Flujo geodésico y horocíclicos

Ana Rechtman

Recordatorio

Para $A \in PSL(2, \mathbb{R})$,

$$T_A(z, \theta) \quad = \quad \left(\frac{az + b}{cz + d}, \theta - \mathrm{Arg}(cz + d) \right).$$

Recordatorio

Para $A \in PSL(2, \mathbb{R})$,

$$T_A(z, \theta) \;=\; \left(\frac{az+b}{cz+d}, \theta - \mathrm{Arg}(cz+d)\right).$$

Teorema

La acción de $PSL(2, \mathbb{R})$ en $T^1\mathbb{H}$ es libre y transitiva.

Fijamos $(i, 0) = (i, v_0)$ e identificamos cada punto (z, θ) de $T^1\mathbb{H}$ con el único elemento $A \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que

$$T_A(i, 0) = (z, \theta).$$

Flujo geodésico

En general, en una variedad M con una métrica *completa*, el flujo geodésico vive en T^1M.

Sus órbitas corresponden a recorrer las geodésicas a velocidad constante (por eso los vectores son de norma 1).

Flujo geodésico

En general, en una variedad M con una métrica *completa*, el flujo geodésico vive en T^1M.

Sus órbitas corresponden a recorrer las geodésicas a velocidad constante (por eso los vectores son de norma 1).

Pueden tratar de pensar cuál es el flujo geodésico de $\mathbb{S}^2$.

Flujo geodésico

Fijamos $(i,0) = (i, v_0)$ e identificamos cada punto (z,θ) de $T^1\mathbb{H}$ con el único elemento $A \in PSL(2,\mathbb{R})$ tal que

$$T_A(i, v_0) = (z, v).$$

Definición

$g : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \to T^1\mathbb{H}$ *está definido*

$$g_t(z, v) = g_t(T_A(i, v_0)) = T_{AG_t}(i, v_0),$$

con

$$G_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

Flujo geodésico

$$\Delta = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^2 \, , \, x \neq y\}$$

Lema

Hay una biyección entre $\Delta \times \mathbb{R}$ y $T^1\mathbb{H}$.

Flujo geodésico

$$\Delta = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^2\, , \; x \neq y\}$$

Lema

Hay una biyección entre $\Delta \times \mathbb{R}$ y $T^1\mathbb{H}$.

En realidad es más que una biyección es un difeomorphismo.

Flujo geodésico

$$\Delta = \{(x, y) \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^2 \, , \, x \neq y\}$$

Lema

Hay una biyección entre $\Delta \times \mathbb{R}$ y $T^1\mathbb{H}$.

En realidad es más que una biyección es un difeomorphismo.

Proposición

Para toda $(x, y, s) \in \Delta \times \mathbb{R}$ y para toda $t \in \mathbb{R}$

$$\Gamma \cdot g_t \cdot \Gamma^{-1} : (x, y, s) \mapsto (x, y, s + t).$$

Flujo horocíclico positivo

Flujo horocíclico positivo

Definición

$h^+ : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \to T^1\mathbb{H}$ está definido

$$h_t^+(z,v) = h_t^+(T_A(i,v_0)) = T_{AH_t^+}(i,v_0),$$

con

$$H_t^+ = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Flujo horocíclico positivo

Definición

$h^+ : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \to T^1\mathbb{H}$ *está definido*

$$h_t^+(z, v) = h_t^+(T_A(i, v_0)) = T_{AH_t^+}(i, v_0),$$

con

$$H_t^+ = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sus órbitas se llaman horociclos positivos de $T^1\mathbb{H}$ y también las proyecciones de las órbitas a $\mathbb{H}$ se llaman horociclos.

Flujo horocíclico negativo

Flujo horocíclico negativo

Definición

$h^- : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \to T^1\mathbb{H}$ *está definido*

$$h_t^-(z, v) = h_t^-(T_A(i, v_0)) = T_{AH_t^-}(i, v_0),$$

con

$$H_t^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Flujo horocíclico negativo

Definición

$h^- : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \to T^1\mathbb{H}$ está definido

$$h_t^-(z, v) = h_t^-(T_A(i, v_0)) = T_{AH_t^-}(i, v_0),$$

con

$$H_t^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Sus órbitas se llaman horociclos negativos de $T^1\mathbb{H}$ y también las proyecciones de las órbitas a $\mathbb{H}$ se llaman horociclos.

Relación entre ambos flujos

Proposición

Para toda $s, t \in \mathbb{R}$ *tenemos que*

$$g_t \cdot h_s = h_{e^{-t}s} \cdot g_t.$$

Relación entre ambos flujos

Proposición

Para toda $s, t \in \mathbb{R}$ *tenemos que*

$$g_t \cdot h_s = h_{e^{-t}s} \cdot g_t.$$

Corolario

g_t *mapea horociclos en horociclos.*

Relación entre ambos flujos

Proposición

Para toda $s, t \in \mathbb{R}$ *tenemos que*

$$g_t \cdot h_s = h_{e^{-t}s} \cdot g_t.$$

Corolario

g_t *mapea horociclos en horociclos.*

Hace el horociclo positivo chico y el horociclo negativo grande...

Variedades estables e inestables

Definición

Sea $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$, la variedad estable del flujo geodésico es

$$W^s(z, v) = \{(x, w) \in T^1\mathbb{H} \,|\, lim_{t\to+\infty} d(g_t(z, v), g_t(x, w)) = 0\}$$

y la variedad inestable del flujo geodésico es

$$W^u(z, v) = \{(x, w) \in T^1\mathbb{H} \,|\, lim_{t\to-\infty} d(g_t(z, v), g_t(x, w)) = 0\}.$$

Variedades estables e inestables

Definición

Sea $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$*, la variedad estable del flujo geodésico es*

$$W^s(z, v) = \{(x, w) \in T^1\mathbb{H} \,|\, lim_{t\to+\infty} d(g_t(z, v), g_t(x, w)) = 0\}$$

y la variedad inestable del flujo geodésico es

$$W^u(z, v) = \{(x, w) \in T^1\mathbb{H} \,|\, lim_{t\to-\infty} d(g_t(z, v), g_t(x, w)) = 0\}.$$

Observación

$W^s(z, v) = W^u(z - v)$.

Variedades estables e inestables

Proposición

El horociclo positivo de (z, v) *en* $T^1\mathbb{H}$*, es decir* $\{h_t(z, v), t \in \mathbb{R}\}$*, es la variedad estable* $W^s(z, v)$*).*

Variedades estables e inestables

Proposición

El horociclo positivo de (z, v) *en* $T^1\mathbb{H}$*, es decir* $\{h_t(z, v), t \in \mathbb{R}\}$*, es la variedad estable* $W^s(z, v)$*).*
Además, para todo $(x, w) \in W^s(z, v)$ *tenemos que*

$$lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} log(d(g_t(z, v), g_t(x, w))) < 0.$$

Flujos de Anosov

Definición

Un flujo definido por un campo vectorial X en una variedad M es de Anosov si

$$TM = \langle X \rangle \oplus E^s \oplus E^u,$$

y E^2, E^u son invariantes bajo el flujo. Además, las distancias son expandidas exponencialmente en una dirección y contraídas exponencialmente en otra dirección.

Flujos de Anosov

Definición

Un flujo definido por un campo vectorial X en una variedad M es de Anosov si

$$TM = \langle X \rangle \oplus E^s \oplus E^u,$$

y E^2, E^u son invariantes bajo el flujo. Además, las distancias son expandidas exponencialmente en una dirección y contraídas exponencialmente en otra dirección.

El flujo geodésico de $T^1\mathbb{H}$ es de Anosov (de hecho basta que la curvatura sea negativa). Las tres direcciones dividen a $T(T^1\mathbb{H})$ que es álgebra de Lie de $PSL(2,\mathbb{R})$ y esta definida por las matrices de traza 0.