Flujo geodésico y horocíclicos

Ana Rechtman

Recordatorio

Geometrías no euclidianas

¿Cumplen con los primeros cuatro postulados de Euclides?

Recordatorio

Geometrías no euclidianas

¿Cumplen con los primeros cuatro postulados de Euclides?

1. Todo par de puntos definen una geodésica.
2. Toda geodésica puede ser continuada infinitamente en ambas direcciones.
3. *Dado un punto y una longitud, se puede dibujar un círculo.*
4. Todos los ángulos rectos son iguales.

Recordatorio

Geometrías no euclidianas

¿Cumplen con los primeros cuatro postulados de Euclides?

1. Todo par de puntos definen una geodésica.
2. Toda geodésica puede ser continuada infinitamente en ambas direcciones.
3. *Dado un punto y una longitud, se puede dibujar un círculo.*
4. Todos los ángulos rectos son iguales.

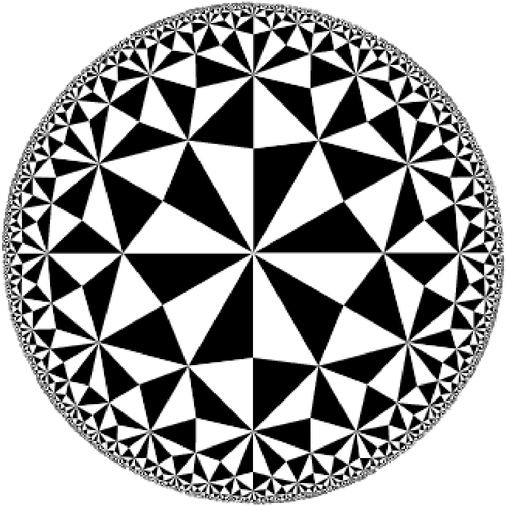
¿Qué cambia?

Teselaciones por polígonos

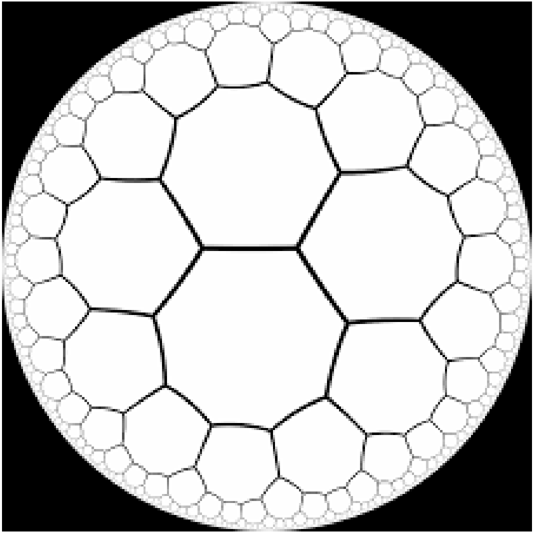
Todo polígono tesela el plano hiperbólico

Teselaciones por polígonos

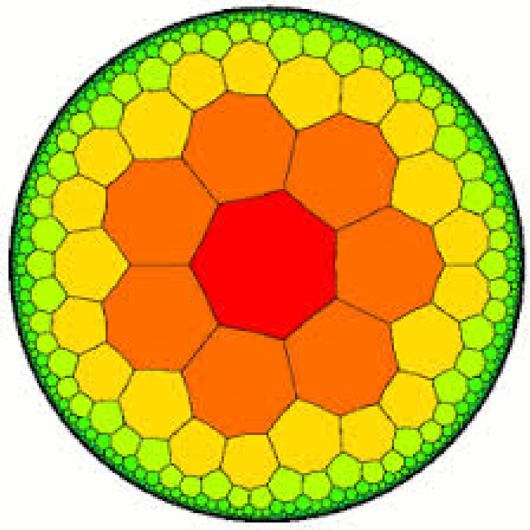
Todo polígono tesela el plano hiperbólico o el disco de Poincaré.



Teselaciones por polígonos



Teselaciones por polígonos



Teselaciones por polígonos

Recordatorio

$PSL(2,\mathbb{R}) = Aut(\mathbb{H})$ actua en $\mathbb{H}$ por transformaciones de Möbius.

Recordatorio

$PSL(2,\mathbb{R}) = Aut(\mathbb{H})$ actua en $\mathbb{H}$ por transformaciones de Möbius. Estas son isometrías, por lo que mandan geodésicas en geodésicas.

Recordatorio

$PSL(2,\mathbb{R}) = Aut(\mathbb{H})$ actua en $\mathbb{H}$ por transformaciones de Möbius.
Estas son isometrías, por lo que mandan geodésicas en geodésicas.

Proposición

La acción de $PSL(2,\mathbb{R})$ *en* $\mathbb{H}$ *es fiel y transitiva.*

Recordatorio

$PSL(2,\mathbb{R}) = Aut(\mathbb{H})$ actua en $\mathbb{H}$ por transformaciones de Möbius.
Estas son isometrías, por lo que mandan geodésicas en geodésicas.

Proposición

La acción de $PSL(2,\mathbb{R})$ *en* $\mathbb{H}$ *es fiel y transitiva.*

¿Cuál es el estabilizador de i?

¿El estabilizador de cualquier otro punto?

Espacio tangente y flujos

Espacio tangente y flujos

$$T\mathbb{H} = \{(z, v)\} = \mathbb{H} \times \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^4$$

Espacio tangente y flujos

$$T\mathbb{H} = \{(z, v)\} = \mathbb{H} \times \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^4$$

$$T^1\mathbb{H} = \{(z, v) \mid |v| = 1\} = \mathbb{H} \times \mathbb{S}^1 = \{(z, \theta)\}$$

Espacio tangente y flujos

$$T\mathbb{H} = \{(z, v)\} = \mathbb{H} \times \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^4$$

$$T^1\mathbb{H} = \{(z, v) \,|\, |v| = 1\} = \mathbb{H} \times \mathbb{S}^1 = \{(z, \theta)\}$$

Una distancia

$$d((z, \theta), (w, \beta)) = d(z, w) + \min|\theta - \beta|$$

Acción de $PSL(2, \mathbb{R})$

Acción de $PSL(2, \mathbb{R})$

$$T_A(z, \theta) = (f_A(z), \theta - \mathrm{Arg}(cz + d))$$

Teorema

La acción de $PSL(2, \mathbb{R})$ en $T^1\mathbb{H}$ es libre y transitiva.

Acción de $PSL(2,\mathbb{R})$

$$T_A(z,\theta) = (f_A(z), \theta - \mathrm{Arg}(cz+d))$$

Teorema

La acción de $PSL(2,\mathbb{R})$ en $T^1\mathbb{H}$ es libre y transitiva.

Fijamos $(i,0) = (i, v_0)$ e identificamos cada punto (z,θ) de $T^1\mathbb{H}$ con el único elemento $A \in PSL(2,\mathbb{R})$ tal que

$$T_A(i,0) = (z,\theta).$$

Flujo geodésico

Flujo geodésico

Fijamos $(i, 0) = (i, v_0)$ e identificamos cada punto (z, θ) de $T^1\mathbb{H}$ con el único elemento $A \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que

$$T_A(i, v_0) = (z, v).$$

Definición

$g : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \to T^1\mathbb{H}$ está definido

$$g_t(z, v) = g_t(T_A(i, v_0)) = T_{AG_t}(i, v_0),$$

con

$$G_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

Flujo geodésico

Fijamos $(i, 0) = (i, v_0)$ e identificamos cada punto (z, θ) de $T^1\mathbb{H}$ con el único elemento $A \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que

$$T_A(i, v_0) = (z, v).$$

Definición

$g : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \to T^1\mathbb{H}$ *está definido*

$$g_t(z, v) = g_t(T_A(i, v_0)) = T_{AG_t}(i, v_0),$$

con

$$G_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

¿Es un flujo?

Flujo geodésico

Lema

Todo punto se va al infinito, en tiempo pasado y futuro.

Lema

Todo punto se va al infinito, en tiempo pasado y futuro.

Para (z, v) llamaremos v^+ y v^- los puntos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Flujo geodésico

Lema

Todo punto se va al infinito, en tiempo pasado y futuro.

Para (z, v) llamaremos v^+ y v^- los puntos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Lema

El flujo geodésico es invariante bajo isometrías (que preservan o no la orientación).

Flujo horocíclico (positivo)

Flujo horocíclico (positivo)

Definición

$h : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \to T^1\mathbb{H}$ está definido

$$h_t(z, v) = h_t(T_A(i, v_0)) = T_{AH_t}(i, v_0),$$

con

$$H_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Flujo horocíclico (positivo)

Definición

$h : \mathbb{R} \times T^1\mathbb{H} \to T^1\mathbb{H}$ está definido

$$h_t(z, v) = h_t(T_A(i, v_0)) = T_{AH_t}(i, v_0),$$

con

$$H_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sus órbitas se llaman horociclos (positivos) de $T^1\mathbb{H}$ y también las proyecciones de las órbitas a $\mathbb{H}$ se llaman horociclos.

Flujo horocíclico (positivo)

Proposición

Los horociclos satisfacen las siguientes propiedades:

1. *Por todo* $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ *pasa un único horociclo.*

Flujo horocíclico (positivo)

Proposición

Los horociclos satisfacen las siguientes propiedades:

1. *Por todo* $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ *pasa un único horociclo.*

2. *El flujo horocíclico es invariante bajo isometrías que preservan la orientación, es decir, transformaciones de Möbius.*

Flujo horocíclico (positivo)

Proposición

Los horociclos satisfacen las siguientes propiedades:

1. *Por todo* $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ *pasa un único horociclo.*
2. *El flujo horocíclico es invariante bajo isometrías que preservan la orientación, es decir, transformaciones de Möbius.*
3. *Las proyecciones de los horociclos de* $T^1\mathbb{H}$ *son discos tangentes a* $\mathbb{R}$*, donde incluimos las rectas paralelas a* $\mathbb{R}$*.*

Flujo horocíclico (positivo)

Proposición

Los horociclos satisfacen las siguientes propiedades:

1. *Por todo* $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ *pasa un único horociclo.*

2. *El flujo horocíclico es invariante bajo isometrías que preservan la orientación, es decir, transformaciones de Möbius.*

3. *Las proyecciones de los horociclos de* $T^1\mathbb{H}$ *son discos tangentes a* $\mathbb{R}$*, donde incluimos las rectas paralelas a* $\mathbb{R}$*. La proyección del horociclo que pasa por* $(z, v) \in T^1\mathbb{H}$ *es el círculo orientado y tangente a* $-iv$ *en* z *y tangente a* $\mathbb{R}$ *en* v^+*.*