire qu'il existe une forme symplectique $\iota_V(\alpha)$, où V est le champ de vecteurs associé, définie sur toute surface transversale à \mathcal{H} , qui est invariante par le pseudogroupe d'holonomie.

Comme on l'a déjà mentionné G. Kuperberg a montré qu'il existe des flots de classe C^∞ qui préservent un volume avec un nombre fini d'orbites périodiques, donc la construction d'un piège sans orbites périodiques qui préserve un volume permettrait de trouver des contre-exemples à la conjecture de Seifert de classe C^∞ dans ce cas. De même pour les flots analytiques réels ou PL (*piecewise linear*), car le théorème de G. Kuperberg est aussi valide pour ces classes. Il a aussi construit des contre-exemples de classe C^1 .

En contraste, d'après le théorème d'Hofer [Hof93], un flot de Reeb d'une forme de contact sur \mathbb{S}^3 possède une orbite périodique. Une structure de contact en dimension trois, est un champ C^∞ de plans non intégrable. Donc elle est défini par le noyau d'une 1-forme λ telle que $\lambda \wedge d\lambda$ est un volume. Cette forme est une forme de contact. Le champ de vecteurs de Reeb (de contact) V associé à λ est défini par $\iota_V(d\lambda) = 0$ et $\lambda(V) = 1$. Le résultat de Hofer établit que le champ de Reeb d'une 1-forme de contact λ sur \mathbb{S}^3 a une orbite périodique. Ce champ préserve la structure de contact. Parmi les champs qui préservent cette structure, ceux de Reeb sont ceux qui sont transverses aux plans.

Le théorème d'Hofer est un cas particulier de la conjecture de Weinstein : *soit M une variété munie d'une forme de contact λ , alors le feuilletage dirigé par le noyau de $d\lambda$ a une feuille compacte* [Lau95]. Alors si on cherche des champs sans orbites périodiques sur \mathbb{S}^3 , ils ne peuvent pas être des champs de Reeb associés à une forme de contact et les exemples de G. Kuperberg ne préservent pas de forme de contact.

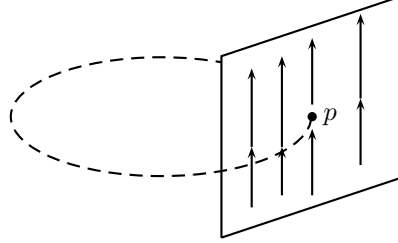
2.2 Piège de Wilson qui préserve le volume

On commence par montrer que le piège \mathcal{P} construit dans 1.1 ne préserve pas de volume.

Proposition 2.2.1 *Le piège \mathcal{P} muni du champ de vecteurs \mathcal{W} , ne peut pas préserver de volume.*

Preuve. Plus précisément on veut montrer que le champ de vecteurs \mathcal{W} ne préserve pas une forme volume α . On commence par considérer un point p d'une des orbites périodiques et Σ le plan perpendiculaire à l'orbite. Pour un voisinage \mathcal{U}_0 de p , contenu dans Σ , on prend $\Phi : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}_1$ l'application de premier retour,

où $\mathcal{U}_1 = \Phi(\mathcal{U}_0) \subset \Sigma$. Le difféomorphisme Φ a un unique point fixe p et les autres points se déplacent verticalement, comme on montre dans le dessin.



Si Φ ne préserve pas la 2-forme $\iota_{\mathcal{W}}(\alpha)$, le champ de vecteurs \mathcal{W} ne peut pas préserver la 3-forme α . La forme $\iota_{\mathcal{W}}(\alpha)$ est non nulle sur Σ , c'est donc une forme volume. On va montrer qu'il n'existe pas de transformations avec le comportement de Φ , même seulement continues, qui préservent une 2-forme volume.

Lemme 2.2.2 Soit $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ ouverts dans \mathbb{R}^2 , et $h : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}_1$ un homéomorphisme qui préserve l'aire et qui préserve chaque feuille du feuilletage par droites verticales. Alors $h(x, y) = (x, y + \psi(x))$.

Preuve. Comme h préserve chaque droite $\{x = \text{const.}\}$, $h(x, y) = (x, g(x, y))$. Si h est différentiable on a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial g}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = 1,$$

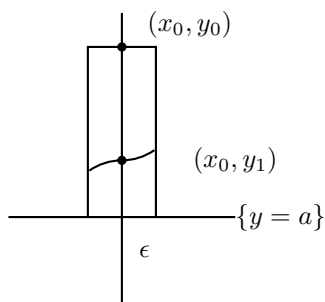
d'où $h(x, y) = (x, y + \psi(x))$, avec ψ différentiable.

Si h n'est pas différentiable, on prend une droite horizontale $\{y = a\}$ avec a une constante, tel que $\{y = a\} \cap \mathcal{U}_0 \neq \emptyset$. Son image par h est une courbe qu'on note $\psi(x) = h(x, a)$. Alors, $h(x, y) - \psi(x)$ est l'identité sur $\{y = a\}$. Soit

$$\tilde{h}(x, y) = h(x, y) - (0, \psi(x)) = (x, g(x, y) - \psi(x)).$$

C'est un homéomorphisme de \mathcal{U}_0 dans $\tilde{h}(\mathcal{U}_0)$ qui préserve l'aire, et $\tilde{h}(x, a) = (x, a)$ pour tout x tel que $(x, a) \in \mathcal{U}_0$.

Clairement $\mathcal{U}_0 \cap \tilde{h}(\mathcal{U}_0) \neq \emptyset$. Si \tilde{h} est l'identité on a fini. On suppose que \tilde{h} n'est pas l'identité sur \mathcal{U}_0 , alors il existe un point (x_0, y_0) tel que $\tilde{h}(x_0, y_0) = (x_0, y_1)$, avec $y_0 \neq y_1$. Il y a deux possibilités : $y_0 < y_1$ ou $y_0 > y_1$. Dans le cas où $y_0 > y_1$ on prend un rectangle de base ϵ sur la droite $\{y = a\}$ et altitude y_0 . On peut prendre ϵ assez petit de sorte que l'image du segment $[x_0 - \frac{\epsilon}{2}, x_0 + \frac{\epsilon}{2}] \times \{y_0\}$ soit disjointe d'elle-même.



Comme $\{y = a\}$ est invariante et \tilde{h} préserve l'aire, on trouve une contradiction car l'image du rectangle $[x_0 - \frac{\epsilon}{2}, x_0 + \frac{\epsilon}{2}] \times [a, y_0]$ est contenue proprement dans lui-même, et le volume d'un ouvert est positif. On fait pareille pour le cas $y_0 < y_1$. Alors \tilde{h} est l'identité et $h(x, y) = (x, y + \psi(x))$.

□

Ceci implique que Φ ne peut pas préserver une forme d'aire (2-forme volume) car si un homéomorphisme de \mathcal{U}_0 dans \mathcal{U}_1 , qui préserve les droites verticales et l'aire, fixe un point, il doit fixer toute la droite qui contient ce point. Alors \mathcal{W} ne peut pas préserver de volume.

□

Nous avons vu que pour avoir un piège qui préserve le volume on a besoin que l'ensemble des orbites piégées soit d'intérieur vide, mais la proposition précédente montre que ceci ne suffit pas. Pour construire un piège qui préserve le volume on va modifier un peu la deuxième construction décrite dans 1.1.

On considère la variété $P = \mathbb{S}^1 \times R$ avec les coordonnées (θ, r, z) , et on va la munir d'un champ de vecteurs qui préserve un volume pour qu'elle soit un piège. On commence par considérer un champ de vecteurs hamiltonien avec un point fixe dans le rectangle $R = [1, 2] \times [-1, 1]$, avec les coordonnées (r, z) . Par exemple on prend le polynôme

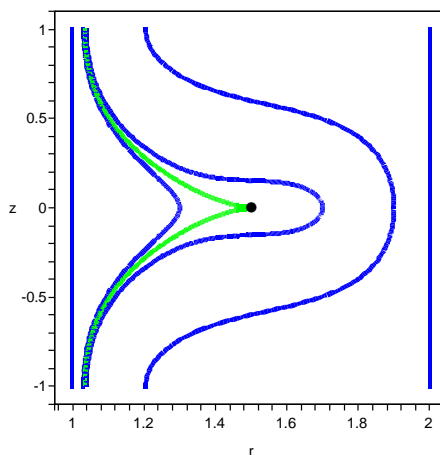
$$f(r, z) = -\left(r - \frac{3}{2}\right)^3 - z^2,$$

qui engendre le champ de vecteurs H_1

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial f}{\partial z} = -2z \\ \dot{z} &= -\frac{\partial f}{\partial r} = 3\left(r - \frac{3}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Le champ qu'on cherche doit être vertical dans un voisinage du bord de R et égal à H_1 dans un voisinage de la singularité de H_1 . On peut modifier le polynôme f et obtenir une fonction F , tel que les orbites de son champ associé H_2 soient comme celles décrites dans la figure 2.1. Dans un voisinage de $(\frac{3}{2}, 0)$ les champs de vecteurs H_1 et H_2 coïncident.

En suivant la construction de Wilson, on considère dans $P = \mathbb{S}^1 \times R$ le champ de vecteurs H_3 tangent à $\{\cdot\} \times R$ qui se projette sur H_2 . Ce champ de vecteurs préserve

FIG. 2.1 – Trajectoires de H_2 .

une forme volume et a un cercle de singularités. Pour qu'il soit non singulier, on prend une fonction $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ nulle dans un voisinage du bord de R et positive dans la singularité de H_2 , qui se trouve au point $(\frac{3}{2}, 0)$. Donc le champ de vecteurs défini par la somme $H = H_3 + f \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}$ est non singulier avec une orbite périodique. De plus, comme f ne dépend que de r et z , les deux termes ont une divergence nulle.

Le champ de vecteurs H est vertical dans un voisinage du bord de P , et l'ensemble des orbites piégées est un cercle dans $\mathbb{S}^1 \times [1, 2] \times \{-1\}$. Pour s'assurer de que la condition d'entrée-sortie (toute trajectoire de H qui entre dans P et sort, sort en face de son entrée) soit satisfaite on colle deux copies de P . C'est-à-dire sur P on colloque une copie P' de P avec la direction des orbites inversée, de sorte que l'entrée de P' est la sortie de P .

On obtient ainsi un piège de Wilson \mathcal{P} , muni du champ de vecteurs \mathcal{H} qui préserve un volume et qui contient deux orbites périodiques. On ne peut pas utiliser ce piège pour montrer l'analogie du théorème de Wilson 1.1.1 dans le cas de préservation de volume : l'ensemble d'orbites piégées est un cercle, ceci nous empêche de trouver dans un flot donné V une collection finie de boîtes à flot, telle que quand on plonge \mathcal{P} dedans les images du cercle rencontrent toutes les orbites du flot V . Comme on a dit avant ce théorème a été prouvé par G. Kuperberg, sa démonstration utilise des chirurgies de Dehn.

2.3 Feuilletages singuliers

D'abord on va étudier localement les feuilletages du plan qu'on a utilisé en 2.2 pour construire le piège de Wilson qui préserve un volume. Soit $F(x, y)$ un polynôme

dans \mathbb{R}^2 . On prend F tel que le champ de vecteurs hamiltonien associé

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial F}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial F}{\partial x}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

a une singularité isolée à l'origine et les courbes de niveau $\{F = \text{const.}\}$ sont homéomorphes à un intervalle dans un voisinage de $(0,0)$. Les courbes $\{F = \text{const.}\}$ sont aussi les orbites de flot engendré par le champ 2.1. Ce flot préserve la forme d'aire $dx \wedge dy$ du plan. On a un corollaire du lemme 2.2.2.

Corollaire 2.3.1 *Soit \mathcal{V} le feuilletage par droites verticales $\{x = \text{const.}\}$ et soit \mathcal{F} le feuilletage donné par les courbes de niveau de F . Alors il n'existe pas d'homéomorphisme h défini dans un voisinage de l'origine, qui préserve l'aire et qui envoie le feuilletage \mathcal{F} sur \mathcal{V} .*

Preuve. On va considérer les feuilles de \mathcal{F} comme les courbes solutions du champ de vecteurs 2.1, et soit ϕ_F^t le flot engendré. On prend ϕ_F^1 le difféomorphisme défini par le flot au temps égal à 1. La transformation ϕ_F^1 préserve l'aire, chaque feuille de \mathcal{F} et fixe l'origine.

On suppose, par l'absurde, qu'il existe h un homéomorphisme défini sur un voisinage de $(0,0)$ qui préserve l'aire et qui envoie le feuilletage \mathcal{F} sur \mathcal{V} . L'homéomorphisme $\xi = h \cdot \phi_F^1 \cdot h^{-1}$ préserve l'aire et chaque feuille du \mathcal{V} , alors par le lemme 2.2.2 $\xi(x, y) = (x, y + \psi(x))$. Mais ξ fixe le point $h(0,0)$, et les points sur la verticale $x = h(0,0)$ ne sont pas fixés, car l'unique point fixé par ϕ_F^1 est l'origine. Alors ξ ne peut pas être de la forme $\xi(x, y) = (x, y + \psi(x))$, d'où la contradiction. \square

Par ailleurs, comme conséquence du théorème de la boîte à flot, on a que dans un voisinage d'un point non-singulier p du champ de vecteurs 2.1 il existe un difféomorphisme α_F qui préserve l'aire et qui envoie le feuilletage \mathcal{F} sur \mathcal{V} , car α_F est construit à partir du flot engendré par 2.1 qui préserve l'aire. Soit G un autre polynôme avec les mêmes caractéristiques que F , et \mathcal{G} le feuilletage défini par ses courbes de niveau. En utilisant les difféomorphismes du théorème de la boîte à flot, on obtient qu'il existe un difféomorphisme défini dans un voisinage de p , qui préserve l'aire et envoie les feuilles de \mathcal{F} sur celles de \mathcal{G} .

Dorénavant on va dire que deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G} sont équivalents dans un voisinage \mathcal{U} d'un point p , s'il existe un homéomorphisme h qui préserve l'aire défini dans \mathcal{U} et qui envoie les feuilles de \mathcal{F} sur celles de \mathcal{G} . La discussion précédente implique que si p est un point singulier (respectivement régulier) du feuilletage \mathcal{F} , $h(p)$ est un point singulier (resp. régulier) de \mathcal{G} .

Proposition 2.3.2 *On considère les polynômes*

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x^p - y^2 \\ G(x, y) &= x^q - y^2. \end{aligned}$$

Les feuilletages associées \mathcal{F} et \mathcal{G} sont équivalents si et seulement si $p = q$.

Preuve. Pour fixer les idées on considère le cas des polynômes

$$\begin{aligned} F(x, y) &= -x^3 - y^2 \\ G(x, y) &= -x^5 - y^2. \end{aligned}$$

Pour établir la proposition il faut montrer que leurs feuilletages ne sont pas équivalents. Dans la figure 2.2 sont représentés les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G} .

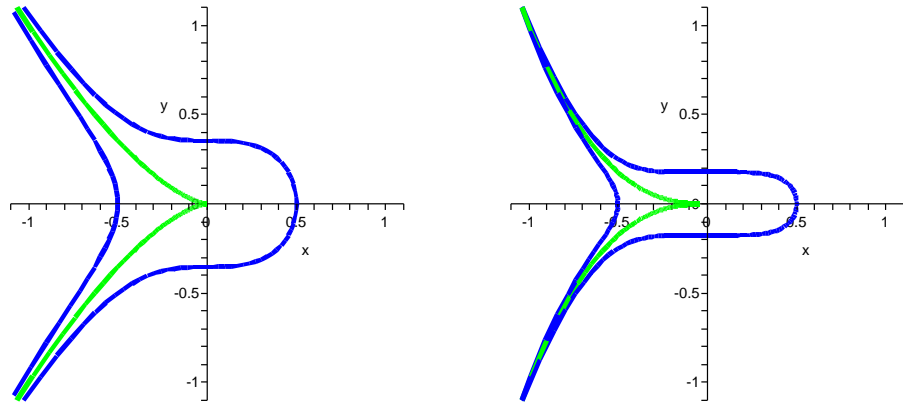


FIG. 2.2 – Feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G}

À partir d'ici on va noter la feuille $-x^3 - y^2 = c$ par \mathcal{F}_c . On suppose de nouveau que l'homéomorphisme qui réalise l'équivalence existe. Le corollaire 2.3.1 et le théorème de la boîte à flot impliquant que si l'homéomorphisme h qui donne lieu à l'équivalence existait, $h(\mathcal{F}_0) = \mathcal{G}_0$.

Soit R un fermé délimité par $\mathcal{F}_c, \mathcal{F}_d$ et les droites $\{y = a\}, \{y = a + \epsilon\}$ pour ϵ petit, tel qu'il ne contient pas l'origine, comme dans la figure 2.3. On appelle les *côtés* de R les deux parties des feuilles et les deux segments horizontaux contenus dans son bord. On choisit d, c et a de manière que :

- R ne contient pas l'origine ;
- les côtés de R sont des courbes lisses de longueur $\approx \epsilon$. Alors il existe un difféomorphisme qui préserve l'aire défini dans un voisinage de R , tel que les images des feuilles sont des droites verticales, et l'aire de R est de l'ordre de ϵ^2 .

Si on suppose que les feuilletages sont équivalents, c'est-à-dire qu'il existe h homéomorphisme qui préserve l'aire et qui envoie le feuilletage \mathcal{F} sur \mathcal{G} , $h(R)$ est délimité par deux feuilles $\mathcal{G}_{\bar{c}}, \mathcal{G}_{\bar{d}}$ et les images de $\{y = a\}, \{y = a + \epsilon\}$. Clairement $h(R)$ ne contient pas l'origine et son aire est de l'ordre de ϵ^2 .

Pour ϵ petit les côtés de $h(R)$ sur $\mathcal{G}_{\bar{c}}, \mathcal{G}_{\bar{d}}$ sont de longueur $\approx b \cdot \epsilon$ et la distance entre $\mathcal{G}_{\bar{c}}$ et $\mathcal{G}_{\bar{d}}$ de l'ordre de $\frac{\epsilon}{b}$. Pour finir la preuve on prend un fermé S délimité par $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_c$ et les droites $\{y = \pm \frac{\epsilon}{2}\}$, pour ϵ petit, comme dans la figure 2.3. On

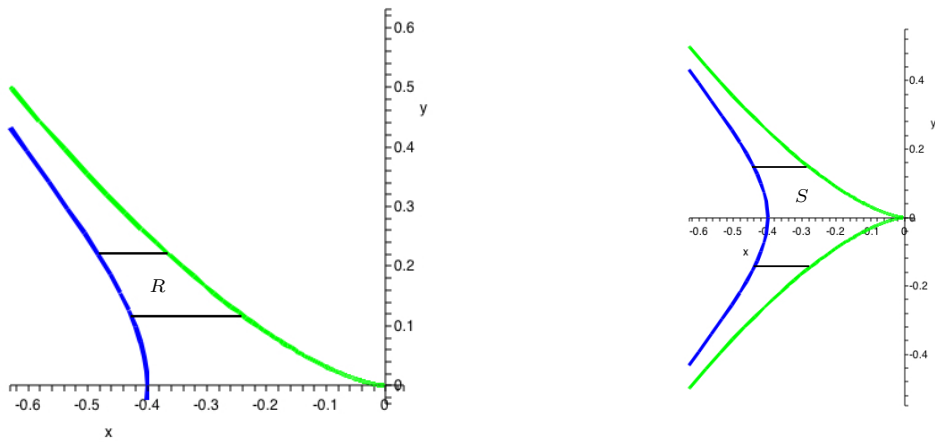


FIG. 2.3 – Régions R et S

choisit c de sorte que les côtés horizontaux sont de longueur ϵ . On a que

$$c = \left(\left(\frac{\epsilon}{2} \right)^{2/3} + \epsilon \right)^3 - \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^2.$$

On peut entourer S par une collection de régions du même type que R , comme dans la figure 2.4. Donc les longueurs des côtés de $h(S)$ varient linéairement en fonction de ϵ . L'aire de $h(S)$ doit être du même ordre que l'aire de S , car elles sont égales. On trouve une contradiction à l'existence de h en montrant que l'aire de S est de l'ordre de $\epsilon^{5/3}$ et celle de $h(S)$ de l'ordre de $\epsilon^{7/3}$.

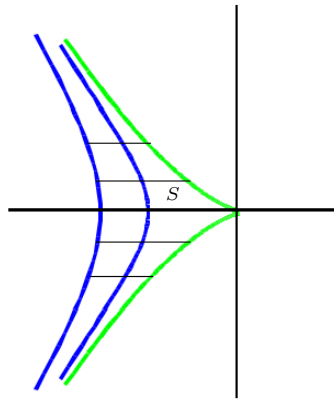


FIG. 2.4 – S entouré

L'aire de S est l'intégrale de la distance entre un point $(x, y) \in \mathcal{F}_0$ et le point $(x', y) \in \mathcal{F}_c$, où $y \in [-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}]$. Cette distance est $(c + y^2)^{1/3} - y^{2/3}$, donc l'aire de

S est donnée par

$$\int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} (c + y^2)^{1/3} - y^{2/3} dy = \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \left[\left(\left(\frac{\epsilon}{2} \right)^{2/3} + \epsilon \right)^3 - \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^2 + y^2 \right]^{1/3} - y^{2/3} dy.$$

D'où l'ordre de l'aire est $\epsilon^{5/3}$. L'aire de $h(S)$, pour ϵ suffisamment petit, peut être approchée en supposant que les côtés horizontaux sont des droites. On obtient que

$$\bar{c} = \left(\left(\frac{\epsilon}{2} \right)^{2/5} + \frac{\epsilon}{b} \right)^5 - \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^2.$$

On trouve que l'aire de $h(S)$ est de l'ordre de $\epsilon^{7/5}$, ce qu'est une contradiction.

Le cas général est analogue, pour les polynômes

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x^p - y^2 \\ G(x, y) &= x^q - y^2, \end{aligned}$$

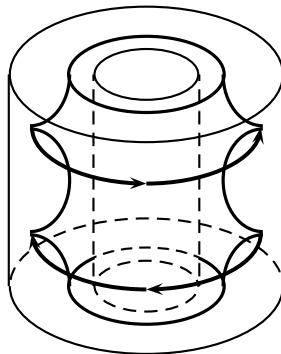
on a qu'un fermé comme S dans le feuilletage \mathcal{F} a son aire d'ordre $\epsilon^{\frac{p+2}{2}}$. Si on suppose qu'ils sont équivalents sous l'homéomorphisme h , alors l'aire de $h(S)$ est de l'ordre de $\epsilon^{\frac{q+2}{2}}$. Donc les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G} sont équivalents si et seulement si $p = q$.

□

Finalement on va voir la raison qui nous empêche construire un piège de Kuperberg à partir du piège \mathcal{P} muni du champ de vecteurs \mathcal{H} , décrite à la fin de la section 2.2. On observe que les orbites périodiques O_1 et O_2 de \mathcal{H} sont contenues dans un "cylindre" qui se projette par

$$(\theta, r, z) \mapsto (r, z)$$

sur deux copies de la feuille singulier du feuilletage associé au champ de vecteurs H_2 , et on lui appelle le *cylindre singulier*. Chacune des feuilles de ce feuilletage correspond à un *cylindre*.

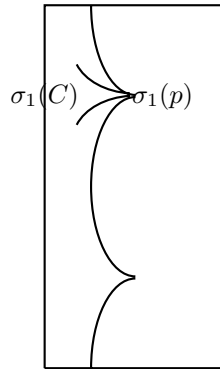


Pour essayer de construire un piège à la Kuperberg il faudrait insérer des parties de \mathcal{P} dans lui même et piéger les orbites périodiques. Soit L_1 un disque fermé dans l'entrée de \mathcal{P} , comme dans la construction du piège de Kuperberg. Plus précisément, l'entrée de \mathcal{P} est l'anneau $\mathbb{S}^1 \times [1, 2] \times \{-1\}$ et L_1 est delimité par deux arcs, un contenu dans l'intérieur de l'anneau et l'autre dans le bord extérieure $\mathbb{S}^1 \times \{2\} \times \{-1\}$.

On utilise la même notation que dans la section 1.2. On veut construire un plongement $\sigma_1 : L_1 \rightarrow \mathcal{P}$ avec les propriétés que dans la construction de K. Kuperberg et en plus σ_1 doit préserver un volume. Particulièrement on a besoin de l'existence d'un point d'entrée $p \in L_1$, contenu aussi dans le cylindre singulier, tel que $\sigma_1(p)$ est sur O_1 . Ceci est nécessaire pour piéger l'orbite périodique O_1 . On fait pareille pour piéger l'orbite O_2 avec un plongement $\sigma_2 : L_2 \rightarrow \mathcal{P}$ et $L_2 \subset \mathbb{S}^1 \times [1, 2] \times \{-1\}$.

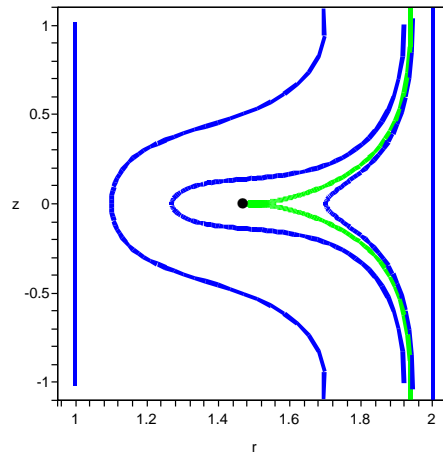
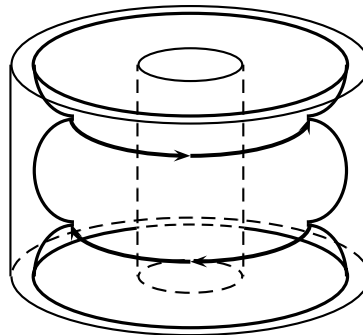
On utilise les coordonnées (θ, F) , où F est le valeur du polynôme F sur la feuille qui donne lieu au cylindre. La condition du rayon se traduit en la *condition du cylindre* : soit (θ, F) un point de L_1 et $(\bar{\theta}, \bar{F})$ son image sous σ_1 ou σ_2 , alors $F > \bar{F}$.

L'intersection de L_1 et le cylindre singulier est un arc de cercle qu'on appellera C . L'image de C sous σ_1 est une courbe que rencontre l'orbite O_1 . Comme consequence de la condition du cylindre l'unique point d'intersection entre le cylindre singulier et $\sigma_1(C)$ est le point $\sigma_1(p)$. Alors la courbe $\sigma_1(C)$ n'est pas différentiable et l'image du feuilletage donné par l'intersection des cylindres et L_1 , est un feuilletage avec une singularité du type cusp. Par le corollaire 2.3.1, σ_1 ne peut pas préserver de volume.

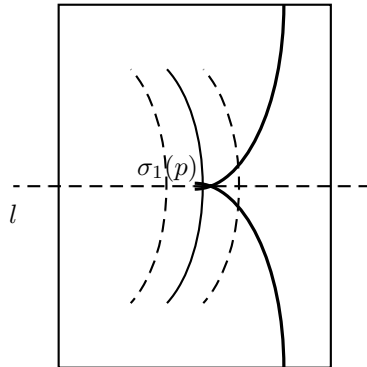


On pourrait penser changer la construction du champ \mathcal{H} pour éviter ce problème : on commence par prendre dans R le champ H'_2 qui est le symétrique du champ H_2 par rapport à la droite $\{r = \frac{3}{2}\}$, et a les orbites décrites dans la figure 2.5.

On suit la construction du champ de vecteurs \mathcal{H} et on obtient maintenant le flot \mathcal{H}' à l'intérieur de \mathcal{P} .

FIG. 2.5 – Trajectoires de H'_2 .

On veut montrer pourquoi c'est impossible de faire les insertions dans ce cas, on va utiliser la même notation qu'avant. Localement dans un plan transverse à l'orbite périodique qu'on veut piéger on voit le feuilletage correspondant à H'_2 et les images des arcs de cercle formées par l'intersection des cylindres avec L_1 . On va noter la coordonnée radiale sur les feuilles de H'_2 par r et celle des images sous σ_1 des arcs de cercle par \tilde{r} .



Si on se déplace sur la droite horizontale l qui passe par la singularité, on peut considérer les fonctions définies par le changement de r et \tilde{r} . Pour que σ_1 soit différentiable au point $\sigma_1(p)$ les deux fonctions doivent avoir la même dérivée dans ce point, mais la dérivée de la fonction r est 1 et celle de \tilde{r} est 0. Donc on ne peut pas faire les insertions classe C^∞ .

Bibliographie

- [Ghy95] É. Ghys. Construction de champs de vecteurs sans orbite périodique (d'après Krystyna Kuperberg). *Astérisque*, (227) :Exp. No. 785, 5, 283–307, 1995. Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94.
- [Har88] J. Harrison. C^2 counterexamples to the Seifert conjecture. *Topology*, 27(3) :249–278, 1988.
- [Hof93] H. Hofer. Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three. *Invent. Math.*, 114(3) :515–563, 1993.
- [Kup94] K. Kuperberg. A smooth counterexample to the Seifert conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 140(3) :723–732, 1994.
- [Kup96] G. Kuperberg. A volume-preserving counterexample to the Seifert conjecture. *Comment. Math. Helv.*, 71(1) :70–97, 1996.
- [Lau95] F. Laudenbach. Orbites périodiques et courbes pseudo-holomorphes, application à la conjecture de Weinstein en dimension 3 (d'après H. Hofer et al.). *Astérisque*, (227) :Exp. No. 786, 5, 309–333, 1995. Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94.
- [Mos65] J. Moser. On the volume elements on a manifold. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120 :286–294, 1965.
- [OU41] J. C. Oxtoby and S. M. Ulam. Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity. *Ann. of Math. (2)*, 42 :874–920, 1941.
- [Sch74] P. A. Schweitzer. Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations. *Ann. of Math. (2)*, 100 :386–400, 1974.
- [Sei50] H. Seifert. Closed integral curves in 3-space and isotopic two-dimensional deformations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1 :287–302, 1950.
- [Wil66] F. W. Wilson, Jr. On the minimal sets of non-singular vector fields. *Ann. of Math. (2)*, 84 :529–536, 1966.