UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

La propiedad de Haagerup para *U(n,1)*

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
GONZALO EMILIANO RUIZ STOLOWICZ

Director de tesis
Dr. Pierre Casimir Py
Instituto de Matemáticas

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. octubre 2018

La propiedad de Haagerup para $U(n, 1)$

Gonzalo Emiliano Ruiz Stolowicz

Índice general

Introducción

El objetivo de este texto es exponer, siguiendo la demostración que dan Pierre-Alain Cherix, *et al.* en el libro *Groups with the Haagerup Property: Gromov's a-T-menability*,[1] que el grupo $U(n,1)$ tiene la propiedad de Haagerup. Por definición esto quiere decir que $U(n,1)$ admite una acción isométrica, fuertemente continua y propia en un espacio de Hilbert real.

En el primer capítulo se desarrolla el lenguaje de representaciones que se necesita para definir la propiedad de Haagerup. En este sentido las funciones de tipo positivo y las funciones de tipo negativo serán definidas, brevemente estudiadas y caracterizadas mediante las dos construcciones de Gelfand-Neimark-Segal, que aquí se presentarán. Con estas herramientas se probarán cuatro equivalencias de la propiedad de Haagerup. Una de ellas es la existencia de una función de tipo negativo y propia. En el tercer capítulo se demostrará que $U(n,1)$ admite una función de este tipo.

Se describirá la relación entre las acciones de un grupo en espacios de Hilbert reales por isometrías y un tipo de funciones definidas en el grupo llamadas cociclos. Utilizando esto se dará un método para construir representaciones afines que será fuente de ejemplos de grupos con la propiedad de Haagerup.

En el segundo capítulo se exponen algunos ejemplos de grupos con la propiedad de Haagerup, entre ellos los grupos promediables y los grupos que actúan propiamente en espacios con muros. Esta última familia, se mostrará, incluye a los grupos libres finitamente generados. También se darán condiciones suficientes para que a partir de una acción de un grupo en un espacio de medida se pueda concluir que dicho grupo tiene la propiedad de Haagerup.

En el tercer capítulo se muestra que $U(n,1)$ tiene la propiedad de Haagerup. Para ello se definirán las funciones de Busemann asociadas a rayos geodésicos en un espacio métrico y se estudiaran aquellas asociadas al espacio hiperbólico complejo. Se introducirán la frontera visual del espacio hiperbólico complejo y el mapeo visual asociado a cada punto del espacio hiperbólico complejo, y se obtendrán las fórmulas para cada una de estas funciones. En el espacio de formas diferenciales en la frontera visual con integral nula se definirá un producto escalar definido positivo y no degenerado. Se construirá una acción natural por transformaciones ortogonales de $U(n,1)$ en este espacio y utilizando los mapeos visuales se definirá una función equivariante en el espacio hiperbólico complejo con valores en las formas diferenciales de la frontera visual con integral cero y que cumple la condición de cociclo. De ahí se obtendrá la

[1] Pierre-Alain Cherix, *et al.*, *Groups with the Haagerup Property: Gromov's a-T-menability*, Basilea, Springer Basel AG, 2001.

función de tipo negativo propia para $U(n,1)$.

Capítulo 1

La propiedad de Haagerup

1.1. Funciones de tipo positivo y negativo

En esta sección se desarrollará el lenguaje en el que se describirá la propiedad de Haagerup en la siguiente sección. Aquí se sigue el tratamiento del tema que dan Bachir Bekka *et al.* en el libro *Kazhdan's Property (T)*.[1] En esta sección y en el resto del texto G será un grupo topológico y Hausdorff. Más adelante se supondrá además que G es localmente compacto y segundo numerable, y en estos últimos grupos se centrará el texto, pero para las construcciones hechas en esta sección no son necesarias esas hipótesis.

Se dirá que $(\mathcal{H}, \pi)$ es una *representación fuertemente continua* de G si π es un homomorfismo $G \xrightarrow{\pi} Homeo(\mathcal{H})$, con $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real o complejo, y si para toda $h \in \mathcal{H}$, la función $g \mapsto \pi(g)h$ es continua. Diremos que $(\mathcal{H}, \pi)$ es una *representación afín* de G si es una representación fuertemente continua, $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert real y para toda $g \in G$, $\pi(g)$ es una isometría de $\mathcal{H}$. Diremos que $(\mathcal{H}, \pi)$ es una representación ortogonal (unitaria) de G, si es una representación fuertemente continua, $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert real (complejo) y para toda $g \in G$, $\pi(g)$ es una transformación lineal ortogonal (unitaria) de $\mathcal{H}$.

Definición 1.1. *Una función continua $G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$ se dice de tipo positivo o definida positiva, si para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $\{g_1, \ldots, g_n\} \subset G$ y cada $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C}$,*

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_i \overline{z_j} \varphi(g_j^{-1} \cdot g_i) \geq 0.$$

Proposición 1.2. *Si $G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$ es una función definida positiva, se cumple:*
a) $\varphi(e) \geq 0$.
b) Para toda $g \in G$, $\varphi(g^{-1}) = \overline{\varphi(g)}$.
c) Para toda $g \in G$, $|\varphi(g)| \leq \varphi(e)$.

Demostración. a) Si $n = 1, g_1 = e$ y $z_1 = 1$, se deduce de la definición que $\varphi(e) \geq 0$.
b) Si $n = 2, g_1 = g, g_2 = e, z_1 = 1, z_2 = z$, entonces

$$\varphi(e) + \varphi(g)\overline{z} + \varphi(g^{-1})z + \varphi(e)|z|^2 \geq 0.$$

[1] Bachir Bekka, *et al.*, *Kazhdan's Property (T)*, Cambridge, Cambridge University Press, 2008.

Tomando $z = i$ se tiene $2\varphi(e) + i(\varphi(g^{-1}) - \varphi(g)) \geq 0$. Si $z = 1$, entonces

$$2\varphi(e) + \varphi(g) + \varphi(g^{-1}) \geq 0.$$

De esto se puede concluir que $i(\varphi(g^{-1}) - \varphi(g))$ y $\varphi(g^{-1}) + \varphi(g)$ son números reales, y por lo tanto, $\overline{\varphi(g)} = \varphi(g^{-1})$.
c) Supóngase $\varphi(e) = 0$ y sea $z = -\varphi(g)$. Se tiene, por la demostración de b), que $-2(|\varphi(g)|^2) \geq 0$. Entonces $\varphi(g) = 0$ para toda $g \in G$.

Ahora supóngase $\varphi(e) > 0$. Sea $z = -\varphi(g)\varphi(e)^{-1}$, entonces, por la demostración de b),

$$\begin{array}{rl} & \varphi(e) - \varphi(g)\overline{\varphi(g)\varphi(e)^{-1}} - \varphi(g^{-1})\varphi(g)\varphi(e)^{-1} + \varphi(e)\left|\varphi(g)\varphi(e)^{-1}\right|^2 \\ = & \varphi(e) - \varphi(g)\overline{\varphi(g)}\varphi(e)^{-1} - \overline{\varphi(g)}\varphi(g)\varphi(e)^{-1} + \left|\varphi(g)\right|^2\left|\varphi(e)^{-1}\right| \\ = & \varphi(e) - \left|\varphi(g)\right|^2\varphi(e)^{-1} - \left|\varphi(g)\right|^2\varphi(e)^{-1} + \left|\varphi(g)\right|^2\left|\varphi(e)^{-1}\right| \\ = & \varphi(e) - \left|\varphi(g)\right|^2\varphi(e)^{-1} \geq 0. \end{array}$$

Por lo tanto $\varphi(e) \geq |\varphi(g)|$, para toda $g \in G$. □

Proposición 1.3. *Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de G y sea $\eta \in \mathcal{H}$. La función $g \mapsto \langle \pi(g)\eta, \eta \rangle$ es de tipo positivo.*

Demostración. Sean $\{g_1, \ldots, g_n\} \subset G$ y $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C}$. Si $h = \sum_{i=1}^n z_i \pi(g_i)\eta$, entonces:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i,j=1}^n z_i \overline{z_j} \langle \pi(g_j^{-1} \cdot g_i)\eta, \eta \rangle & = & \sum_{i,j=1}^n z_i \overline{z_j} \langle \pi(g_i)\eta, \pi(g_j)\eta \rangle \\ & = & \langle h, h \rangle \\ & \geq & 0. \end{array}$$

□

En el siguiente teorema se mostrará que las funciones de tipo positivo de la proposición anterior son todas, es decir, cada función de tipo positivo de G es de esta forma para alguna representación unitaria $(\mathcal{H}, \pi)$ de G y algún vector $\eta \in \mathcal{H}$.

Una representación de G es *cíclica*, si es una representación unitaria $(\mathcal{H}, \pi)$, para la cual existe $\eta \in \mathcal{H}$ tal que $\mathcal{H} = \overline{\langle \{\pi(g)\eta\} \rangle}_{g \in G}$. En el próximo teorema, se asignará de manera única a cada función de tipo positivo en un grupo G una representación cíclica de éste, tal que la función de tipo positivo es un coeficiente matricial de la representación cíclica. Un *coeficiente matricial* en G es una función de la forma $g \mapsto \langle \pi(g)\eta, \theta \rangle$, para alguna representación unitaria de G. Al proceso mencionado se le llama la construcción de Gelfand-Neimark-Segal.

El siguiente lema será utilizado a lo largo del texto. Su demostración es inmediata y será omitida.

Lema 1.4. *Sea V un espacio vectorial complejo y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto hermitiano definido positivo.*[2] *Si $h \in V$ es isotrópico, entonces para toda $v \in V$, $\langle h, v \rangle = 0$.*

[2]Es decir tal que para toda $v \in V$, $\langle v, v \rangle \geq 0$.

Teorema 1.5. *Si $G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$ es una función definida positiva, existe $(\mathcal{H}, \pi, \eta)$ una representación cíclica de G tal que $\langle \pi(g)\eta, \eta\rangle = \varphi(g)$, para toda $g \in G$. Esta terna es única en el siguiente sentido. Si $(\tau, \mathcal{L}, \theta)$ es una representación cíclica tal que $\langle \tau(g)\theta, \theta\rangle = \varphi(g)$, entonces existe un isomorfismo de espacios de Hilbert $\mathcal{H} \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{L}$, G-equivariante y tal que $\Gamma(\eta) = \theta$.*

Demostración. Dada $f \in C^0(G)$, el conjunto de funciones continuas de G con valores en $\mathbb{C}$, y dada $g \in G$, sea $f_g = f \circ R_g$. Donde R_g es la traslación derecha por g en G. Sea ι la función $g \mapsto g^{-1}$, y para $g \in G$, sea $\phi_g = \varphi_g \circ \iota$. Llámese V al subespacio vectorial complejo de $C^0(G)$ generado por $\{\phi_g \mid g \in G\}$. Si $h, k \in V$, agregando ceros si es necesario, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $h = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_{g_i}$ y $k = \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi_{g_i}$. Defínase

$$\langle h, k\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\gamma_j} \cdot \varphi({g_j}^{-1} \cdot g_i).$$

Se afirma que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ es una producto interior definido positivo y no degenerado en V.

Primero se probará que es una función bien definida.[3] Con h y k como antes, obsérvese que

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\gamma_j} \cdot \varphi({g_j}^{-1} \cdot g_i) = \sum_{j} \overline{\gamma_j} h(g_j).$$

Por lo tanto

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\gamma_j} \cdot \varphi({g_j}^{-1} \cdot g_i)$$

no depende de la expresión de h. Por otro lado como $\overline{\varphi(g)} = \varphi(g^{-1})$,

$$\begin{aligned} \overline{\langle h, k\rangle} &= \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_i} \gamma_j \cdot \overline{\varphi({g_j}^{-1} \cdot g_i)} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i} k(g_i). \end{aligned}$$

Entonces el producto está bien definido, porque tampoco depende de la expresión de k. Es inmediato que $\langle h, k\rangle = \overline{\langle k, h\rangle}$ y que $\langle \lambda h + k, l\rangle = \lambda\langle h, l\rangle + \langle k, l\rangle$. Además si $h = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_{g_i}$ es un elemento de V, como φ es definida positiva,

$$\langle h, h\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \varphi({g_j}^{-1} g_i) \geq 0.$$

Supóngase que $\langle h, h\rangle = 0$, entonces, por el Lema 1.4, para toda $k \in V$, $\langle h, k\rangle = 0$. Si $g \in G$, se tiene que,

$$\begin{aligned} \langle h, \phi_g\rangle &= \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(g^{-1} g_i) \\ &= h(g) \\ &= 0. \end{aligned}$$

[3] No hay ninguna razón para que la familia $\{\phi_{g_i} \mid g \in G\}$ sea linealmente independiente, en cuyo caso, la función en cuestión estaría bien definida.

Entonces $h = 0$, y en efecto, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interior en V, definido positivo y no degenerado. Llamemos $\mathcal{H}$ a la completación de V como espacio métrico. Defínase, para $g \in G$ y $h = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_{g_i} \in V$,

$$\pi(g)h = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_{g \cdot g_i}.$$

Si $h = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_{g_i}$ y $k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \phi_{g_i}$ son dos elementos de V,

$$\begin{aligned} \langle \pi(g)h, \pi(g)k \rangle &= \langle \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_{g \cdot g_i}, \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \phi_{g \cdot g_i} \rangle \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\gamma_j} \varphi(g_j^{-1} \cdot g^{-1} \cdot g \cdot g_i) \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\gamma_j} \varphi(g_j^{-1} \cdot g_i) \\ &= \langle h, k \rangle. \end{aligned}$$

Entonces existe una transformación unitaria $\mathcal{H} \xrightarrow{\pi(g)} \mathcal{H}$ tal que para toda $f \in V$, $\pi(g)f = {}_{g^{-1}}f$.

Sean $\eta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_{g_i} \in V$ y $a, b \in G$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|\pi(a)\eta - \pi(b)\eta\|^2 &= \langle \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_{a \cdot g_i}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_{a \cdot g_i} \rangle \\ &\quad + \langle \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_{b \cdot g_i}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_{b \cdot g_i} \rangle \\ &\quad - 2Re\,(\langle \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_{a \cdot g_i}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_{b \cdot g_i} \rangle) \\ &= 2 \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \varphi(g_j^{-1} g_i) - 2Re \left(\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \varphi(g_j^{-1} b^{-1} a g_i) \right) \\ &= 2Re \left(\textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} (\varphi(g_j^{-1} g_i) - \varphi(g_j^{-1} b^{-1} a g_i) \right). \end{aligned}$$

Esta última expresión es continua en a y en b, por lo tanto para toda $h \in V$, la función $g \mapsto \pi(g)h$ es continua. Como V es denso en $\mathcal{H}$, la representación es fuertemente continua. Por lo tanto $(\mathcal{H}, \eta)$ es una representación unitaria, y como $\pi(g)\phi_e = \phi_g$, ésta es cíclica, con vector cíclico ϕ_e.

La prueba de la unicidad de la representación cíclica será omitida en este texto, una demostración aparece en el libro *Kazhdan's Property (T)*.[4] □

La siguiente proposición establece que la familia de funciones de tipo positivo definidas en un grupo es cerrada bajo ciertas operaciones elementales, que entre otras cosas implican que las funciones de tipo positivo son un cono.

Proposición 1.6. *Si φ y μ son dos funciones de tipo positivo definidas en G, entonces los siguientes son funciones de tipo positivo definidas en G.*
1) $\overline{\varphi}$.
2) Para toda $t \geq 0$, $t\varphi$.
3) $\varphi + \mu$.
4) $\varphi \cdot \mu$.
Además si f es una función continua y es el límite puntual de $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde cada φ_n es una función de tipo positivo, entonces f es de tipo positivo.

[4] Bachir Bekka, *et al.*, *op. cit.*, p. 341.

Demostración. Los incisos 1), 2), 3) y la última afirmación son inmediatos. Sea $(\mathcal{H}, \pi, \eta)$ la representación de la construcción de Gelfand-Neimark-Segal asociada a φ y sea $(\mathcal{L}, \tau, \theta)$ la respectiva asociada a μ. Considérese $\eta \otimes \theta \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}$. La función

$$\begin{array}{rcl} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \langle \pi(g) \otimes \tau(g)(\eta \otimes \theta), \eta \otimes \theta \rangle \end{array}$$

es definida positiva. Como

$$\begin{array}{rcl} \langle \pi(g) \otimes \tau(g)(\eta \otimes \theta), \eta \otimes \theta \rangle & = & \langle \pi(g)\eta \otimes \tau(g)\theta, \eta \otimes \theta \rangle \\ & = & \langle \pi(g)\eta, \eta \rangle \langle \tau(g)\theta, \theta \rangle \\ & = & \varphi(g)\tau(g), \end{array}$$

entonces $\varphi \cdot \tau$ es de tipo positivo. □

La familia de funciones que se definirá a continuación tendrá, con respecto a las representaciones afines de un grupo G, un papel análogo al que tuvieron las funciones de tipo positivo con respecto a las representaciones unitarias.

Definición 1.7. *Una función continua $G \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}$ es condicionalmente de tipo negativo o condicionalmente definida negativa o simplemente de tipo negativo si cumple lo siguiente:*
1) $\psi(e) = 0$.
2) $\psi(g) = \psi(g^{-1})$.
3) Para $n \in \mathbb{N}$, y $\{g_1, \ldots, g_n\} \subset G$ y $\{c_1, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^n c_i = 0$, se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j \psi(g_j^{-1} \cdot g_i) \leq 0.$$

Lema 1.8. *Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $G \xrightarrow{f} \mathcal{H}$ es una función, para todo $\{c_1, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i=1}^n c_i = 0$ y para todo $\{g_1, \ldots, g_n\} \subset G$, se tiene que,*

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j \|f(g_i) - f(g_j)\|^2 \leq 0.$$

Demostración. Se tiene que,

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \|f(g_i) - f(g_j)\|^2 & = & \sum_{i=1}^n \big(\sum_{j=1}^n c_j\big) c_i \|f(g_i)\|^2 + \sum_{j=1}^n \big(\sum_{i=1}^n c_i\big) c_j \|g_j\|^2 \\ & & -2 \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \langle f(g_i), f(g_j) \rangle \\ & = & -2 \| \sum_{i=1}^n c_i f(g_i) \|^2 \\ & \leq & 0. \end{array}$$

□

Dada $(\mathcal{H}, \alpha)$ una representación afín de un grupo G, se tiene que

$$\|\alpha(g_j^{-1} g_i)0\|^2 = \|\alpha(g_i)0 - \alpha(g_j)0\|^2.$$

Entonces por el lema anterior, para una representación afín, la aplicación $g \mapsto \|\alpha(g)0\|^2$ es de tipo negativo. Más adelante se mostrará que este ejemplo es genérico, es decir, que para toda función de tipo negativo existe una representación afín tal que la función tiene la expresión anterior.

Por el Teorema de Mazur-Ulam,[5] para toda isometría ϕ de un espacio de Banach real, $\phi - \phi(0)$ es lineal. En el caso de un espacio de Hilbert real, si ϕ es una isometría, $\phi - \phi(0)$ es una transformación lineal que respeta la norma, y por lo tanto es una transformación ortogonal.

Definición 1.9. *Si $(\mathcal{H}, \alpha)$ es una representación afín de G, llamaremos el cociclo asociado a α, a la función $G \xrightarrow{b} \mathcal{H}$, dada por $b(g) = \alpha(g)0$.*

Dada una representación afín de G, $(\mathcal{H}, \alpha)$, el cociclo $G \xrightarrow{b} \mathcal{H}$ asociado es continuo y si llamamos π a la parte lineal de α, para todas $g, k \in G$ se tiene

$$b(gk) = b(g) + \pi(g)b(k).$$

A esta última condición la llamaremos la *condición de cociclo* para π.

Sea $(\mathcal{H}, \pi)$ una representación ortogonal de G y sea $G \xrightarrow{b} \mathcal{H}$ una función que cumple la condición de cociclo para π. Si dados $g \in G$ y $h \in \mathcal{H}$ se define

$$\alpha(g)h = \pi(g)h + b(g),$$

entonces $(\mathcal{H}, \alpha)$ es una representación afín de G. Pues α es fuertemente continua y para $g, k \in G$ y $\xi \in \mathcal{H}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha(g)(\alpha(k)\xi) &= \pi(g)\big(\pi(h)\xi + b(h)\big) + b(g) \\ &= \pi(gh)\xi + \pi(g)b(h) + b(g) \\ &= \alpha(gh)\xi. \end{aligned}$$

Además, si $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ y $g \in G$,

$$\begin{aligned} \|\alpha(g)\xi - \alpha(g)\eta\| &= \|\pi(g)(\xi - \eta)\| \\ &= \|\xi - \eta\|. \end{aligned}$$

Ahora se describirá un método para construir representaciones afines de un grupo topológico que será empleada en el tercer capítulo. Una acción de un grupo G en un espacio topológico X se dirá que es *fuertemente continua* si para toda $x \in X$, la función $g \mapsto gx$ es continua. Supóngase que se tienen las siguientes tres cosas para un grupo topológico G y un espacio topológico X,

a) Una acción de G en X por homeomorfismos y fuertemente continua.
b) Una representación ortogonal de G, $(\mathcal{H}, \pi)$.
c) Una función continua $X \times X \xrightarrow{c} \mathcal{H}$ que satisface lo siguiente: para todas $x, y, z \in X$ y para toda $g \in G$, $\pi(g)c(x, y) = c(gx, gy)$ y

$$c(x, y) + c(y, z) = c(x, z). \tag{1.1}$$

[5] Richard Fleming y James Jamison, *Isometries on Banach Spaces: function spaces*, de las *Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics vol. 129*, Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2002, p.8.

Para cada $x \in X$ se puede definir la función continua

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G} & \xrightarrow{b_x} & \mathcal{H} \\ g & \mapsto & c(gx, x). \end{array}$$

Proposición 1.10. *Para cada $x \in X$, b_x cumple la condición de cociclo para π.*

Demostración. Para $g, k \in G$ y $x \in X$, , se tiene que

$$\begin{array}{rcl} b_x(gk) & = & c(gkx, gx) + c(gx, x) \\ & = & \pi(g)b_x(k) + b_x(g). \end{array}$$

□

La siguiente construcción es análoga a la que se hizo para funciones de tipo positivo en el Teorema 1.5.

Teorema 1.11. *(Gelfand-Neimark-Segal) Si $G \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}$ es una función condicionalmente definida negativa, existe una acción ortogonal de G en un espacio de Hilbert real $\mathcal{H}$ y un cociclo asociado a ésta, $G \xrightarrow{b} \mathcal{H}$ que es tal que $\psi(g) = \|b(g)\|^2$.*

Demostración. Sea V' el espacio vectorial real generado por el conjunto G. Si g_1 y g_2 son dos elementos de G, defínase $\langle g_1, g_2\rangle = -\frac{1}{2}\psi(g_2^{-1}g_i)$. Se afirma que la restricción de este producto al subespacio vectorial

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i g_i \in V' \mid \sum_{i=1}^{n} c_i = 0 \right\}$$

es un producto interior definido positivo. Ya que dados dos elementos de V, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que son de la forma $\sum_{i=1}^n c_i g_i$ y $\sum_{i=1}^n d_i g_i$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \langle \sum_{i=1}^n c_i g_i, \sum_{i=1}^n c_i g_i \rangle & = & -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n c_i c_j \psi(g_j^{-1} g_i) \\ & \geq & 0. \end{array}$$

Por el Lema 1.4, el conjunto $N = \{v \in V \mid \langle v, v\rangle = 0\}$ es un subespacio vectorial de V. Sea $W = V/N$ y denótese $[v]$ a la clase de v en W. Si se define para dos clases en W, $\langle [u], [v]\rangle = \langle u, v\rangle$, se tiene un producto interior (bien definido) no degenerado y definido positivo en W. Defínase en V, la acción de G,

$$\pi(g)(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i g \cdot g_i.$$

Es claro que $\pi(g)$ respeta el producto definido en V. Como N es invariante bajo la acción de G en V, G también actúa en W. Si llamamos $\mathcal{H}$ a la completación de W, $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert real en el cual actúa G por transformaciones ortogonales. Es directo de la construcción que esta representación de G es fuertemente continua y por lo tanto, $(\mathcal{H}, \pi)$ es una representación ortogonal de G.

Se afirma que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{b} & \mathcal{H} \\ g & \mapsto & [g-e] \end{array}$$

es un cociclo. Si $g, h \in G$, por un lado se tiene que

$$\big\|[g-e]-[h-e]\big\|^2 = \psi(h^{-1}g),$$

lo que implica la continuidad de b, y por el otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} b(gh) &= [gh-e] \\ &= [gh-g]+[g-e] \\ &= \pi(g)b(h)+b(g). \end{aligned}$$

Por último, para toda $g \in G$,

$$\begin{aligned} \|b(g)\|^2 &= \langle [g-e],[g-e]\rangle \\ &= -2\langle g,e\rangle \\ &= \psi(g). \end{aligned}$$

□

Al igual que en el caso de funciones de tipo positivo, la anterior es llamada la construcción de Gelfand-Neimark-Segal. El espacio $\mathcal{H}$ del teorema anterior es tal que $\overline{\langle\{b(g)\}\rangle_{g\in G}} = \mathcal{H}$. Si se agrega esta última condición a las hipótesis del teorema, el espacio $\mathcal{H}$ y la representación afín α son únicos salvo un isomorfismo de espacios de Hilbert reales equivariante.

La familia de funciones condicionalmente de tipo negativo definidas en un grupo están íntimamente relacionadas con la familia de funciones de tipo positivo. La siguiente proposición es una muestra de ello.

Proposición 1.12. *Si G es un grupo topológico, se cumplen:*
a) Si ψ_1 y ψ_2 son dos funciones condicionalmente de tipo negativo definidas en G y $t \geq 0$, $t\psi_1+\psi_2$ es condicionalmente de tipo negativo.
b) Si $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones condicionalmente de tipo negativo, que converge puntualmente a una función continua ψ, entonces ψ es condicionalmente de tipo negativo.
c) Si $G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ es una función de tipo positivo, la funcion $\varphi(e)-\varphi$ es condicionalmente de tipo negativo.

Demostración. Las demostraciones de a) y b) son inmediatas. Para c), sea $\{c_1,\ldots,c_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i=1}^n c_i = 0$ y sea $\{g_1,\ldots,g_n\} \subset G$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i,j=1}^n c_ic_j(\varphi(e)-\varphi(g_j^{-1}g_i)) &= \big(\textstyle\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n c_j)c_i\big)\varphi(e) - \sum_{i,j=1}^n c_ic_j\varphi(g_j^{-1}g_i) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema será una herramienta fundamental en lo que resta del texto, pues permitirá traducir propiedades de funciones de tipo positivo en propiedades de funciones de tipo negativo y viceversa, y como se ha visto previamente, permitirá traducir propiedades de representaciones unitarias en propiedades de representaciones afines y en sentido opuesto.

Teorema 1.13. *(Schoenberg) Si $G \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}$ es una función continua tal que $\psi(e) = 0$ y $\psi(g) = \psi(g^{-1})$ son equivalentes,*
a) ψ es una función condicionalmente de tipo negativo.
b) $e^{-t\psi}$ es una función definida positiva, para toda $t \geq 0$.

Una demostración de este teorema puede ser encontrada en el libro *Kazhdan's Property (T)*.[6]

1.2. Cuatro equivalencias

En esta sección se expondrán cuatro equivalencias de la propiedad de Haagerup, que naturalmente se pueden contrastar como negaciones fuertes de cuatro respectivas equivalencias de la propiedad T de Kazhdan. La prueba de que $U(n, 1)$ tiene la propiedad de Haagerup recae en una de estás cuatro equivalencias.

Definición 1.14. *Si X es un espacio topológico localmente compacto, una función continua $X \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ desaparece al infinito si para cada $\epsilon > 0$ existe $K \subset X$ compacto tal que para toda $y \notin K$, $|f(y)| < \epsilon$.*

Definición 1.15. *Si $(\mathcal{H}, \pi)$ es una representación de un grupo topológico, los coeficientes matriciales de la representación son las funciones $g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \eta\rangle$, con $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Si todo coeficiente matricial desaparece al infinito diremos que la representación es C_0.*

Definición 1.16. *Sea $(\mathcal{H}, \pi)$ una representación unitaria de un grupo topológico G. Diremos que π contiene débilmente a la representación trivial, o que π tiene vectores casi invariantes, si para todo $Q \subset G$ compacto y para todo $\epsilon > 0$, existe ξ en $\mathcal{H}$ (Q, ϵ)-invariante, es decir, tal que*

$$\sup_{x \in Q} \|\pi(x)\xi - \xi\| < \epsilon \|\xi\|.$$

Definición 1.17. *Un grupo topológico G localmente compacto, tiene la propiedad T de Kazhdan si toda representación unitaria de G que tiene vectores casi invariantes tiene un vector no nulo invariante.*

La propiedad T de Kazhdan fue introducida por David Kazhdan en 1967 en el artículo "Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups".[7]

[6] Bachir Bekka, *et al.*, *op. cit.*, p. 357.
[7] David Kazhdan, "Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups", *Functional Analysis and Its Applications* vol. 1, Dordrecht, 1967, p. 63-65.

Teorema 1.18. *Son equivalentes para un grupo topológico σ compacto G,*

1) Toda función condicionalmente de tipo negativo es acotada.

2) Si una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones continuas $G \xrightarrow{\varphi_n} \mathbb{R}$ de tipo positivo, tales que $\varphi_n(e) = 1$, converge uniformemente en compactos a la función constante 1, entonces converge uniformemente en G.

3) G tiene la propiedad T de Kazhdan.

4) Toda representación afín de G tiene un punto fijo.

La propiedad 4) se llama propiedad FH, la equivalencia de esta propiedad y la propiedad T de Kazhdan, para grupos σ compactos, la asegura el Teorema de Delorme-Guichardet. Una demostración de este resultado se puede encontrar en el libro *Kazhdan's Property (T)*, de Bachir Bekka, *et al.*[8]

En este mismo trabajo se puede encontrar una prueba de la equivalencia de 1) y 4),[9] aunque con lo expuesto previamente se tienen herramientas suficientes. Si se supone 1), para toda representación afín $(\mathcal{H}, \alpha)$ se tiene que el cociclo asociado $\|b(g)\|^2 = \|\alpha(g)(0)\|^2$ es acotado, por lo tanto por el Lema del centro, existe una única bola cerrada de radio mínimo que contiene a la órbita de 0. Por la unicidad de esta bola, el centro de la misma es un punto fijo para la representación α. Ahora si $(\mathcal{H}, \alpha)$ tiene un punto fijo, toda órbita de α es acotada, y por lo tanto la aplicación $g \mapsto \|\alpha(0)\|^2$ es acotada. Se vio que todas las funciones de tipo negativo son de esta forma, y por lo tanto, todas son acotadas.

Una demostración de que 1) y 2) son equivalentes se puede encontrar en el libro *La Propriété (T) de Kazhdan pour les Groupes Localement Compacts* de Pierre de la Harpe y Alain Valette.[10]

Definición 1.19. *Un grupo localmente compacto y segundo numerable tiene la propiedad de Haagerup si cumple alguna de las cuatro equivalencias del siguiente teorema.*

Teorema 1.20. *Para G un grupo localmente compacto y segundo numerable son equivalentes:*

1) Existe una función continua $G \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^+$ que es condicionalmente de tipo negativo y propia.

2) Existe una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones continuas $G \xrightarrow{\varphi_n} \mathbb{R}$ de tipo positivo, tales que $\varphi_n(e) = 1$, que desaparecen al infinito y que convergen uniformemente en compactos a la función constante 1.

3) Existe una representación unitaria de G que contiene debilmente a la representación trivial y cuyos coeficientes matriciales desaparecen al infinito.

4) Existe una representación afín de G, α, tal que para todo $B \subset \mathcal{H}$ acotado el conjunto $\{g \in G \mid \alpha(g)B \cap B \neq \emptyset\}$ es relativamente compacto.

[8] Bachir Bekka, *et al.*, *op. cit.*, p. 129.

[9] *Ídem*, p. 79.

[10] Pierre de la Harpe y Alain Valette, *La Propriété (T) de Kazhdan pour les Groupes Localement Compacts*, *en Astérisque vol. 175*, Paris, Société Mathématique de France, 1989, p. 61.

Demostración. Primero se demostrará la equivalencia de 1) y 2) como aparece en el artículo de Charles Akemann y Martin Walter, "Unbounded negative definite functions".[11] Supóngase 1). Como ψ es condicionalmente de tipo negativo, $\psi(e) = 0$. Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales positivos que converge a 0. Se afirma que la sucesión de funciones de tipo positivo (ver el Teorema 1.13), $(e^{-t_n\psi})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos a la función constante 1. Sean $t, \epsilon > 0$ y $Q \subset G$ compacto. Si $M = \max_{q\in Q} |\psi(q)|$, para toda $q \in Q$,

$$e^{-tM} \leq e^{-t|\psi(q)|} \leq 1 \leq e^{t|\psi(q)|} \leq e^{tM}.$$

Como $e^{tM} - e^{-tM} \leq 2(e^{tM} - 1)$, se tiene que, para un n suficientemente grande, $2(e^{t_nM} - 1) < \epsilon$, y por lo tanto,

$$\max_{q\in Q} |e^{-t_n\psi(q)} - 1| < \epsilon.$$

Ahora se afirma que las funciones $e^{-t\psi}$ desaparecen al infinito. Dados $\epsilon > 0$ y $g \in G$, $e^{-t\psi(g)} \geq \epsilon$ si, y sólo sí, $\psi(g) \leq \frac{-\log(\epsilon)}{t}$. Como ψ es una función propia y que toma valores positivos, el conjunto

$$\left\{ g \in G \mid \psi(g) \leq \frac{-\log(\epsilon)}{t} \right\}$$

es compacto y se tiene 2).

Supóngase 2). Sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas positivas que convergen uniformemente en compactos a la función constante 1 y que desaparecen al infinito. Como G es σ compacto y localmente compacto, existe $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, una familia de vecindades compactas de e tales que $Q_i \subset Q_{i+1}$ y tales que $\{int(Q_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta de G. Defínase $Q_0 = \{e\}$.

Se afirma que existen dos conjuntos de naturales, ordenados de manera ascendente, $\{j_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{k_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, con $j_0 = 0 = k_0$, tales que para toda $i \in \mathbb{N}$,
a) $|\varphi_{k_{i+1}} - 1| < \frac{1}{4^{i+1}}$, para toda $x \in Q_{j_i}$.
b) $|\varphi_{k_i}| < \frac{1}{4^i}$, para toda $x \notin Q_{j_i}$.

Estas familias se construirán por recursión. Defínase $j_0 = 0 = k_0$ y supóngase ya se tienen $j_0, \ldots, j_n$ y $k_0, \ldots, k_n$, ordenados de manera ascendente y que cumplen a) y b). Sea k_{n+1} un natural tal que $k_{n+1} > k_i$, para toda $0 \leq i \leq n$, y tal que $|\varphi_{k_{n+1}}(x) - 1| < \frac{1}{4^{n+1}}$, para toda $x \in Q_{j_n}$. Como $\varphi_{k_{n+1}}$ desaparece al infinito, existe $Q \subset G$ compacto tal que si $x \notin Q$, entonces $|\varphi_{k_{n+1}}(x)| < \frac{1}{4^{i+1}}$. Por como se supuso la familia $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe $j_{n+1} > j_0, \ldots, j_n$ tal que $Q \subset Q_{j_{n+1}}$.

Sea $\psi_n = 1 - Re(\varphi_{k_n})$. Debido a la Proposición 1.6, $Re(\varphi_{k_n})$ es una función definida positiva. Por la Proposición 1.12, para cada $n \in \mathbb{N}$, ψ_n es una función condicionalmente definida negativa. Por construcción, la serie $\psi = \sum_{n\in\mathbb{N}} \psi_n 2^n$ converge uniformemente en compactos. Por lo tanto, por la Proposición 1.12, ψ es una función continua condicionalmente definida negativa.

[11] Charles Akemann y Martin Walter, "Unbounded negative definite functions", *Canadian Journal of Mathematics* vol. 33 núm. 4, Ottawa, 1981, p. 862-871.

Se afirma que ψ es propia. En efecto, si $x \notin Q_n$,

$$\begin{array}{rcl} \psi(x) & \geq & \psi_n(x)2^n \\ & = & (1 - Re(\varphi_{k_n}))2^n \\ & > & (1 - 4^{-n})2^n \\ & > & 2^n - 1. \end{array}$$

Por lo tanto 1) y 2) son equivalentes.

La demostración de la equivalencia de 2) y 3), aparece en el artículo de Paul Jolissant, "Borel cocycles, approximation properties and relative property T".[12] Supóngase 2). Sea $(\mathcal{H}_n, \pi_n, \eta_n)$ la representación cíclica asociada a φ_n (ver el Teorema 1.5). Se afirma que $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \pi_n$ tiene vectores casi invariantes y que es una representación C_0 de G.

Sea $\epsilon > 0$ y sea $Q \subset G$ compacto. Como la sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m > N$ y para toda $q \in Q$,

$$\begin{array}{rcl} \epsilon & > & |\varphi_m(q) - 1| \\ & = & |\langle \pi_m(q)\eta_m, \eta_m\rangle - 1|. \end{array}$$

Entonces, para toda $q \in Q$ y m como antes,

$$\begin{array}{rcl} \|(\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} \pi_n)(q)\eta_m - \eta_m\|^2 & = & \|\pi_m(q)\eta_m - \eta_m\|^2 \\ & = & 2\|\eta_m\|^2 - 2Re(\langle \pi_m(q)\eta_m, \eta_m\rangle) \\ & = & 2 - 2\langle \pi_m(q)\eta_m, \eta_m\rangle \\ & < & 2\epsilon. \end{array}$$

Por lo tanto $1_G \prec \oplus_{n\in\mathbb{N}}\pi_n$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ y sean $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_k(g_i)\eta_k$ y $v = \sum_{i=1}^n \gamma_i \pi_k(g_i)\eta_k$ dos elementos de $\mathcal{H}_k$ y sea $g \in G$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \langle \pi_k(g)u, v\rangle & = & \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_k(gg_i)\eta_k, \sum_{i=1}^n \gamma_i \pi_k(g_i)\eta_k \\ & = & \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \overline{\gamma_j} \langle \pi_k(g_j^{-1} g g_i)\eta_k, \eta_k\rangle \\ & = & \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \overline{\gamma_j} \varphi_k(g_j^{-1} g g_i). \end{array}$$

Como para cada (i, j) la función $g \mapsto \varphi_k(g_j^{-1} g g_i)$ desaparece al infinito , la aplicación $g \mapsto \langle \pi_k(g)u, v\rangle$ también pertenece a $C_0(G)$. Por un argumento de densidad se puede concluir que para cada k, los coeficientes matriciales asociados a vectores en $\mathcal{H}_k$ desaparecen al infinito. Como para $i \neq j$, $\mathcal{H}_i$ y $\mathcal{H}_j$ son ortogonales, se puede concluir que los coeficientes matriciales asociados a vectores que tienen sólo una cantidad finita de entradas no nulas desaparecen al infinito. Nuevamente por un argumento de densidad se puede concluir que la representación en cuestión es C_0, y por lo tanto, se tiene 3).

Ahora supóngase 3) y sea $(\mathcal{H}, \pi)$ dicha representación unitaria, C_0 y que contiene débilmente a la identidad. Como G es localmente compacto y segundo numerable,

[12] Paul Jolissant, "Borel cocycles, approximation properties and relative property T", *Ergodic Theory and Dynamical Systems* vol. 20, Cambridge, 2000, p. 483-499.

existe una familia de subconjuntos de G compactos $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $Q_i \subset Q_{i+1}$ y tal que $\{int(Q_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de G. Para cada i elíjase η_i, un vector unitario $(Q_i, 1/i)$-invariante y denótese φ_i al coeficiente matricial $g \mapsto \langle \pi(g)\eta_i, \eta_i\rangle$. Se afirma que la sucesión buscada es $(Re(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (ver la Proposición 1.6). Basta probar que esta sucesión converge uniformemente en compactos a la función constante 1. Se tiene que para cada $i \in \mathbb{N}$, si $g \in Q_i$,

$$\|\pi(g)\eta_i - \eta_i\|^2 = 2(1 - Re(\varphi_i(g)) < 1/i^2.$$

Entonces $|1 - Re(\varphi_i(g))| < 1/2i^2$. Dado un compacto $Q \subset G$, existe N tal que para toda $m \geq N$, $Q \subset Q_m$. Además para toda $m \geq N$, η_m es $(Q_N, 1/N)$-invariante, y por lo tanto, para toda $g \in Q$, $|1 - Re(\varphi_m(g))| \leq 1/N^2$. Como N puede ser tan grande como se quiera, se tiene 2).

La demostración de la equivalencia de 1) y 4) aparece en el artículo "Proper affine isometric actions of amenable groups", de Bachir Bekka, *et al.*[13] Supóngase 1). Existe $(\mathcal{H}, \alpha)$ una representación afín de G tal que $\|\alpha(g)0\|^2 = \psi(g)$. Se afirma que α da lugar a una acción propia de G en $\mathcal{H}$. Sea $r > 0$ y sea B_r la bola cerrada de radio r centrada en cero en $\mathcal{H}$. Defínase

$$D = \{g \in G \mid g \cdot B_r \cap B_r \neq \emptyset\}.$$

Si $g \in D$, existe $h \in B_r$ tal que $\|\alpha(g)h\| \leq r$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \|\alpha(g)0\| & \leq & \|\alpha(g)h\| + \|h\| \\ & \leq & 2r. \end{array}$$

Por lo tanto

$$D \subset \{g \in G \mid \psi(g) \leq 4r^2\}.$$

Como ψ es propia, D es relativamente compacto, y se tiene 4).

Supóngase 4). Se afirma que la función $g \mapsto \|\alpha(g)0\|^2$ es propia. Sea $r > 0$ y sea

$$B = \{g \in G \mid \psi(g) \leq r^2\}.$$

Obsérvese que si D es como arriba, $B \subset D$, y por lo tanto, B es compacto. Esto concluye la demostración de la equialencia de 1) y 4). □

Obsérvese que la propiedad de Haagerup es una negación fuerte de la propiedad T de Kazhdan. Observando los dos teoremas mencionados acerca de estas propiedades, es evidente que todo grupo compacto tiene ambas propiedades, y más aún, si un grupo tiene las dos simultáneamente éste debe ser compacto. En el orden en que son presentadas las equivalencias de cada una de estas propiedades, se puede contrastar cada una de las equivalencias de la propiedad de Haagerup, como una negación fuerte de la respectiva equivalencia de la propiedad T de Kazhdan.

[13]Bachir Bekka, *et al.*, "Proper affine isometric actions of amenable groups", en *Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 2* , de las *London Mathematical Society Lecture Note Series Vol. 227*, Cambridge, Cambridge University Press, 1995, p. 1-4.

Capítulo 2

Grupos con la propiedad de Haagerup.

En este capítulo se darán ejemplos de grupos con la propiedad de Haagerup.

2.1. Grupos que actúan en espacios con muros.

Supóngase que G, un grupo discreto, actúa en un conjunto X. Llámese

$$\mathbb{C}[X] = \{X \xrightarrow{f} \mathbb{C} \mid |sop(f)| < \infty\},$$

y defínase, para $f, k \in \mathbb{C}[X]$, $\langle f, k \rangle = \sum_{x \in X} f(x)\overline{k(x)}$. Esto define un producto hermitiano definido positivo y no degenerado en $\mathbb{C}[X]$. Sea

$$\ell^2(X) = \big\{X \xrightarrow{f} \mathbb{C} \mid \sum_x |f(x)|^2 < \infty\big\}.$$

la completación de $\mathbb{C}[X]$ con respecto a este producto interior. Llámese L_g a la traslación izquierda por g en G. Dada una acción de un grupo G en X, existe naturalmente una acción de G en el espacio de Hilbert complejo $\ell^2(X)$ definida como sigue, dadas $g \in G$ y $f \in \ell^2(X)$, llámese $g \cdot f = {}_{g^{-1}}f$, donde ${}_{g^{-1}}f = f \circ L_{g^{-1}}$. Es claro que G actúa por transformaciones unitarias. Se tiene que el mapeo de órbita es continuo para todo elemento de $\ell^2(X)$, pues para una función en $\mathbb{C}[X]$ se tiene trivialmente, y como este espacio es denso en $\ell^2(X)$, se puede concluir que la acción es fuertemente continua.

Supóngase que existe $A \subset X$ tal que, para toda $g \in G$, $|A \Delta gA|$ es finito y tal que $\lim_{g \to \infty} |gA \Delta A|^2 = \infty$, es decir, tal que para toda $r \in \mathbb{R}^+$, $\{g \in G| \, |gA\Delta A| \leq r\}$ es finito. Sea $Y = \{gA\}_{g \in G}$ y defínase la función

$$\begin{array}{rcl} Y \times Y & \xrightarrow{\mu} & \ell^2(X) \\ (hA, gA) & \mapsto & \delta_{gA} - \delta_{hA}. \end{array}$$

La función μ cumple la condición de cociclo (ver la ecuación (1.1) en la sección 1.1) y

$$\|\mu(gA, hA)\|^2 = |h^{-1}gA\Delta A|.$$

Para $g, k, l \in G$ se tiene que,

$$\begin{aligned}\pi(g)(\delta_{kA} - \delta_{lA}) &= {}_{g^{-1}}(\delta_{kA} - \delta_{lA}) \\ &= \delta_{gkA} - \delta_{glA}.\end{aligned}$$

Por lo tanto el cociclo es equivariante. Entonces si un grupo G numerable[1] actúa sobre un conjunto X de manera que existe $A \subset X$ con las propiedades anteriores, entonces G tiene la propiedad de Haagerup. Un ejemplo sencillo de este tipo de acción, es la acción de $\mathbb{Z}$ en si mismo y donde se considera a $A = \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathbb{Z}$ tiene la propiedad de Haagerup. Más adelante se demostrará que todo grupo abeliano, localmente compacto y segundo numerable tiene la propiedad de Haagerup. Más generalmente se mostrará que todo grupo promediable, localmente compacto y segundo numerable tiene la propiedad de Haagerup.

Se dice que una pareja (X, H) es un *espacio con muros* si X es un conjunto y si H es una familia de particiones de X en dos conjuntos no triviales, y donde además para $x, y \in X$ se tiene que x y y pertenecen al mismo elemento de la partición para todo $h \in H$, salvo un número finito. Una acción de un grupo en (X, H) es una acción de G en X que respeta las descomposiciones de H, es decir, si $h = \{A, B\} \in H$, entonces $\{g(A), g(B)\} \in H$, para todo $g \in G$. Dados $x, y \in X$, sea $M_{x,y}$ el número de muros que separan a x de y, es decir, el número de $h \in H$ tales que x y y no están en el mismo elemento de la partición h. Dado $h = \{A, B\}$ un muro, a A y B los llamaremos los *semiespacios* asociados a h. En adelante $K_{X,H}$ denotará al conjunto de todos los semiespacios del espacio con muros (X, H).

Ejemplo 2.1. El conjunto de vértices de un árbol T es un espacio con muros. Cada arista $a = \{x, y\}$ define una partición del conjunto de vértices, pues al quitarle la arista a a T, se obtienen dos árboles T_1 y T_2. Donde los vértices de T_1 son los vértices de T cuyo camino a x contiene a a, y las aristas entre los vértices de T_1 son las mismas de T. Por otro lado los vértices de T_2 son aquellos vértices de T cuyo camino a x no contiene a a y las aristas de T_2 también son las mismas de T. Defínase el conjunto de muros como el conjunto de particiones del tipo $\{T_1, T_2\}$ inducidas por cada arista. Dados dos vértices los únicos muros que los separan son aquellos correspondientes a aristas en el único camino que conecta dichos vértices.

Diremos que una acción de G (discreto) en un espacio con muros es *propia* si existe $x \in X$ tal que $\lim_{g\to\infty} M_{x,gx} = \infty$. Si un grupo G actúa propiamente en un espacio con muros (X, H), entonces G tiene la propiedad de Haagerup, ya que la acción de G en $K_{X,H}$ es una acción que admite un subconjunto $A \subset K_{X,H}$ tal que $|A \Delta gA| < \infty$ y tal que $\lim_{g\to\infty} |A \Delta gA| = \infty$. En efecto el conjunto $\{k \in K_{X,H} \mid x \in k\}$ tiene esta propiedad.

Ejemplo 2.2. La acción de un grupo libre finitamente generado en una gráfica de Cayley asociada a una base del grupo, es una acción propia en un espacio con muros. Es claro que esta acción respeta los muros y además, para un vértice x, el conjunto de puntos que están separados de x por a lo más r muros es finito, pues son los puntos

[1] Se supone que G es numerable para mantenerse en la familia de grupos segundo numerables

que se encuentran a una distancia (con la métrica de las palabras) menor o igual que r del vértice x. Este conjunto es finito, y por lo tanto, la acción de un grupo libre en un número finito de generadores en su gráfica de Cayley induce una acción propia de éste en un espacio con muros. Se mostró que todo grupo libre finitamente generado tiene la propiedad de Haagerup, pero más aún, todo grupo discreto que actúe propiamente en un árbol tiene esta propiedad, por los mismos argumentos.

2.2. Grupos actuando en espacios de medida.

Sea (X,μ) es un espacio con una medida boreliana σ finita, regular y tal que $L^2(X,\mu)$ es separable. Supóngase que G es un grupo localmente compacto segundo numerable que actúa en X de manera que $G\times X \xrightarrow{\gamma} X$, la acción de G en X, es medible (G tiene la medida de Haar). Supóngase además que para cada $g\in G$ la transformación $x\mapsto\gamma(g,x)$ respeta la medida. Obsérvese que debido a esto último para cada $g\in G$ y $f\in L^2(X,\mu)$, se tiene que $\langle {}_gf,{}_gf\rangle=\langle f,f\rangle$. Por lo tanto la acción natural de G en $L^2(X,\mu)$, $(g,f)\mapsto {}_{g^{-1}}f$, está dada por transformaciones ortogonales. Se afirma que esta representación es fuertemente continua.

Sea $f\in L^2(X,\mu)$. Considérese la función $(g,x)\mapsto f(g^{-1}x)f(x)$. Esta función es medible, pues la acción de G en X es medible. Por el Teorema de Fubini-Tonelli, la función
$$g\mapsto\int_X f(g^{-1}x)f(x)d\mu(x)=\langle {}_{g^{-1}}f,f\rangle$$
es medible. El siguiente lema afirma que esta función es continua.

Lema 2.3. *Con las mismas hipótesis, la representación de G en $L^2(X,\mu)$ es fuertemente continua.*

Demostración. Se afirma que si un conjunto $A\subset G$ es tiene medida de Haar positiva, entonces $A\cdot A^{-1}$ es una vecindad de $e\in G$. Sin pérdida de generalidad supóngase que A tiene medida finita. Como la medida de Haar, η, es regular, existen $K\subset A$ compacto y $A\subset U$ abierto tales que $\eta(K)\le\eta(A)\le\eta(U)<2\eta(K)$. Debido a que K es compacto, existe $W\subset G$ vecindad abierta de $e\in G$ tal que $K\cdot W\subset U$. Para cada $w\in W$, $w\cdot K\cap K\neq\emptyset$, pues $\eta(U)<2\eta(K)$. Por lo tanto $W\subset A\cdot A^{-1}$.

Ahora dado $\epsilon>0$, defínase
$$A=\{g\in G\mid 2\langle {}_{g^{-1}}f,f\rangle>2\langle f,f\rangle-\epsilon^2/4\}.$$
El conjunto A es medible, por el comentario anterior a este lema, y claramente es simétrico. Además
$$A\cdot A\subset\{g\in G\mid \|\pi(g)f-f\|<\epsilon\},$$
pues si $g,h\in A$, se tiene que
$$\begin{aligned}\|\pi(gh)f-f\| &= \|\pi(h)f-\pi(g^{-1})f\|\\ &\le \|\pi(h)f-f\|+\|\pi(g^{-1})f-f\|\\ &= \|\pi(h)f-f\|+\|\pi(g)f-f\|\\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Se afirma que $\eta(A) > 0$. Como $L^2(X,\mu)$ es un espacio métrico separable, entonces $\{\pi(g)f\}_{g\in G}$ es separable. Por lo tanto existe $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ tal que para cada $g \in G$ existe g_n tal que $\|\pi(g)f - \pi(g_n)f\| < \epsilon/2$. Por esto $g_n^{-1}g \in A$ y $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n \cdot A$. Por lo tanto $\eta(A) > 0$, y por el comentario del principio de la demostración, A es una vecindad de $e \in G$. Esto prueba que la función $g \mapsto \pi(g)f$ es continua en $e \in G$, lo cual es suficiente para concluir. □

Ahora supóngase además que μ es una medida de probabilidad. Sea

$$L_0 = \{f \in L^2(X,\mu) \mid \int f d\mu = 0\} = 1_X^{\perp}.$$

Para cada $A \subset X$ medible defínase

$$\xi_A(x) = \begin{cases} 1-\mu(A) & \text{si} \quad x \in A \\ -\mu(A) & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Se tiene que $\xi_A \in L_0$ y se puede ver que el subespacio cerrado generado por $\{\xi_A\}_{A\,\text{medible}}$ es igual a L_0, o sencillamente considerar L_0 como la cerradura del espacio generado por esta familia.

Una acción de un grupo G en un espacio con medida es *mezclante* si para A y B dos subconjuntos medibles, $\lim_{g\to\infty} \mu(gA \cap B) = \mu(A)\mu(B)$.

Proposición 2.4. *Con las mismas hipótesis, se tiene que la acción de G en X es mezclante si, y sólo si, los coeficientes matriciales de la representación ortogonal de G en L_0 desaparecen al infinito.*

Demostración. Para A y B medibles y $g \in G$,

$$_{g^{-1}}(\xi_A)\xi_B(x) = \begin{cases} (1-\mu(A))(1-\mu(B)) & \text{si} \quad x \in g\cdot A \cap B \\ \mu(A)\mu(B) & \text{si} \quad x \in g \cdot A^c \cap B^c \\ -(1-\mu(A))\mu(B) & \text{si} \quad x \in g\cdot A \cap B^c \\ -(1-\mu(B))\mu(A) & \text{si} \quad x \in g\cdot A^c \cap B. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\langle \pi(g)(\xi_A), \xi_B\rangle = \mu(gA \cap B) - \mu(A)\mu(B).$$

Entonces el coeficiente matricial en cuestión desaparece al infinito si, y sólo si,

$$\lim_{g\to\infty} \mu(gA \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Por último, como el espacio generado por el conjunto de las funciones ξ_A es denso en L_0, si la acción de G en X es mezclante, todos los coeficientes matriciales de la representación de G en $L^2(X,\mu)$ desaparecen al infinito. □

Por lo tanto si la representación ortogonal de G, inducida por una acción como antes, tiene vectores casi invariantes, entonces G tiene la propiedad de Haagerup. Pues al considerar la complejificación de $L^2(X,\mu)$ y de la acción de G en este espacio, se obtiene una representación unitaria que mantiene la propiedad de tener coeficientes matriciales que desaparecen al infinito y de tener vectores casi invariantes.

La siguiente proposición da una condición suficiente para que la representación ortogonal inducida por una acción mezclante de G tenga casi vectores invariantes.

Proposición 2.5. *Con las mismas hipótesis que arriba, si existe una familia de subconjuntos medibles X, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $\mu(A_n) = 1/2$ y tales que para cualquier $K \subset G$ compacto y cualquier $\epsilon > 0$, existe $N = N(K, \epsilon)$ tal que para toda $m > N$,*

$$\sup_{g\in K, m>N} \mu(A_m \Delta g A_m) < \epsilon,$$

entonces la representación anterior tiene vectores casi invariantes.

Demostración. Defínase $\phi_{A_n} = 2\xi_{A_n}$. Se afirma si $K \subset G$ es compacto y $1 > \epsilon > 0$, para toda $m > N(K, \epsilon/4)$, ϕ_m es un vector $(K, \epsilon)-$invariante.

Como $\langle \xi_{A_m}, \xi_{A_m} \rangle = (1 - \mu(A_m))\mu(A_m) = 1/4$, se tiene que para toda $g \in K$ y toda $m > N$,

$$\begin{aligned} \|\pi(g)\phi_{A_m} - \phi_{A_m}\|^2 &= 2 - 2\langle \pi(g)\phi_{A_m}, \phi_{A_m} \rangle \\ &= 2 - 8\mu(gA_m \cap A_m) + 8\mu(A_m)^2 \\ &= 2 - 8\mu(A_m) + 4\mu(A_m \Delta g A_m) + 2 \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|\pi(g)\phi_{A_m} - \phi_{A_m}\| < \epsilon = \|\phi_{A_m}\|\epsilon.$$

Entonces ϕ_{A_m} es $(K, \epsilon)-$invariante. □

Definición 2.6. *Un grupo G localmente compacto es promediable si la representación regular de G, $G \to U(L^2(G, \mu_G))$, tiene vectores casi invariantes.*

Obsérvese que si G es un grupo localmente compacto, los coeficientes matriciales de la representación regular de G desaparecen al infinito. En efecto, $C_c(G)$ es denso en $L^2(G, \mu_G)$ y para $\varphi, \psi \in C_c(G)$, el coeficiente matricial $g \mapsto \langle \pi(g)\varphi, \psi \rangle$ tiene soporte compacto. Ya que si $\pi(g)\varphi\overline{\psi} \neq 0$, entonces existe $x \in g \cdot sop(\varphi) \cap sop(\psi)$, es decir, $g \in sop(\psi)sop(\varphi)^{-1}$. Por lo tanto el soporte del coeficiente matricial en cuestión está contenido en $sop(\psi)sop(\varphi)^{-1}$. Utilizando la densidad de $C_c(G)$ en $L^2(G, \mu_G)$, se puede concluir la afirmación. Debido al Teorema 1.20 se tiene lo siguiente.

Teorema 2.7. *Si G es promediable y segundo numerable, G tiene la propiedad de Haagerup.*

Capítulo 3

U(n,1) tiene la propiedad de Haagerup

La demostración de que $U(n,1)$ tiene la propiedad de Haagerup que se desarrollará en este capítulo aparece en el libro *Groups with the Haagerup Property: Gromov's a-T-menability*[1] de Pierre-Alain Cherix, *et al.* La estrategia será construir un cociclo propio de $U(n,1)$. Para ello primero se estudiará el espacio hiperbólico complejo y la acción por isometrías de $U(n,1)$ en éste.

3.1. El espacio hiperbólico complejo.

Defínase el producto $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\langle\ ,\ \rangle} \mathbb{C}$ dado por

$$\Big\langle (z_1, \ldots, z_{n+1}), (w_1, \ldots, w_{n+1}) \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w}_i - z_{n+1}\overline{w}_{n+1}.$$

Obsérvese que si $\langle p, p\rangle < 0$, para toda $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle(\lambda p, \lambda p)\rangle = |\lambda|^2 \langle p, p\rangle < 0$. Entonces si $H = \{p \in \mathbb{C}^{n+1} | \langle p, p\rangle < 0\}$ y $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^n$ es la proyección canónica, $\pi(H) \subset \mathbb{C}P^n$ es abierto. Obsérvese que para toda $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in H$, $z_{n+1} \neq 0$, por lo tanto si se considera la carta del proyectivo $(z_1, \ldots, z_n) \overset{\phi}{\mapsto} \pi(z_1, \ldots, z_n, 1)$, se tiene que $\pi(H) \subset Im(\phi)$ y se puede identificar $\pi(H)$ con B^n, la bola abierta de radio 1 en esta carta. Defínase $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} = \pi(H)$. En este espacio existe una única métrica hermitiana que cumple que para cada $x \in \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\langle x, x\rangle = -1$ se tiene que

$$(\mathbb{C}x)^{\perp} \xrightarrow{d\pi_x} T_{\pi(x)}\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$$

es una isometría. Aquí $(\mathbb{C}x)^{\perp}$ es el espacio de vectores ortogonales a x con respecto al producto $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dotado del producto hermitiano dado por la restricción de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a este subespacio.

[1] Pierre-Alain Cherix, *et al.*, *Groups with the Haagerup Property: Gromov's a-T-menability*, Basilea, Springer Basel AG, 2001.

Identificando $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ con B^n se tiene que para $z \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ y $V, W \in T_z\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$,

$$g_z(V,W) = \frac{1}{1-(z \cdot z)}\Big((V \cdot W) + \frac{(V \cdot z)\,\overline{(W \cdot z)}}{1-(z \cdot z)}\Big)$$

donde $(\cdot \cdot \cdot)$ es el producto hermitiano usual en $\mathbb{C}^n$.

Proposición 3.1. *Toda transformación $A \in U(n,1)$, induce una isometría holomorfa $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\bar{A}} \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.*

Demostración. La transformación A respeta el producto $\langle \cdot, \cdot \rangle$, por lo tanto A induce un difeomorfismo holomorfo $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\bar{A}} \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. Dado $\pi(x) \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, con $\langle x, x \rangle = -1$, y $d\pi_x(V)$ un vector tangente a $\pi(x)$, se tiene

$$d\bar{A}_{\pi(x)}(d\pi_x(V)) = d\pi_{A(x)}(A(V)).$$

Entonces la afirmación sigue de que A preserva el producto $\langle \cdot, \cdot \rangle$. $\square$

Proposición 3.2. *Dados $p, q \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, existe una transformación que respeta la métrica hermitiana y que manda p en q.*

Demostración. Si $p, q \in B^n$, sea $\tilde{p} = \frac{(p,1)}{\sqrt{1-p \cdot p}}$ y análogamente defínase $\tilde{q}$. Obsérvese que

$$\langle \tilde{p} - \frac{\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle}{|\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle|}\tilde{q}, \tilde{p} - \frac{\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle}{|\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle|}\tilde{q} \rangle = -2 - 2Re(|\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle|) = -2(1 + |\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle|).$$

Entonces sea, $\mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{A} \mathbb{C}^{n+1}$, la transformación lineal compleja definida como la reflexión en el subespacio ortogonal a $\tilde{p} - \frac{\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle}{|\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle|}\tilde{q}$, con respecto al producto $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se tiene que A está dada por

$$A(x) = x + \frac{\langle x, \tilde{p} - \frac{\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle}{|\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle|}\tilde{q} \rangle}{1 + |\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle|}\left(\tilde{p} - \frac{\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle}{|\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle|}\tilde{q}\right).$$

A respeta el producto $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Por lo tanto A induce un difeomorfismo $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\bar{A}} \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, tal que $\bar{A}(p) = q$. $\square$

Ahora se discutirá la fórmula de la distancia entre dos puntos en $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. Identificando el espacio hiperbólico complejo con B^n se puede demostrar que los rayos euclideanos que parten de 0 tienen longitud mínima para la métrica hiperbólica. Esto es una consecuencia de que para $z \in B^n$ y $V \in \mathbb{C}^n$ ortogonales para el producto interior hermitiano de $\mathbb{C}^n$, se tiene que $g_z(z, V) = 0$. Sabiendo esto es inmediato mostrar que para $z \in B^n$, la curva

$$\begin{array}{ccc} [0, C] & \rightarrow & \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \\ t & \mapsto & \frac{tanh(t) \cdot z}{\sqrt{z \cdot z}}. \end{array}$$

es una geodésica con velocidad de norma 1, que va de 0 a $\frac{tanh(C)z}{\sqrt{z \cdot z}}$. De esta discusión se puede concluir que los rayos geodésicos que parten de 0 existen para todo tiempo y por lo tanto que $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ es completa.

De lo anterior se tiene que

$$d(0,z) = \frac{1}{2} ln \left(\frac{1+\sqrt{z \cdot z}}{1-\sqrt{z \cdot z}} \right),$$

y por lo tanto que

$$\begin{aligned} cosh(d(0,p)) &= \tfrac{1}{\sqrt{1-p \cdot p}} \\ &= \tfrac{|\langle (p,1),(0,1) \rangle|}{|\langle (p,1),(p,1) \rangle|^{1/2} |\langle (0,1),(0,1) \rangle|^{1/2}}. \end{aligned}$$

Dados $p, q \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, y $\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathbb{C}^{n+1}$ tales que $\pi(\tilde{p}) = p$ y $\pi(\tilde{q}) = q$, con π la identificación canónica, se tiene que

$$\frac{|\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle|}{|\langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle|^{1/2} |\langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle|^{1/2}}.$$

no depende de la elección de $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$, sino solamente de p y q. Además este número es $U(n,1)$ invariante y como este grupo actúa transitivamente en el espacio hiperbólico complejo, se tiene que

$$cosh(d(p,q)) = \frac{|\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle|}{|\langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle|^{1/2} |\langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle|^{1/2}}.$$

Anteriormente se mostró que toda transformación en $U(n,1)$ induce una isometría holomorfa en $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, la siguiente proposición afirma que así son todas las isometrías holomorfas.

Proposición 3.3. *Sea M una variedad riemanniana conexa y sea G un subgrupo de $Isom(M)$ que actúa transitivamente en M. Si para todo $x \in M$, la acción de G_x en T_xM es transitiva en los marcos de T_xM, entonces $G = Isom(M)$.*

Demostración. Sean $x \in M$ y $\varphi \in Isom(M)_x$. Existe $g \in G_x$ tal que $dg_x = d\varphi_x$, por la suposición de que G_x actúa transitivamente en los marcos de T_xM. Entonces g y φ coinciden en una vecindad de x. Por esto el conjunto

$$\{y \in M \mid g(y) = \varphi(y) \text{ y } dg_y = d\varphi_y\}$$

es abierto, cerrado y no vacío, y por lo tanto $g = \varphi$. Ahora sean $\varphi \in Isom(M)$ y $x \in M$. Existe $g \in G$ tal que $g(x) = \varphi(x)$, entonces $g^{-1} \circ \varphi \in Isom(M)_x = G_x$ y por lo tanto $\varphi \in G$. $\square$

Si M es una variedad compleja con una métrica hermitiana, hay un resultado análogo si se consideran isometrías holomorfas de M y marcos complejos.

Aplicaremos las ideas de la prueba anterior a $G = \{\overline{A} \mid A \in U(n,1)\}$ pero ahora $Isom(\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}})$ denotará al conjunto de isometrías holomorfas de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ con la topología compacto abierta.

Proposición 3.4. *La aplicación $U(n,1) \xrightarrow{\Psi} Isom(\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}})$, dada por $\Psi(A) = \overline{A}$ es continua, suprayectiva y abierta.*

Demostración. A $U(n,1)$ se le considerará con la topología compacto abierta. La suprayectividad de Ψ es consecuencia de la proposición anterior, del comentario subsecuente a ésta y del hecho que para toda $x \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, $U(n,1)_x$ actúa transitivamente en los marcos complejos tangentes a x.

Sean $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^n$ la identificación canónica, $A \in U(n,1)$ y sea

$$W^K = \{\varphi \in Isom(\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}) \mid \varphi(K) \subset W\},$$

con K compacto y W abierto, una vecindad subbásica de $\overline{A} \in Isom(\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}})$. Se puede identificar $K \subset \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ con un subconjunto compacto de B^n. Sea $\tilde{K} = K \times \{1\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Obsérvese que $\Psi((\pi^{-1}W)^{\tilde{K}}) = W^K$. En efecto, si $B \in (\pi^{-1}W)^{\tilde{K}}$ y $k \in \tilde{K}$, $\overline{B}(\pi(k)) = \pi(B(k)) \in W$, pues $B(k) \in \pi^{-1}W$. Por otro lado si $\overline{B} \in W^K$ y $k \in \tilde{K}$, $\pi(B(k)) = \overline{B}(\pi(k)) \in W$. Por lo tanto $B(k) \in \pi^{-1}W$ y se da la igualdad. Por último, $(\pi^{-1}W)^{\tilde{K}}$ es una vecindad de A, pues si $k \in \tilde{K}$, $\pi(A(k)) = \overline{A}(\pi(k)) \in W$. Entonces Ψ es continua y abierta. $\square$

Se utilizó implícitamente que las topologías compacto abierta, como grupo de transformaciones de $\mathbb{C}^{n+1}$, y de grupo matricial en $U(n,1)$ coinciden. De lo anterior se puede concluir que $Isom(\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}})$ tiene una única estructura de grupo de Lie para la cual Ψ es una submersión y un homomorfismo. El núcleo de Ψ es el conjunto de matrices diagonales con un complejo unitario en la diagonal. Este subgrupo es el centro de $U(n,1)$, y a menudo se denota $PU(n,1)$ a $U(n,1)/ker(\Psi)$.

3.2. Las funciones de Busemann y la frontera visual.

Diremos que una curva lisa $\mathbb{R}^+ \xrightarrow{\gamma} \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ es un *rayo geodésico* si es una isometría métrica. Identificando el espacio hiperbólico complejo con B^n, se mostró anteriormente que si $V \in \mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, entonces $\gamma_V(t) = tanh(t)V$ es el rayo geodésico que parte de 0 en la dirección V. Pensando esta curva en el espacio proyectivo se tiene que $\lim_{t\to\infty} tanh(t)V = V$ (identificando V con $[V:1] \in \mathbb{C}P^n$).

Obsérvese que $\mathbb{S}^{2n-1}$ representa al conjunto de líneas isotrópicas de $\mathbb{C}^{n+1}$. Llamaremos la *frontera visual de* $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ a esta $2n-1$ esfera. Obsérvese que todo rayo geodésico que parte de 0 tiende a un punto en la frontera visual y todo punto en la frontera visual es límite de un único rayo geodésico que parte de 0.

Una isometría holomorfa de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ es de la forma $\overline{A}$ para alguna $A \in U(n,1)$, esto muestra que toda isometría holomorfa de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ se extiende naturalmente a una transformación del espacio proyectivo que preserva las líneas isotrópicas. Entonces cada isometría holomorfa de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ induce una transformación en la frontera visual de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. Usando esto y que la acción de $U(n,1)$ en $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ es transitiva, se puede definir para cada $x \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ una función $T^1_x\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\lambda_x} \mathbb{S}^{2n-1}$, donde $T^1_x\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ es el conjunto de vectores tangentes a x de norma 1 y donde λ_x es tal que $\lambda_x(v)$ es el límite del rayo geodésico basado en x y tangente a v. A la función λ_x le llamaremos el *mapeo visual asociado* *a x*. Si $A \in U(n,1)$, se tiene el diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{2n-1} & \xrightarrow{\overline{A}} & \mathbb{S}^{2n-1} \\ \lambda_x \big\uparrow & & \lambda_{\overline{A}(x)} \big\uparrow \\ T^1_x\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{d\overline{A}_x} & T^1_{\overline{A}(x)}\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \end{array}$$

Identificando naturalmente $T^1_0\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ con $\mathbb{S}^{2n-1}$, ya se mostró que $\lambda_0 = Id_{\mathbb{S}^{2n-1}}$.

A continuación se demostrará que la frontera visual de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ se puede identificar con un conjunto de clases de equivalencia de rayos geodésicos en $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. En ese sentido es útil la siguiente construcción. Sean $p \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ y $\tilde{p} \in \mathbb{C}^{n+1}$ tales que $\pi(\tilde{p}) = p$ y $\langle \tilde{p}, \tilde{p}\rangle = -1$. Sea $v \in \tilde{p}^{\perp}$ y supóngase que $\langle v, v\rangle = 1$. Llámese $\tilde{\gamma}_v$ a la curva en $\mathbb{C}^{n+1}$ que parte de $\tilde{p}$, dada por $\tilde{\gamma}_v(t) = cosh(t)\tilde{p} + sinh(t)v$. Es claro que para toda t, $\langle \tilde{\gamma}_v(t), \tilde{\gamma}_v(t)\rangle = -1$. Se afirma que $\gamma_v = \pi \circ \tilde{\gamma}_v$ es un rayo geodésico en $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. En efecto, para $t, t' \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} cosh(d(\gamma_v(t), \gamma_v(t')) &= \frac{|\langle \tilde{\gamma}_v(t), \tilde{\gamma}_v(t')\rangle|}{|\langle \tilde{\gamma}_v(t), \tilde{\gamma}_v(t)\rangle|^{1/2}|\langle \tilde{\gamma}_v(t'), \tilde{\gamma}_v(t')\rangle|^{1/2}} \\ &= |\langle cosh(t)\tilde{p} + sinh(t)v, cosh(t')\tilde{p} + sinh(t')v\rangle| \\ &= cosh(t - t'). \end{aligned}$$

Por lo tanto $d(\gamma_v(t), \gamma_v(t')) = |t - t'|$. Como $\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}_v|_0 = v$, identificando $\tilde{p}^{\perp}$ con $T_p\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ mediante $d\pi_{\tilde{p}}$, se tiene que γ_v es el rayo geodésico de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ que parte de p con dirección v. Obsérvese que $\langle \tilde{p} + v, \tilde{p} + v\rangle = 0$.

Se afirma que con la identificación anterior para cada $p \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ se tiene

$$\lambda_p(v) = \pi(\tilde{p} + v).$$

En efecto, la curva $t \mapsto e^{-t}\tilde{\gamma}_v(t)$ en $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ converge a $\frac{1}{2}(\tilde{p} + v)$ cuando t tiende a infinito, y como $\pi(e^{-t}\tilde{\gamma}_v(t)) = \pi(\tilde{\gamma}_v(t))$, se tiene la afirmación.

La frontera visual de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ puede ser construida como un conjunto de clases de equivalencia de rayos geodésicos de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. Dados dos rayos geodésicos (no necesariamente con el mismo punto base) σ y τ, diremos que están relacionados si el conjunto $\{d(\sigma(t), \tau(t)) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ es acotado. Claramente esto define una relación de equivalencia en el conjunto de rayos geodésicos de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

Proposición 3.5. *Sea $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ la esfera que hemos identificado con la frontera visual de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. Entonces dos rayos geodésicos con velocidad unitaria están relacionados si, y sólo si, tienden al mismo punto de $\mathbb{S}^{2n-1}$.*

Demostración. Sean σ y τ dos rayos geodésicos en $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. Supóngase que

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \lim_{t\to\infty} \tau(t) \in \mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n.$$

Sean $\tilde{\sigma}(t) = \cosh(t)p + \sinh(t)v$ y $\tilde{\tau}(t) = \cosh(t)q + \sinh(t)w$, dos curvas en $\mathbb{C}^{n+1}$, con $\langle p, p\rangle = -1 = \langle q, q\rangle$, $\langle v, v\rangle = 1 = \langle w, w\rangle$ y con v y w ortogonales a p y q, respectivamente. Supóngase además que $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$ son levantamientos de σ y τ respectivamente.

Como se supuso $\pi(p+u)=\pi(q+v)$, y esta es una línea isotrópica, se tiene que $\langle p+u, q+v\rangle = 0$. Por lo tanto $\langle p,q\rangle + \langle u,v\rangle = -\langle p,v\rangle - \langle u,q\rangle$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
|\langle \tilde\sigma(t), \tilde\tau(t)\rangle| &= |\cosh(t)^2\langle p,q\rangle + \sinh(t)^2\langle u,v\rangle + \sinh(t)\cosh(t)(\langle u,q\rangle + \langle p,v\rangle)| \\
&= |\langle p,q\rangle + (\langle p,q\rangle + \langle u,v\rangle)(\sinh(t)^2 - \sinh(t)\cosh(t))| \\
&= \cosh(d(\sigma(t),\tau(t))).
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{t\to\infty} \cosh(d(\sigma(t),\tau(t))) = \frac{1}{2}|\langle p,q\rangle - \langle u,v\rangle|,$$

entonces $\{d(\sigma(t),\tau(t)) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$ es un conjunto acotado. Ahora supóngase que σ y τ son tales que el conjunto anterior es acotado. Tanto σ como τ convergen, vistas como curvas en el espacio proyectivo, a dos puntos x y y en $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$. Se demostró que para cualquier punto en $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ y para cualquier $x \in \mathbb{S}^{2n-1}$, existe un rayo geodésico que parte de dicho punto y que en el espacio proyectivo converge a x. Sean λ y γ dos rayos geodésicos que parten de 0 y que convergen a x y y respectivamente. Se tiene que los conjuntos $\{d(\sigma(t),\lambda(t)) | t \in \mathbb{R}^+\}$ y $\{d(\tau(t),\gamma(t)) | t\in\mathbb{R}^+\}$ son acotados. Por lo tanto el conjunto $\{d(\lambda(t),\gamma(t)) | t \in \mathbb{R}^+\}$ es acotado.

Ahora si γ_v y γ_w son dos rayos geodésicos distintos que parten de 0 con direcciones v y w, respectivamente, es fácil mostrar que para $t \in \mathbb{R}^+$, la función

$$t \mapsto \cosh(d(\gamma_v(t),\gamma_w(t)) = \frac{|\tanh(t)^2 v\cdot w - 1|}{1-\tanh(t)^2}$$

está acotada si, y sólo si, $v = w$. Por lo tanto se puede concluir que $\lambda = \gamma$, y por lo tanto, que σ y τ convergen al mismo punto en la frontera visual. $\square$

Así es posible identificar la frontera visual con un conjunto que no depende de las coordenadas. Esta definición "abstracta" de la frontera visual tiene sentido para variedades de Hadamard o más generalmente para espacios $CAT(0)$.

Sea σ un rayo geodésico y sea $x \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. Es una consecuencia de la desigualdad triangular que la función $t \mapsto d(x,\sigma(t)) - t$ es decreciente y acotada inferiormente por $-d(x,\sigma(0))$. Entonces $\lim_{t\to\infty} d(x,\sigma(t)) - t$ existe.[2] Llamemos $b_\sigma(x)$ a este número. A la función b_σ le llamaremos la *función de Busemann* asociada a σ. Sea

$$\tilde\sigma(t) = \cosh(t)p + \sinh(t)u$$

un levantamiento de σ y sea $q \in \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\pi(q) = x$ y $\langle q,q\rangle = -1$, entonces

$$\begin{aligned}
b_\sigma(x) &= \lim_{t\to\infty} d(\sigma(t),x) - t \\
&= \lim_{t\to\infty} \operatorname{arcosh}\left(|\langle\tilde\sigma(t),q\rangle|\right) - t \\
&= \lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{|\langle\tilde\sigma(t),q\rangle| + \sqrt{|\langle\tilde\sigma(t),q\rangle|^2-1}}{e^t}\right) \\
&= \ln\left(|\langle p+u,q\rangle|\right) \\
&= \ln\left(\frac{|\langle p+u,q\rangle|}{|\langle q,q\rangle|^{1/2}}\right).
\end{aligned}$$

[2] Esto es válido para cualquier espacio métrico.

Sean τ y σ dos rayos geodésicos asintóticos, y tómense respectivamente dos levantamientos de la forma, $\cosh(t)p + \sinh(t)u$ y $\cosh(t)q + \sinh(t)v$. Si $\tilde{x} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ es tal que $\pi(\tilde{x}) = x$ y $\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle = -1$, entonces $b_\sigma(x) = \ln(|\langle p+u, \tilde{x} \rangle|)$ y $b_\tau(x) = \ln(|\langle q+v, \tilde{x} \rangle|)$. Como τ y σ son asintóticos, $q + v = \lambda(p + u)$, para algún $\lambda \neq 0$. Entonces $b_\sigma(x) = b_\tau(x) + \ln(|\lambda|)$. De esto se desprende que la función suave

$$\gamma_{x,y}(q) = b_\sigma(x) - b_\sigma(y),$$

con $q \in \partial\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ y σ un rayo geodésico que tiende al infinito a q, sólo depende de la clase de asintoticidad de σ.

Dados dos rayos geodésicos σ y τ que no son asintóticos, y dadas las curvas $\cosh(t)p+\sinh(t)u$ y $\cosh(t)q+\sinh(t)v$, que son levantamientos respectivos, haciendo un cálculo sencillo se obtiene que

$$\lim_{t\to\infty} d(\sigma(t), \tau(t)) - 2t = \ln(|\langle p+u, q+v \rangle|).$$

Entonces para σ, τ y x como antes,

$$\begin{array}{rcl} \lim_{t\to\infty} d(\sigma(t), \tau(t)) - d(\sigma(t), x) - d(\tau(t), x) & = & \ln\left(\frac{|\langle p+u,q+v\rangle|}{|\langle p+u,\tilde{x}\rangle||\langle q+v,\tilde{x}\rangle|}\right) \\ & = & \ln\left(\frac{|\langle p+u,q+v\rangle||\langle \tilde{x},\tilde{x}\rangle|}{|\langle p+u,\tilde{x}\rangle||\langle q+v,\tilde{x}\rangle|}\right). \end{array}.$$

De las fórmulas obtenidas es claro que este último número no depende de la clase de asintoticidad de σ ni de la de τ, ni tampoco de la elección de $\tilde{x}$. Es decir, dados $p, q \in \partial\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ distintos y $x \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$,

$$f_x(p,q) = \ln\left(\frac{|\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle||\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle|}{|\langle \tilde{p}, \tilde{x} \rangle||\langle \tilde{q}, \tilde{x} \rangle|}\right)$$

está bien definido, donde $\tilde{x}, \tilde{p}$ y $\tilde{q}$ son levantamientos de x, p y q en $\mathbb{C}^{n+1}$. Como toda isometría holomorfa de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ es inducida por alguna transformación en $U(n,1)$, todas estas isometrías también están definidas en la frontera visual. Como consecuencia de esto se tiene que para ϕ una isometría holomorfa de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$,

$$f_{\phi(x)}(\phi(p), \phi(q)) = f_x(p,q).$$

Obsérvese que se tiene la relación, directa de las fórmulas obtenidas,

$$f_x(p,q) - f_y(p,q) = \gamma_{x,y}(p) + \gamma_{x,y}(q).$$

3.3. U(n,1) tiene la propiedad de Haagerup.

En esta última sección se construirá una acción afín propia de $U(n,1)$ utilizando la construcción previa a la Proposición 1.10.

Dado un espacio vectorial real V de dimensión n con un producto interior definido positivo y no degenerado, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, sea $S = \{v \in V | \langle v, v \rangle = 1\}$. El espacio tangente a S

en un punto $v \in S$ se puede identificar con el subespacio de V de vectores ortogonales a v. Por lo tanto el producto $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induce una métrica riemanniana en S.

Fíjese una orientación en V. Esto permite definir una orientación canónica en cada espacio T_pV, con $p \in V$. Tómese la n-forma diferencial ω de V tal que para $v \in V$ y cada base ortonormal orientada positivamente $(w_1,\ldots,w_n)$ de V, $\omega_v(w_1,\ldots,w_n) = 1$. Sea χ un campo vectorial en V suave tal que $\chi(v) = v$ para todo $v \in S$. Sea $\tilde{\mu}$ la $(n-1)$-forma diferencial de V tal que para $p \in V$ y $w_1,\ldots,w_{n-1}$ vectores tangentes a $p \in V$, $\tilde{\mu}_p(w_1,\ldots,w_{n-1}) = \omega_p(\chi(p),w_1,\ldots,w_{n-1})$. Sea $S \xrightarrow{\iota} V$ la inclusión. Entonces $\iota^*\tilde{\mu}$ es una $(n-1)$-forma diferencial que no se anula, y que dada una orientación en V, está canónicamente definida. Sea μ el único múltiplo de $\iota^*\tilde{\mu}$ tal que $\int_S \mu = 1$.

Para cada $x \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, el mapeo visual $T^1_x\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\lambda_x} \mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ es un difeomorfismo que respeta la orientación. Ya que por un lado $\lambda_0 = Id_{\mathbb{S}^{2n-1}}$ y por otro lado, para cada $x \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, λ_x se puede obtener componiendo λ_0 con difeomorfismos que preservan la orientación.

Por lo dicho arriba, fijando una orientación en $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, para cada $x \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ existe canónicamente $\tilde{\mu}_x$ una $(2n-1)$-forma diferencial en $T^1_x\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ de integral 1. Defínase $\mu_x = (\lambda_x^{-1})^*\tilde{\mu}_x$.

Sea E el espacio de formas diferenciales de grado máximo en $\mathbb{S}^{2n-1}$ de integral 0. Obsérvese que para todas $x,y \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, $\mu_x - \mu_y \in E$. Sea $A \in U(n,1)$ y $x \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, anteriormente se utilizó que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{2n-1} & \xrightarrow{\overline{A}} & \mathbb{S}^{2n-1} \\ \lambda_x\Big\uparrow & & \Big\uparrow\lambda_{\overline{A}(x)} \\ T^1_x\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{d\overline{A}_x} & T^1_{\overline{A}(x)}\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \end{array}$$

Se puede mostrar, utilizando este diagrama y el hecho de que $d\overline{A}_x$ es una isometría, que $\mu_{\overline{A}(x)} = (\overline{A}^{-1})^*\mu_x$. Como el pullback de formas con integral cero, tiene integral cero, se puede definir una acción $U(n,1) \times E \to E$, dada por $A \cdot \alpha = (\overline{A}^{-1})^*\alpha$. Considerando la acción natural de $U(n,1)$ en $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, para toda $A \in U(n,1)$ y para toda $x \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ se tiene que $A \cdot \mu_x = \mu_{A\cdot x}$. Aquí se utiliza que $\overline{A}$ preserva la orientación.

Se dotará a E de una forma bilineal definida positiva y no degenerada, que será preservada por esta acción de $U(n,1)$.

Teorema 3.6. *Sean π_1 y π_2 las dos proyecciónes $\mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{S}^{2n-1}$ y sea $x \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. Dadas $\alpha,\beta \in E$, defínase $Q(\alpha,\beta) = -\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta} f_x\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\beta$. Entonces*

> *a) La forma Q está bien definida, es bilineal, simétrica y no depende de la elección de $x \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.*
>
> *b) La forma Q es preservada por la acción de $U(n,1)$.*

Demostración. a) Dadas $\alpha,\beta \in E$, para mostrar que $Q(\alpha,\beta)$ está bien definido, primero se demostrará que

$$-\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta} f_0\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\beta$$

existe. Para ello es suficiente ver que la función f_0 es integrable en una vecindad de cualquier punto (x,x) en $\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}$, ya que la forma $\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta$ está definida en todo $\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}$. Entonces se debe mostrar que la función $(p,q)\mapsto ln(1-p\cdot q)$ es integrable en una vecindad de cualquier (x,x) de la forma $U\times U$, para una U suficientemente pequeña. Obsérvese que esto es equivalente a demostrar que $(p,q)\mapsto |ln(1-p\cdot q)|$ es integrable en una vecindad suficientemente pequeña de (x,x). No se darán los detalles de esta demostración.

Es claro que Q, por ahora con $x=0$, define una forma $\mathbb{R}$ bilineal. Para probar que es simétrica, considérese la función $\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta\xrightarrow{\iota}\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta$, dada por $(p,q)\mapsto(q,p)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\iota^*\left(f_0\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta\right) &= f_0\pi_2^*\alpha\wedge\pi_1^*\beta\\ &= -f_0\pi_1^*\beta\wedge\pi_2^*\alpha\end{aligned}$$

Aquí se utilizó que f_0 es simétrica en sus dos variables y que $\pi_1\circ\iota=\pi_2$ y $\pi_2\circ\iota=\pi_1$. Por lo tanto, como ι invierte la orientación, $Q(\alpha,\beta)=Q(\beta,\alpha)$.

Sean α y β como arriba y sea $x\in\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta} f_x\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta &= \int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta} f_0\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta\\ &\quad+\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta}(\gamma_{x,0}\circ\pi_1)\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta\\ &\quad+\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta}(\gamma_{x,0}\circ\pi_2)\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta.\end{aligned}$$

Integrando primero con respecto a una variable y usando que $\int_{\mathbb{S}^{2n-1}}\beta=0$, se obtiene que

$$\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}}(\gamma_{x,0}\circ\pi_1)\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta=0.$$

Análogamente se demuestra que

$$\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}}(\gamma_{x,0}\circ\pi_2)\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta=0.$$

Como

$$\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta}(\gamma_{x,0}\circ\pi_1)\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta=\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}}(\gamma_{x,0}\circ\pi_1)\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta$$

y

$$\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta}(\gamma_{x,0}\circ\pi_2)\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta=\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}}(\gamma_{x,0}\circ\pi_2)\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta,$$

se puede conlcuir que

$$\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta} f_x\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta=\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta} f_0\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta,$$

y por lo tanto, que la definición de Q no depende de $x\in\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$.

b) Dada una isometría φ de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, se tiene que $f_{\varphi(x)}(\varphi(p),\varphi(q))=f_x(p,q)$. Si α y β son formas como antes y $w\in\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$,

$$Q\big(\varphi^*\alpha,\varphi^*\beta\big) \;=\; \int f_{\varphi^{-1}(w)}\pi_1^*\varphi^*\alpha\wedge\pi_2^*\varphi^*\beta.$$

Como
$$\pi_1^*\varphi^*\alpha \wedge \pi_2^*\varphi^*\beta = (\varphi\times\varphi)^*(\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta),$$
se tiene que
$$f_{\varphi^{-1}(w)}\pi_1^*\varphi^*\alpha \wedge \pi_2^*\varphi^*\beta = (\varphi\times\varphi)^*\big(f_w\pi_1^*\alpha\wedge\pi_2^*\beta\big),$$
y por lo tanto, $Q(\varphi^*\alpha,\varphi^*\beta) = Q(\alpha,\beta)$. □

Lema 3.7. *Dada $\alpha\in E$ y dados $x,y\in\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$,*
$$-Q(\mu_y-\mu_x,\alpha) = \int_{\mathbb{S}^{2n-1}}\gamma_{x,y}\alpha.$$

Demostración. Se tiene que
$$\begin{aligned}-Q(\mu_y-\mu_x,\alpha) &= \textstyle\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta} f_x\pi_1^*(\mu_y-\mu_x)\wedge\pi_2^*\alpha\\ &= \textstyle\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta}(f_x-f_y)\pi_1^*\mu_y\wedge\pi_2^*\alpha\\ &\quad+\textstyle\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta} f_y\pi_1^*\mu_y\wedge\pi_2^*\alpha\\ &\quad-\textstyle\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta} f_x\pi_1^*\mu_x\wedge\pi_2^*\alpha.\end{aligned}$$

Se afirma que los dos últimos términos son cero. La función $q\mapsto\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\{q\}} f_x(p,q)\mu_x(p)$ es constante, pues dados $q,q_1\in\mathbb{S}^{2n-1}$ existe $A^{-1}\in U(n,q)_x$ tal que $\overline{A}(q)=q_1$. Esto debido a que el estabilizador de x actúa transitivamente en $T^1_x\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. Por lo tanto, si en unas coordenadas alrededor de un punto p_0, $\mu_{xX} = k(X)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{2n-1}$, y si en unas coordenadas alrededor de $\overline{A}(p_0)$, $\mu_{xY} = l(Y)dy_1\wedge\cdots\wedge dy_{2n-1}$, se tiene que alrededor de p_0,
$$\begin{aligned}\overline{A}^*(f_x(p,\overline{A}(q))\mu_x(p))_X &= f_x(\overline{A}(X),\overline{A}(q))l(\overline{A}(X))\det(d\overline{A}_X)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{2n-1}\\ &= f_x(\overline{A}(X),\overline{A}(q))k(X)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{2n-1}\\ &= f_x(X,q)k(X)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{2n-1}\\ &= f_x(p,q)\mu_x(p)_X,\end{aligned}$$
pues
$$\overline{A}^*\mu_x = \mu_{\overline{A}^{-1}(x)} = \mu_x.$$
Entonces $\overline{A}^*(f_x(p,\overline{A}(q))\mu_x(p)) = f_x(p,q)\mu_x(p)$, y por ello,
$$\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\{\overline{A}(q)\}} f_x\big(p,\overline{A}(q)\big)\mu_x(p) = \int_{\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\{q\}} f_x(p,q))\mu_x(p).$$
Utilizando este hecho y que $\int_{\mathbb{S}^{2n-1}}\alpha=0$, se obtiene que
$$\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta} f_y\pi_1^*\mu_y\wedge\pi_2^*\alpha = 0.$$
Análogamente se demuestra que
$$\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta} f_x\pi_1^*\mu_x\wedge\pi_2^*\alpha = 0.$$

Por otro lado $f_x - f_y = \gamma_{x,y} \circ \pi_1 + \gamma_{x,y} \circ \pi_2$, entonces el término que falta por analizar es

$$\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta} (\gamma_{x,y}\circ\pi_1+\gamma_{x,y}\circ\pi_2)\pi_1^*\mu_y\wedge\pi_2^*\alpha = \int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}} (\gamma_{x,y}\circ\pi_1+\gamma_{x,y}\circ\pi_2)\pi_1^*\mu_y\wedge\pi_2^*\alpha.$$

Usando particiones de la unidad y coordenadas producto, se puede concluir que

$$\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}} (\gamma_{x,y}\circ\pi_1)\pi_1^*\mu_y\wedge\pi_2^*\alpha = \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \gamma_{x,y}\mu_y \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \alpha = 0$$

y que

$$\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}} (\gamma_{x,y}\circ\pi_2)\pi_1^*\mu_y\wedge\pi_2^*\alpha = \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \gamma_{x,y}\alpha \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \mu_y = \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \gamma_{x,y}\alpha.$$

□

Dados $x, y \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, para todo $A^{-1} \in U(n,1)_x$, como $\overline{A}^*\mu_x = \mu_x$, se tiene que

$$\begin{aligned} \overline{A}^*(\gamma_{x,y}\mu_x) &= \gamma_{x,y}\circ\overline{A}\mu_x \\ &= \gamma_{x,\overline{A}^{-1}(y)}\mu_x. \end{aligned}$$

Por lo anterior y debido a que $U(n,1)$ actúa transitivamente en cualquier esfera métrica $\{y \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \mid d(y,x) = r\}$, la función $y \mapsto \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \gamma_{x,y}\mu_x$ es invariante en cada una de las esferas anteriores. Y si además $A \in U(n,1)$ es tal que $\overline{A}^{-1}(x) = y$, se tiene que

$$\begin{aligned} \overline{A}^*(\gamma_{x,y}\mu_x) &= (\gamma_{x,y}\circ\overline{A})\overline{A}^*\mu_x \\ &= \gamma_{y,\overline{A}^{-1}(y)}\mu_y \\ &= -\gamma_{\overline{A}^{-1}(y),y}\mu_y. \end{aligned}$$

Entonces $\int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \gamma_{x,y}\mu_x = -\int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \gamma_{z,y}\mu_y$ para cualquier z tal que $d(z,y) = d(x,y)$, en particular para x. Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} Q(\mu_y-\mu_x, \mu_y-\mu_x) &= -\int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \gamma_{x,y}(\mu_y-\mu_x) \\ &= -2\int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \gamma_{x,y}\mu_x. \end{aligned}$$

Obsérvese que, si D es la bola abierta de radio π y centrada en el origen de $\mathbb{R}^{2n-1}$, $x = 0$ y $y = (R, 0, \ldots, 0)$, con $R < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \gamma_{x,y}\mu_x &= \int_D \ln\left(\frac{1-R\cos(\|p\|)}{(1-R^2)^{1/2}}\right) dp \\ &\geq \int_D \ln\left(\frac{1-R}{(1-R^2)^{1/2}}\right) dp. \end{aligned}$$

Por lo tanto tomando R cercano a 1, $\int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \gamma_{0,y}\mu_0$ tiende a $-\infty$. Esto demuestra lo siguiente.

Proposición 3.8. *Si $x, y \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, entonces $Q(\mu_y-\mu_x, \mu_y-\mu_x) \to \infty$, si $d(x,y) \to \infty$.*

Ahora demostraremos que Q es definida positiva, e induciremos una acción de $U(n,1)$ fuertemente continua en $\overline{E}$, la completación de E con la forma Q. Con lo cual se terminaría la demostración de que $U(n,1)$ tiene la propiedad de Haagerup.

Un *kernel de tipo positivo* es una función continua $X \times X \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ tal que para cualquier $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ y $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C}$ se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_i \overline{z}_j f(x_i, x_j) \geq 0.$$

Esta definición es muy similar a la de función de tipo positivo que se ha utilizado en este texto. De hecho se puede probar con la misma técnica de la construcción de Gelfand-Neimark-Segal que aparece en este texto que para cada kernel de tipo positivo f, existen $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y una función continua $X \xrightarrow{\varphi} \mathcal{H}$ tal que $f(x,y) = \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle$. También se puede demostrar que las propiedades de la Proposición 1.6 se valen si se cambia función de tipo positivo por kernel de tipo positivo.

Considérese $\alpha \in E$, entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcl} Q(\alpha,\alpha) & = & -\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta} f_0(p,q)\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\alpha \\ & = & -\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta} ln|1-p\cdot q|\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\alpha. \end{array}$$

Se afirma que para $p, q \in \mathbb{S}^{2n-1}$ tales que p y q no son proporcionales se tiene que

$$-ln|1-p\cdot q| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} Re((p\cdot q)^j).$$

En efecto, sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$. Entonces

$$|1-z| = |exp(log(1-z))| = exp\big(Re(log(1-z))\big).$$

Por lo tanto $ln|1-z| = Re(log(1-z))$. Como $log(1-z) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} z^j$, se tiene la afirmación.

Cada función $(p,q) \mapsto \frac{1}{j} Re((p\cdot q)^j)$ es un kernel de tipo positivo (ver Proposición 1.6). Sea $\{U_1, \ldots, U_m\}$ una cubierta abierta de $\mathbb{S}^{2n-1}$ de dominios de cartas. Supóngase que la imagen de cada una de estas cartas es el mismo abierto cúbico de $\mathbb{R}^{2n-1}$. Llámese U a este abierto. Sea $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ una partición de la unidad subordinada a esta cubierta y considérese la partición de la unidad $\{\varphi_i \cdot \varphi_j\}_{i,j}$ subordinada a la cubierta $\{U_i \times U_j\}_{i,j}$ de $\mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^{2n-1}$. Supóngase que en las coordenadas U_i se tiene $\alpha(X) = a_i(X) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2n-1}$. Para cada k,

$$\begin{array}{rl} & \int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}} \frac{1}{k} Re((p\cdot q)^k)\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\alpha \\ = & \sum_{i,j=1}^{m} \int_{U\times U} \frac{1}{k}\varphi_i(X)a_i(X)\varphi_j(Y)a_j(Y)Re((X\cdot Y)^k)dXdY. \end{array}$$

Por lo tanto para cada i, j la integral respectiva puede ser aproximada por sumas de Riemann de la forma

$$\sum_{r,s=1}^{l} \varphi_i(p_r)\varphi_j(p_s)\mu(E_r)\mu(E_s)a_i(p_r)a_j(p_s)\frac{1}{k}Re((p_r\cdot p_s)^k)) \geq 0.$$

Las sumas anteriores son no negativas debido a que la función $(x, y) \mapsto \frac{1}{k}Re((x \cdot y)^k))$ es de tipo positivo. Como consecuencia de esto

$$\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta} \frac{1}{k}Re((p \cdot q)^k)\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\alpha = \int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}} \frac{1}{k}Re((p \cdot q)^k)\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\alpha \geq 0.$$

La única manera en que dados $p, q \in \mathbb{S}^{2n-1}$ se tenga $|p \cdot q| = 1$ es que p y q sean proporcionales. El conjunto W de puntos $(p, q) \in \mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^{2n-1}$ tales que p y q no son proporcionales es un abierto denso en $\mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^{2n-1}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^{2n-1}\setminus\Delta} ln|1 - p \cdot q|\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\alpha &= -\int_W ln|1 - p \cdot q|\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\alpha \\ &= -\int_W \sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{1}{j}Re((p \cdot q)^j)\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\alpha \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_W \tfrac{1}{j}Re((p \cdot q)^j)\pi_1^*\alpha \wedge \pi_2^*\alpha. \end{aligned}$$

Entonces $Q(\alpha, \alpha) \geq 0$, para toda $\alpha \in E$. Antes se mostró que existe $\gamma \in E$ para la cual existe $g \in U(n, 1)$ tal que $Q\big(\pi(g)\gamma - \gamma, \pi(g)\gamma - \gamma\big)$ es tan grande como se quiera. Se afirma que toda $\beta \in E$ tiene esta propiedad. En efecto,

$$\begin{aligned} Q\big(\pi(g)\gamma - \gamma, \pi(g)\gamma - \gamma\big) &\leq Q\big(\beta - \gamma, \beta - \gamma\big) + Q\big(\pi(g)\beta - \beta, \pi(g)\beta - \beta\big) + \\ &\quad\; Q\big(\pi(g)\beta - \pi(g)\gamma, \pi(g)\beta - \pi(g)\gamma\big) \\ &= C + Q(\pi(g)\beta - \beta, \pi(g)\beta - \beta\big). \end{aligned}$$

para alguna constante C. Por lo tanto si el lado izquierdo de la desigualdad puede ser tan grande como se quiera, el lado derecho también.

Como toda $\alpha \in E$ es tal que $\|\pi(g)\alpha - \alpha\|^2 \neq 0$, para alguna $g \in G$, se afirma que el producto interior Q es no degenerado. En efecto, si $\alpha \in E$ es tal que $Q(\alpha, \alpha) = 0$, por el Lema 1.4,

$$\begin{aligned} Q\big(\pi(g)\alpha - \alpha, \pi(g)\alpha - \alpha\big) &= 2Q(\alpha, \alpha) - 2Q(\pi(g)\alpha, \alpha) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto Q es no degenerada. Tomando $\overline{E}$ la completación de E para el producto interior Q, podemos extender la acción ortogonal de $U(n, 1)$ a $\overline{E}$. Dicho esto se puede concluir el siguiente teorema.

Teorema 3.9. *$U(n, 1)$ tiene la propiedad de Haagerup.*

Demostración. Falta por mostrar dos cosas, que la representación ortogonal de $U(n, 1)$ en $\overline{E}$ es fuertemente continua y que la función $g \mapsto \|\pi(g)\mu_x - \mu_x\|^2$ es propia.

Para lo primero es suficiente demostrar, por un argumento de densidad, que la acción de $U(n, 1)$ en E es fuertemente continua para la topología inducida por Q. Para ello es suficiente mostrar que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $U(n, 1)$ que converge a la identidad y $\alpha \in E$, entonces $(Q(A_n^*\alpha, \alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $Q(\alpha, \alpha)$.

Con las ideas de la Proposición 3.4, y debido a que $\mathbb{S}^{2n-1}$ es cerrada en B^n, se puede probar que la aplicación $A \mapsto \overline{A}$ es una transformación continua entre $U(n, 1)$ y $Difeo(\mathbb{S}^{2n-1})$, donde ambos espacios tienen la topología compacto abierta.

Dada U una carta compacta de $\mathbb{S}^{2n-1}$, las formas diferenciales en E restringidas a U se pueden identificar con un subconjunto de $C^1(U)$. Sea V_m la unión de las imágenes de U bajo el conjunto $\{\overline{A}_n\}_{n\geq m}$. Para m suficientemente grande se puede suponer que $V_m \cup U$ está contenido en un dominio de una carta W. Sin pérdida de generalidad sea $m = 0$. Considerando esto se tiene que en U, $(det(d_x\overline{A}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a 1. Por otro lado si $\alpha \in E$, y en las coordenadas W, $\alpha_Y = a(Y)dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{2n-1}$, entonces la sucesión $(a \circ \overline{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en U a la función a. La forma Q se puede calcular usando f_x, para cualquier x. Entonces en la vecindad $U \times U$ (achicando U si es necesario) se tiene,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{U\times U} f_x(p,q)a(p)a(q)dpdq - \int_{U\times U} f_{\overline{A}_i(x)}(\overline{A}_i(p), \overline{A}_i(q)) det(d_q\overline{A}_i)a(p)a(\overline{A}_i(q))dpdq \right| \\ \leq \; & \int_{U\times U} |f_x(p,q)| \left| a(p)\big(a(q) - det(d_q\overline{A}_i)a(\overline{A}_i(q))\big) \right| dpdq. \end{aligned}$$

Por la discusión anterior el término adentro del paréntesis converge uniformemente a 0. En cartas cúbicas compactas fuera de la diagonal el análisis es más sencillo. Como $\mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^{2n-1}$ es compacto, para probar que $Q(\alpha, \overline{A}_n^*\alpha) \to Q(\alpha, \alpha)$, es necesario controlar un número finito de integrales del tipo que se analizó. Dicho esto es fácil concluir que la acción de $U(n,1)$ en E es fuertemente continua.

En cuanto a lo segundo, se demostró que para cada $M > 0$ existe $T \geq 0$ tal que si $d_{\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}}(x,y) > T$, entonces $\|\mu_y - \mu_x\|^2 > M$. Por otro lado para $x \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, la aplicación de órbita $U(n,1) \to \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, dada por $g \mapsto g \cdot x$ es propia, pues las preimágenes de todos los puntos son compactas, ya que el estabilizador de cada $x \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ es compacto. Por lo tanto la aplicación $g \mapsto \|\pi(g)\mu_x - \mu_x\|^2$ es propia. □

Corolario 3.10. *$SU(n,1)$ y $O(n,1)$ tienen la propiedad de Haagerup.*

Demostración. Como $SU(n,1)$ es un subgrupo cerrado de $U(n,1)$, este hereda la propiedad de Haagerup. En el caso de $O(n,1)$ pasa lo siguiente. Es suficiente demostrar que $PO(n,1)$ tiene la propiedad de Haagerup. Si se traduce la demostración que se dio para $U(n,1)$ al caso real, se tiene que considerar al grupo $PO(n,1)_0$, pues estas transformaciones inducen difeomorfismos de la frontera visual que preservan la orientación. Y se tiene que mostrar que $PO(n,1)_0$ actúa transitivamente en el espacio hiperbólico real y en los marcos positivos tangentes a cada punto del hiperbólico. El problema con $PO(n,1)$ es que no todas las transformaciones en este grupo inducen difeomorfismos en la frontera visual que preservan la orientación. En sentido estricto el problema es que no preservan la integral de formas. Para ello hay que hacer una pequeña modificación a la acción de $PO(n,1)$ en el espacio de formas de grado máximo en la frontera visual, que se restringirá al espacio de formas con integral cero. Dada una forma α y $A \in PO(n,1)$, defínase $A \cdot \alpha$ como $(\overline{A}^{-1})^*\alpha$, si $\overline{A}$ preserva la orientación, y como $-(\overline{A}^{-1})^*\alpha$ si $\overline{A}$ no preserva la orientación. Con esta consideración se puede imitar la prueba que se dio para $U(n,1)$ al caso de $PO(n,1)$. □

En el artículo "Crofton Formulae and Geodesic Distance in Hyperbolic Spaces"[3] Guyan Robertson da otra demostración de esta afirmación. En ella define una medida en el espacio de hiperplanos (subvariedades totalmente geodésicas de codimensión 1)

[3]Guyan Robertson, "Crofton Formulae and Geodesic Distance in Hyperbolic Spaces", *Journal of Lie Theory* vol. 8, Darmstadt, 1998, p. 163-172.

en el espacio hiperbólico real, invariante bajo la acción de $O(n,1)$. Ahí demuestra que la medida del conjunto de hiperplanos que separan dos puntos es un multiplo (constante) de la distancia hiperbólica de dichos puntos. Utilizando este hecho demuestra que existe una función de tipo negativo y propia. Esta demostración no puede ser extendida al caso complejo pues en el espacio hiperbólico complejo no existen subvariedades totalmente geodésicas de codimensión 1.

Bibliografía

Akemann, Charles y Martin Walter, “Unbounded negative definite functions”, *Canadian Journal of Mathematics* vol. 33 núm. 4, Ottawa, 1981, p. 862-871.

Bekka, Bachir, *et al.*, *Kazhdan's Property (T)*, Cambridge, Cambridge University Press, 2008.

Bekka, Bachir, *et al.*, “Proper affine isometric actions of amenable groups”, en *Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 2* , de las *London Mathematical Society Lecture Note Series vol. 227*, Cambridge, Cambridge University Press, 1995, p. 1-4.

Cherix, Pierre-Alain, *et al.*, *Groups with the Haagerup Property: Gromov's a-T-menability*, Basilea, Springer Basel AG, 2001.

de la Harpe, Pierre y Alain Valette, *La Propriété (T) de Kazhdan pour les Groupes Localement Compacts*, *en Astérisque vol. 175*, Paris, Société Mathématique de France, 1989.

Fleming, Richard y James Jamison, *Isometries on Banach Spaces: function spaces*, de las *Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics vol. 129*, Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2002.

Jolissant, Paul, “Borel cocycles, approximation properties and relative property T”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* vol. 20, Cambridge, 2000, p. 483-499.

Kazhdan, David, “Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups”, *Functional Analysis and Its Applications* vol. 1, Dordrecht, 1967, p. 63-65.

Robertson, Guyan, “Crofton Formulae and Geodesic Distance in Hyperbolic Spaces”, *Journal of Lie Theory* vol. 8, Darmstadt, 1998, p. 163-172.