UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

SERIE PRINCIPAL ESFÉRICA Y ESPACIOS SIMÉTRICOS DE DIMENSIÓN INFINITA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
ARTURO SÁNCHEZ GONZÁLEZ

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR. PIERRE PY
IRMA, UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
ÁNGEL CANO CORDERO, IMATE-CUERNAVACA,
ADOLFO GUILLOT SANTIAGO, IMATE-CU

CIUDAD DE MÉXICO, AGOSTO 2020

A Ibeth

Agradecimientos

A Ibeth por todo su cariño, comprensión y paciencia durante todos estos años que hemos compartido. También por darme ánimos en algunos de los momentos más oscuros durante este periodo.

A mis padres y a mis hermanos por motivarme a avanzar cada vez más. Sus preguntas acerca de mi trabajo me hacen darme cuenta de algunas cosas que me faltan por aprender, pues la imposibilidad de hablar de ello tendía a mostrar puntos que hay que afinar.

Al Dr. Pierre Py por invitarme a realizar este proyecto y por su paciencia para explicarme, a veces más de una vez, algunos temas necesarios para la realización de esta investigación. También, por todo el apoyo recibido durante el primer año de doctorado y las facilidades que me brindó para mis estancias en la Universidad de Estrasburgo.

A las dos familias Bravo Rojas por recibirme como un miembro más de su familia. A la familia Bravo Rojas de Puebla por todos estos años de amistad y soporte. A la familia Bravo Rojas del Estado de México por recibirme en su casa y por el cobijo que me brindaron durante el año escolar 2014–2015.

A los doctores Ángel Cano y Adolfo Guillot por sus recomendaciones para lograr un mejor desempeño durante esta investigación. Además, agradezco al Dr. Guillot y al Dr. Ferrán Valdez por las acertadas observaciones que permitieron mejorar el presente documento. A los doctores Juan Manuel Burgos y Raúl Quiroga les agradezco la revisión de este texto.

A mis amigos, en general, por su amistad a lo largo del tiempo. A Jorge y Gonzalo por tantos años de pláticas motivacionales. A Óscar y Rodrigo por permitirme formar parte de un excelente equipo de trabajo durante la maestría. A Berenice por su ayuda con algunos temas de geometría y análisis y por las charlas sobre literatura y filosofía. A Octavio por las pláticas sobre problemas de la vida y cómo resolverlos. A Paco, Alejandro y Adela por las facilidades que me brindaron en la *gira europea*. A Karen por los cotidianos recordatorios de la importancia de ver la vida en positivo. A Ciria y Paulino por las charlas de literatura, política y matemáticas. A Ruth por las pláticas acerca de aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana. A Lalo García por su apoyo en algunos momentos difíciles. Si olvido a alguno de mis amigos, perdón, no ha sido intencional.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por la beca 701896 recibida durante 2018–2020 para la realización del presente trabajo.

ASG
Agosto 2020

Introducción

Un tema clásico dentro de la teoría de representaciones (de grupos) es el estudio de representaciones ortogonales (o unitarias) en espacios de Hilbert, por lo cual, uno se puede interesar en construcciones sobre espacios de Hilbert para obtener resultados más generales acerca de representaciones en ellos. Una primera construcción consiste en considerar formas cuadráticas no necesariamente definidas positivas en dichos espacios (así como sus respectivas formas bilineales asociadas) y estudiar los operadores que preservan dichas formas. En este sentido, si $p \geq 1$ es un entero y $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert real separable, dada una base hilbertiana $(e_j)_{j\geq 1}$ de $\mathscr{H}$ se define la forma bilineal

$$B_p(x,y) = \sum_{j=1}^{p} x_j y_j - \sum_{j\geq p+1} x_j y_j, \tag{1}$$

donde $x = \sum_{j\geq 1} x_j e_j$ y $y = \sum_{j\geq 1} y_j e_j$. Como se muestra en [8], salvo isomorfismo, B_p y $-B_p$ son las únicas formas *fuertemente no degeneradas* de *índice* p en $\mathscr{H}$, donde el índice es la dimensión máxima posible de los subespacios isotrópicos respecto a B_p. Además, sea $\mathrm{O}(p,\infty)$ el grupo de operadores lineales acotados e invertibles que preservan la forma B_p. Estos espacios (de dimensión infinita) junto con los operadores lineales que preservan estas formas han sido estudiados desde los años 40, primero por Pontryagin y después por Krein e Iokhvidov, como se refiere en [1] y [3], donde se presentan resultados de álgebra lineal similares a los que se tienen en espacios de Hilbert y se incluyen casos donde el índice no es necesariamente finito.

Al considerar las construcciones anteriores, en particular, es de interés el estudiar representaciones irreducibles de un grupo G en $\mathrm{O}(p,\infty)$, aunque para grupos en general no es fácil saber si éstas existen o no. Por los trabajos de Sally [36, 37] y Johnson y Wallach [25] se sabe que cuando $G = \mathrm{PO}(1,n)$, con $n \geq 2$, existen representaciones irreducibles para ciertos valores de p. Además, en [8] se estudian las representaciones irreducibles de ciertos subgrupos del grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(\mathscr{T})$ de un árbol $\mathscr{T}$ en $\mathrm{O}(1,\infty)$. También, N. Monod y P. Py [31] demostraron que las representaciones irreducibles de $\mathrm{PO}(1,n)$ en $\mathrm{O}(1,\infty)$ pueden ser clasificadas mediante de una familia de representaciones llamada *serie principal esférica* (ver [25] y [37] para un estudio de esta familia en el caso de grupos de Lie con algunas condiciones adicionales). Para obtener este resultado, estudiaron propiedades de las acciones de $\mathrm{PO}(1,n)$ en el espacio hiperbólico de dimensión infinita $\mathbb{H}^\infty$, el cual generaliza de manera natural a los espacios hiperbólicos $\mathbb{H}^n$, y notaron que las acciones inducidas por las representaciones irreducibles tienen propiedades similares a las dadas de manera natural por la geometría del espacio hiperbólico. Respecto al estudio cuando $p \geq 2$ se pueden revisar [14, 15, 17].

En esta tesis nos interesamos en las representaciones de $\mathrm{PO}(1,n)$ en $\mathrm{O}(p,\infty)$ cuando $p \geq 2$. En particular, si nos restringimos a la componente de la identidad $\mathrm{PO}(1,n)^\circ$, tenemos dos preguntas acerca de representaciones en $\mathrm{O}(p,\infty)$:

(A) ¿Es posible clasificar las representaciones irreducibles de $\mathrm{PO}(1,n)^\circ$ en $\mathrm{O}(p,\infty)$ para $p \geq 2$?

(B) ¿Para qué valores de n y p existen representaciones irreducibles de $\mathrm{PO}(1,n)^\circ$ en $\mathrm{O}(p,\infty)$?

Notemos que la pregunta (A) es más general que la pregunta (B). De hecho, el segundo cuestionamiento ayuda a resolver el primero, ya que permite identificar qué casos no hay que considerar.

Parte del trabajo presentado en este documento consiste en dar una respuesta parcial a la pregunta (B). Para ello, consideremos una generalización natural del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^\infty$ que se obtiene como sigue. Si $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert separable que está dotado con la forma bilineal B_p de índice p dada en (1), definimos X_p la *grassmanianna de tipo no compacto* como

$$X_p = \{E \subset \mathscr{H} \mid E \text{ subespacio de } \mathscr{H},\ \dim(E) = p,\ B_p|_{E\times E} \text{ definido positivo}\}.$$

B. Duchesne muestra en [14, Capítulo 3] que X_p admite una estructura de espacio simétrico, es decir, es una variedad riemanniana (de dimensión infinita) conexa que en cada punto $E \in X_p$ tiene una isometría que fija E y tal que su diferencial en E es $-\mathrm{Id}$. Además, ya que hay una acción por isometrías de $\mathrm{O}(p,\infty)$ en X_p, se obtiene una identificación

$$X_p \cong \frac{\mathrm{O}(p,\infty)}{\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(\infty)}.$$

En [22], Gromov invita al estudio de estos espacios simétricos porque se pueden considerar como una generalización del espacio simétrico de $\mathrm{O}(p,q)$ cuando p, q son ambos enteros no negativos. Observamos que además $X_1 = \mathbb{H}^\infty$.

Notemos que la pregunta (A) no es vacía, es decir, existen representaciones irreducibles como las que nos interesan. En la sección 2.3 se describe una familia continua de representaciones irreducibles de $\mathrm{PO}(1,n)^\circ$ en $\mathrm{O}(p,\infty)$, donde p es un número de la forma $\binom{n-1+j}{n-1}$ con $j \geq 0$. Por otro lado, respecto a la pregunta (B), en [31, Teorema 5.3] se muestra que si $n > 4$ y $2 < p < n$, entonces no existen representaciones irreducibles $\mathrm{PO}(1,n)^\circ \longrightarrow \mathrm{O}(p,\infty)$, por lo cual los únicos casos que faltan estudiar, cuando $p < n$, son $p = 2$ con $n \geq 3$ y $p = 3$ con $n = 4$.

En este trabajo, para estudiar el caso $p=2$ con $n \geq 3$ se utilizan complejificaciones de representaciones, por lo cual también aparecen los espacios complejos $X_p^{\mathbb{C}}$ definidos en términos de formas hermitianas fuertemente no degeneradas en $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$ que cumplen propiedades análogas a sus contrapartes reales. Además, ya que conocemos la clasificación de representaciones irreducibles en $\mathrm{O}(1,\infty)$, es útil considerar teoremas de descomposición de $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$ respecto a subgrupos de $\mathrm{U}(p,\infty)$ (el grupo de operadores unitarios respecto a B_p) como el Lema de Ismagilov (ver Lema 3.8). Usando la herramienta mencionada antes y algunos conceptos adicionales, en el Capítulo 4 se prueba el siguiente resultado.

Teorema A. Sea $n \geq 3$. Entonces no existe ninguna representación continua irreducible

$$\mathrm{PO}(1,n)^\circ \longrightarrow \mathrm{O}(2,\infty).$$

Este resultado fue obtenido en conjunto con P. Py y aparece publicado en [34]. Utilizando ideas similares a las empleadas en la prueba del resultado anterior, la propiedad (T) de Kazhdan y un poco de teoría espectral, en el Capítulo 5 se demuestra el siguiente resultado.

Teorema B. Sea (G,K) un par de Gelfand. Si G tiene la propiedad (T) de Kazhdan y cualquier homomorfismo continuo $K \longrightarrow \mathrm{O}(2)$ es trivial, entonces no existen representaciones continuas irreducibles $G \longrightarrow \mathrm{O}(2,\infty)$.

Ahora, dado $p \geq 2$ un número primo, si $\mathbb{Q}_p$ es el campo de números p-ádicos y $\mathbb{Z}_p$ el anillo de enteros p-ádicos, se tiene que el par de Gelfand $(\mathrm{SL}(n,\mathbb{Q}_p), \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}_p))$, con $n \geq 3$, satisface las hipótesis del Teorema B, a partir de lo cual se puede obtener el siguiente resultado

Teorema C. Sea $n \geq 3$ un entero. No existen representaciones continuas irreducibles $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{O}(2,q)$ con $1 \leq q \leq \infty$.

Finalmente, en el Capítulo 6 se dan algunos resultados parciales respecto a la existencia de representaciones irreducibles de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ en $\mathrm{O}(2,\infty)$ distintas a las obtenidas a partir de la serie principal esférica.

Estructura del texto

Este texto consta de 6 capítulos. Los capítulos 1, 2 y 3 son expositorios, mientras que los resultados originales se encuentran en los capítulos 4, 5 y 6.

En el Capítulo 1 se presentan los cuatro conceptos fundamentales en torno a los cuales gira el presente texto: formas fuertemente no degeneradas en espacios vectoriales, espacios hiperbólicos (reales y complejos), pares de Gelfand y propiedad (T) de Kazhdan. Se enuncian algunos resultados acerca de ellos, los cuales serán utilizados más adelante.

En el Capítulo 2 se define la serie principal esférica para $\mathrm{PO}(1,n)$ con $n \geq 2$. Además de presentar algunas propiedades elementales de dicha familia de representaciones, se enuncia el teorema de N. Monod y P. Py que clasifica las representaciones irreducibles de $\mathrm{PO}(1,n)$ en $\mathrm{O}(1,\infty)$.

El capítulo 3 se emplea para demostrar el Teorema 3.1 de Naĭmark, el cual permite asegurar la existencia de susbespacios invariantes bajo la acción de familias de operadores en espacios vectoriales dotados de una forma fuertemente no degenerada B. Se incluye además un lema de descomposición (respecto a B) debido a Ismagilov que será utilizado varias veces en los capítulos siguientes.

El Capítulo 4 se dedica a la prueba del Teorema A. Para ello, se introduce el concepto de argumento de Cartan, el cual permite identificar los subespacios totalmente reales de los espacios hiperbólicos complejos, y dichos subespacios serán usados para obtener representaciones irreducibles en $\mathrm{O}(1,\infty)$.

En el Capítulo 5 se utiliza el método de prueba del Teorema A para demostrar el Teorema B. Además, luego de introducir el campo de los números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$ y presentar algunas propiedades del grupo de matrices $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Q}_p)$, se prueba el Teorema C.

En el Capítulo 6 se estudia un mapeo $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-equivariante del plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ en la grassmanniana de planos definidos positivos X_2, el cual está asociado a una representación $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{O}(2,\infty)$. En particular, se presenta un modelo proyectivo de X_2 en el cual es más sencillo estudiar las propiedades del mencionado mapeo. Esta estrategia es una primera etapa para estudiar representaciones de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ en $\mathrm{O}(2,\infty)$.

A lo largo de este trabajo usaremos la siguiente convención. Decimos que una representación ϱ de un grupo topológico G en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ es (fuertemente) *continua* si los mapeos órbita $G \longrightarrow V$ dados por $g \mapsto \varrho(g)v$, para cualquier $v \in \mathscr{H}$, son continuos. En lo que sigue, todas las representaciones consideradas serán continuas, salvo que se indique lo contrario.

Índice

1 Preliminares

1.1. Formas fuertemente no degeneradas

Esta sección está dedicada a presentar algunos de los resultados dados en la sección 2 de [8]. Únicamente enunciaremos los resultados más importantes y remitimos al lector a la referencia original para más detalles. Este desarrollo está también realizado en la sección 9 de [14].

Sean $\mathscr{H}$ un espacio vectorial real y $Q : \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática en $\mathscr{H}$. Tenemos que la forma bilineal $B : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $B(x,y) = \frac{1}{4}\left(Q(x+y) - Q(x-y)\right)$ es la forma bilineal asociada a Q. Además, si $S \subset \mathscr{H}$, el *conjunto ortogonal* a S está dado por $S^{\perp} = \{x \in \mathscr{H} \,:\, B(x,y) = 0,\, \forall y \in S\}$, y decimos que Q (análogamente B) es *no degenerada* si $\mathscr{H}^{\perp} = \{0\}$. También, como es usual, Q es *definida positiva* si $Q(x) > 0$ para toda $x \in \mathscr{H} \setminus \{0\}$, y Q es *definida negativa* si $-Q$ es definida positiva. De manera similar, si B es una forma bilineal en $\mathscr{H}$ y W es un subespacio de $\mathscr{H}$, diremos que W es *positivo* (respecto a B), o que B es positiva en W, si $B(x,x) \geq 0$ para toda $x \in W$, y diremos que W es *definido positivo* si $B(x,x) > 0$ para toda $x \in W \setminus \{0\}$; análogamente se define que W es *negativo* o *definido negativo*, respectivamente. Cuando Q es definida positiva lo denotamos por $Q > 0$, de manera similar, si Q es definida negativa entonces escribimos $Q < 0$. Por otro lado, si $Q|_W = 0$, respectivamente $B|_{W\times W} = 0$, decimos que W es un subespacio totalmente *isotrópico*.

A continuación definiremos algunos conceptos adicionales acerca de una forma cuadrática Q, los cuales utilizaremos indistintamente también para una forma bilineal B ya que basta considerar la forma cuadrática asociada $Q_B(x) = B(x,x)$. El *índice* de Q está dado por

$$i(Q) = \sup\left\{\dim(W) \,:\, W \text{ subespacio de } \mathscr{H},\, Q|_W = 0\right\}, \tag{1.1}$$

además se definen

$$i_+(Q) = \sup\left\{\dim(W) \,:\, W \text{ subespacio de } \mathscr{H},\, Q|_W > 0\right\}, \tag{1.2}$$

y

$$i_-(Q) = \sup\{\dim(W) \,:\, W \text{ subespacio de } \mathscr{H},\, Q|_W < 0\}\,. \tag{1.3}$$

Proposición 1.1 (Prop. 2.1 de [8])**.** *Sea Q una forma cuadrática en $\mathscr{H}$ de índice finito. Entonces*

(1) $i(Q) = \min\{i_+(Q),\, i_-(Q)\}$.

Si suponemos que $i(Q) = i_+(Q)$, entonces

(2) Si W es subespacio de $\mathscr{H}$ tal que $\dim(W) = i(Q)$ y $Q|_W > 0$, entonces $\mathscr{H} = W \oplus W^{\perp}$ y $Q|_{W^{\perp}} < 0$.

(3) Si $\mathscr{H} = W_+ \oplus W_-$ es una suma directa ortogonal tal que $Q|_{W_+} > 0$ y $Q|_{W_-} < 0$, entonces $\dim(W_+) = i(Q)$.

En virtud de la Proposición 1.1, denominamos a cualquier descomposición en suma directa ortogonal $\mathscr{H} = W_+ \oplus W_-$ tal que $Q|_{W_+} > 0$ y $Q|_{W_-} < 0$ una *descomposición* $(\pm)$. Dada una descomposición $(\pm)$ de $\mathscr{H}$ consideramos el producto interior

$$\langle x, y\rangle_Q = B(x_+, y_+) - B(x_-, y_-) \tag{1.4}$$

donde $x = x_+ + x_-$, $y = y_+ + y_-$ con $x_+, y_+ \in W_+$ y $x_-, y_- \in W_-$.

Definición 1.2. Sea Q forma cuadrática en $\mathscr{H}$. Decimos que Q es una *forma fuertemente no degenerada* de índice finito si es no degenerada y $(\mathscr{H}, \langle\ ,\ \rangle_Q)$ es un espacio de Hilbert.

Por el Lema 2.4 de [8] la definición anterior no depende de la elección de la descomposición $(\pm)$ de $\mathscr{H}$. Dados $\mathscr{H}$ y $\mathscr{H}'$ espacios vectoriales dotados con las formas cuadráticas Q y Q', respectivamente, dichas formas cuadráticas son equivalentes si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $f : \mathscr{H}' \longrightarrow \mathscr{H}$ tal que $Q' = Q \circ f$. En particular, si $\mathscr{H}' = \mathscr{H}$, a los isomorfismos $f : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ tales que $Q = Q \circ f$ se les llama transformaciones *ortogonales*. Denotaremos por $\mathrm{O}(Q)$, o bien por $\mathrm{O}(B)$, al grupo de transformaciones ortogonales respecto a Q (o B, respectivamente).

Ya que en el caso de dimensión finita la signatura de una forma cuadrática caracteriza completamente su clase de equivalencia (respecto a los mapeos ortogonales), nos interesa saber si ello ocurre en el caso de dimensión infinita. Si Q es una forma cuadrática fuertemente no degenerada de índice finito en $\mathscr{H}$ y tomamos una descomposición $(\pm)$ dada por $\mathscr{H} = W_+ \oplus W_-$ con $Q|_{W_+} > 0$ y $Q|_{W_-} < 0$, por la hipótesis se verifica que $\big(W_+, Q|_{W_+}\big)$ y $\big(W_-, -Q|_{W_-}\big)$ son espacios de Hilbert, luego, dados p el cardinal de una base hilbertiana de W_+ y q el cardinal de una base hilbertiana de W_-, el par (p, q) es la *signatura* o tipo de Q. De manera análoga se usará el concepto en el caso de la forma bilineal B asociada a Q.

Proposición 1.3 (Prop. 2.7 de [8])**.** *La signatura es un invariante completo de equivalencia entre las formas cuadráticas fuertemente no degeneradas de índice finito.*

Proposición 1.4 (Prop. 2.8 de [8]). *Si Q es una forma cuadrática fuertemente no degenerada de índice finito en $\mathscr{H}$ y W es un subespacio cerrado de $\mathscr{H}$ tal que $Q|_W$ es no degenerada, entonces $Q|_W$ es fuertemente no degenerada y $\mathscr{H} = W \oplus W^{\perp}$.*

En virtud de la Proposición 1.3 escribiremos

$$\mathrm{O}(p,q) = \mathrm{O}(Q) = \mathrm{O}(B)$$

donde (p,q) es la signatura de Q.

Es importante notar que todos los resultados establecidos aquí se verifican, con las modificaciones adecuadas, en el caso de espacios vectoriales complejos y formas hermitianas. En tal caso, para evitar confusiones, usaremos

$$\mathrm{U}(p,q) = \mathrm{U}(Q) = \mathrm{U}(B)$$

para denotar al grupo de transformaciones invertibles de $\mathscr{H}$ que preservan la forma cuadrática de signatura (p,q).

Finalmente, para un estudio profundo de espacios dotados con formas bilineales con signatura, referimos al lector a [3], donde también se consideran formas bilineales de índice no necesariamente finito.

1.2. Espacios hiperbólicos

En esta sección se construyen los espacios hiperbólicos reales y complejos. Únicamente se presentan los modelos que usaramos en el presente trabajo. En primer lugar se define el modelo del hiperboloide de los espacios hiperbólicos reales y posteriormente se hace la construcción del modelo proyectivo, el cual, con las modificaciones adecuadas, permite obtener los espacios hiperbólicos complejos. Para el modelo definido más adelante en (1.6) tomamos el desarrollo presentado en la sección 2 de [32], mientras que pueden consultarse [4] y también [30, 7] para la construcción del modelo proyectivo.

Sea κ un cardinal. Para construir el primer modelo consideremos $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert real de dimensión κ. Definimos el *espacio de Minkowski* como $\mathbb{R}\oplus H$ y lo dotamos con la forma bilineal B dada por

$$B\left(s \oplus h, s' \oplus h'\right) = ss' - \langle h, h'\rangle. \tag{1.5}$$

Por construcción, B es una forma bilineal fuertemente no degenerada de índice 1. Además, dotamos a $\mathbb{R} \oplus H$ con la topología inducida por las normas en cada uno de los factores. Con base en lo anterior, definimos el *modelo del hiperboloide* del espacio hiperbólico real $\mathbb{H}^{\kappa}$ por

$$\mathbb{H}^{\kappa} = \{x = s \oplus h \in \mathbb{R} \oplus H \,:\, B(x,x) = 1,\, s > 0\}. \tag{1.6}$$

Es la hoja superior de un hiperboloide, donde H es un espacio de Hilbert de dimensión κ. Además de los casos de dimensión finita, nos interesa cuando $\kappa = \aleph_0$, que por simplicidad denotamos por $\mathbb{H}^\infty = \mathbb{H}^{\aleph_0}$. La distancia asociada a la métrica hiperbólica está caracterizada por la relación

$$\cosh\left(d(x,y)\right) = B(x,y),$$

además, d es compatible con la topología ambiente de $\mathbb{H}^\kappa$ y es una métrica completa. También notemos que $\mathrm{O}(B)$ actúa proyectivamente en $\mathbb{H}^\kappa$ e induce un isomorfismo $\mathrm{PO}(B) \cong \mathrm{Isom}\left(\mathbb{H}^\kappa\right)$; de hecho, como se muestra en la Proposición 3.4 de [8], también se satisface que $\mathrm{Isom}\left(\mathbb{H}^\kappa\right)$ es isomorfo al subgrupo de índice dos $\mathrm{O}_+(B) < \mathrm{O}(B)$ de elementos que preservan a $\mathbb{H}^\kappa$.

A continuación, para construir el segundo modelo del espacio hiperbólico consideramos la proyección natural $\mathbb{P} : \mathbb{R} \oplus H \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R} \oplus H)$, donde $\mathbb{P}(\mathbb{R} \oplus H)$ denota el espacio proyectivo de $\mathbb{R} \oplus H$. Definimos el *modelo proyectivo* del espacio hiperbólico como

$$\mathbb{H}^\kappa = \{[x] \in \mathbb{P}(\mathbb{R} \oplus H) \mid B(x,x) > 0\}. \tag{1.7}$$

Decimos que la frontera $\partial\mathbb{H}^\kappa$ de $\mathbb{H}^\kappa$ es el conjunto de las líneas B-isotrópicas. Ya que ambos modelos del espacio hiperbólico son equivalentes, usaremos este hecho indistintamente del modelo que estemos considerando.

Observamos que (1.7) se generaliza al caso complejo de manera inmediata. Para ello, sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert complejo de dimensión κ, y consideremos el respectivo espacio de Minkowski $\mathbb{C} \oplus H$ dotado con la forma hermitiana $B_{\mathbb{C}}$ definida por

$$B_{\mathbb{C}}\left(z \oplus h, z' \oplus h'\right) = z\overline{z'} - \langle h, h' \rangle. \tag{1.8}$$

A continuación, sea $\mathbb{P} : \mathbb{C} \oplus H \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}\left(\mathbb{C} \oplus H\right)$ la proyección natural, donde $\mathbb{P}\left(\mathbb{C} \oplus H\right)$ denota el espacio proyectivo (complejo) de $\mathbb{C} \oplus H$. Luego, definimos el *modelo proyectivo* del espacio hiperbólico (complejo) como

$$\mathbb{H}^k = \{[z] \in \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus H) \mid B_{\mathbb{C}}(z,z) > 0\} \tag{1.9}$$

Finalmente, cuando sea necesario, denotaremos por $\mathbb{H}^\kappa_{\mathbb{R}}$ al espacio hiperbólico real de dimensión κ y por $\mathbb{H}^\kappa_{\mathbb{C}}$ a su análogo complejo.

1.3. Pares de Gelfand

Consideremos un grupo localmente compacto G y H un subgrupo compacto de G. El estudio de los pares de Gelfand está motivado, en cierto sentido, en el interés por conocer cuál es la dimensión de los subespacios que son fijados por H bajo las representaciones irreducibles de G. Para los fines de este documento, en esta sección se presentan la definición de par de Gelfand, una condición suficiente para identificar un par de Gelfand, así como algunos ejemplos que serán útiles en capítulos posteriores. Aquí se sigue el desarrollo realizado por J. Faraut en [18, Cap. 1] y, en una versión más reciente, por G. van Dijk en [12, Cap. 6]. Otra referencia usual para este tema es la sección 24 de [41].

Consideremos G un grupo localmente compacto dotado con una medida de Haar dx invariante a la izquierda, y sea $C_c(G)$ el álgebra de convolución de funciones continuas con soporte compacto $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, donde dadas dos funciones $f, g \in C_c(G)$, el producto de convolución está definido por

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy,$$

para toda $x \in G$. Además, sea K un subgrupo compacto de G y consideremos su medida de Haar normalizada dk, es decir, la medida de Haar tal que

$$\int_K dk = 1.$$

Sea $C_c^{\#}(G)$ la subálgebra de $C_c(G)$ formada por funciones biinvariantes respecto a K, esto es,

$$C_c^{\#}(G) = \{f \in C_c(G) \, : \, f(kxk') = f(x) \text{ para cualesquiera } k, k' \in K\}.$$

Definimos la proyección ${}^{\#} : C_c(G) \longrightarrow C_c^{\#}(G)$ como sigue: si $f \in C_c(G)$, entonces para cada $x \in G$ sea

$$f^{\#}(x) = \int_K \int_K f(kxk')dkdk'.$$

Se verifica que $f^{\#} \in C_c^{\#}(G)$ y $f^{\#} = f$ si $f \in C_c^{\#}(G)$. Además, $*$ deja estable a $C_c^{\#}(G)$.

Definición 1.5. El par (G, K) es *de Gelfand* si el álgebra de convolución $\left(C_c^{\#}(G), *\right)$ es conmutativa.

Ejemplo 1.6. Si G es un grupo abeliano localmente compacto, entonces $(G, \{e_G\})$ es par de Gelfand.

A continuación presentamos dos resultados útiles que permiten obtener ejemplos no triviales de pares de Gelfand.

Proposición 1.7 (C. Berg)**.** *Si (G, K) es un par de Gelfand, entonces G es unimodular*[1].

[1] Recordemos que si dx es una medida de Haar sobre G que es invariante izquierda, entonces, para $g \in G$ fijo, se tiene que la forma lineal $f \mapsto \int_G f(gxg^{-1})\,dx$ define una medida invariante izquierda (sobre $C_c(G)$), por lo cual existe un número positivo $\Delta(g)$ tal que

$$\int_G f\left(gxg^{-1}\right) dx = \Delta(g) \int_G f(x)dx.$$

Esto define un mapeo $\Delta : G \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ llamada *módulo de Haar*, el cual resulta ser un homomorfismo de grupos. Si $\Delta \equiv 1$, decimos que G es *unimodular*. Para más detalles, se puede consultar [19, Sección 5.1].

Demostración. Sea Δ el módulo de Haar de G. Entonces

$$\int_G f(x)dx = \int_G f\left(x^{-1}\right)\Delta\left(x^{-1}\right)dx \tag{1.10}$$

para cualquier $f \in C_c(G)$. La igualdad (1.10) es una propiedad clásica de Δ que se puede consultar, por ejemplo, en [19, Prop. 5.1.4]. Se demostrará que para cualquier $f \in C_c(G)$ se verifica que

$$\int_G f\left(x^{-1}\right)dx = \int_G f(x)dx, \tag{1.11}$$

que a partir de (1.10) implica que $\Delta = 1$.

Observamos que si $f \in C_c(G)$ entonces

$$\int_G f^{\#}(x)dx = \int_{G\times K^2} f\left(kxk'\right)dxdkdk' = \int_G f(x)dx,$$

donde la última igualdad se obtiene porque

$$\int_G f(kxk')dx = \Delta(k')^{-1}\int_G f(x)dx = \int_G f(x)dx,$$

ya que $k' \in K$, esto es, $\Delta(k') = 1$. Así, se ha demostrado que para cualquier $f \in C_c(G)$ se tiene que

$$\int_G f(x)dx = \int_G f^{\#}(x)dx. \tag{1.12}$$

En virtud de (1.12), es suficiente demostrar la igualdad (1.11) para $f \in C_c^{\#}(G)$. Por ello, si $f \in C_c^{\#}(G)$, al considerar una función $g \in C_c^{\#}(G)$ tal que $g(x) = 1$ si $x \in \operatorname{supp}(f) \cup (\operatorname{supp}(f))^{-1}$, obtenemos que

$$f * g(e) = \int_G f(x)g\left(x^{-1}\right)dx = \int_{\operatorname{supp}(f)} f(x)dx = \int_G f(x)dx,$$

y también,

$$g * f(e) = \int_G g(x)f\left(x^{-1}\right)dx = \int_{(\operatorname{supp}(f))^{-1}} f\left(x^{-1}\right)dx = \int_G f\left(x^{-1}\right)dx,$$

y como (G, K) es par de Gelfand, se satisface que $f * g = g * f$, por lo cual se cumple (1.11) cuando $f \in C_c^{\#}(G)$. Esto prueba lo deseado. □

Proposición 1.8. *Sean G un grupo localmente compacto y K un subgrupo compacto de G. Supongamos que existe un automorfismo $\theta : G \longrightarrow G$ tal que $\theta^2 = \mathrm{Id}$. Si para toda $x \in G$ se tiene que*

$$\theta(x) \in Kx^{-1}K, \tag{1.13}$$

entonces (G, K) es un par de Gelfand.

Demostración. Sean $f \in C_c(G)$ y $f^\theta(x) = f(\theta(x))$ para toda $x \in G$. Tenemos que el mapeo

$$f \mapsto \int_G f^\theta(x)dx \tag{1.14}$$

define una medida invariante izquierda sobre G, por lo cual existe una constante $c > 0$ tal que

$$\int_G f^\theta(x)dx = c\int_G f(x)dx \tag{1.15}$$

para cualquier función $f \in C_c(G)$. Ahora, ya que $\theta^2 = \mathrm{Id}$, se cumple lo siguiente

$$\int_G f(x)dx = \int_G f^{\theta^2}(x)dx = \int_G (f^\theta)^\theta(x)dx = c\int_G f(\theta x)dx = c^2\int_G f(x)dx,$$

por lo cual $c = 1$. Sean $f, g \in C_c(G)$, por un lado tenemos que

$$(f * g)^\theta(x) = \int_G f(y)g\left(y^{-1}\theta(x)\right)dy,$$

y por otro,

$$\left(f^\theta * g^\theta\right)(x) = \int_G f^\theta(y)g^\theta\left(y^{-1}x\right)dy = \int_G f(z)g\left(z^{-1}\theta(x)\right)dz,$$

lo cual implica que $(f * g)^\theta = f^\theta * g^\theta$ para cualesquiera $f, g \in C_c(G)$. Dada una función $f \in C_c(G)$, definimos $f^\vee(x) = f\left(x^{-1}\right)$. Notamos que

$$\begin{aligned}(f * g)^\vee(x) &= \int_G f(y)g\left(y^{-1}x^{-1}\right)dy = \int_G f\left(x^{-1}y\right)g\left(y^{-1}\right)dy\\ &= \int_G g^\vee(y)f^\vee\left(y^{-1}x\right)dy = g^\vee * f^\vee(x),\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se satisface porque dy es invariante a la izquierda. Lo anterior implica que para cualesquiera $f, g \in C_c(G)$ se tiene que

$$(f * g)^\vee = g^\vee * f^\vee. \tag{1.16}$$

También, si f es K-biinvariante, entonces, por (1.13), obtenemos que para toda x existen k, $k' \in K$ tales que

$$f^\theta(x) = f\left(k'x^{-1}k\right) = f\left(x^{-1}\right) = f^\vee(x). \tag{1.17}$$

Así, si $f \in C_c^\#(G)$, por (1.17) se obtiene que $f^\theta = f^\vee$. Luego, dadas $f, g \in C_c^\#(G)$ se tiene que

$$(f * g)^\theta = (f * g)^\vee = g^\vee * f^\vee = g^\theta * f^\theta = (g * f)^\theta,$$

y por lo tanto, $f * g = g * f$. Esto prueba que $C_c^\#(G)$ es un álgebra conmutativa. $\square$

Corolario 1.9. *Sean G un grupo localmente compacto y K un subgrupo compacto de G. Si para toda $x \in G$ se satisface que*

$$x \in Kx^{-1}K, \tag{1.18}$$

entonces (G, K) es un par de Gelfand.

Demostración. Basta aplicar la Proposición 1.8 considerando $\theta = \mathrm{Id}_G$. □

Para concluir esta sección se presentan tres ejemplos no triviales de pares de Gelfand.

Ejemplo 1.10. Sea $n \geq 2$ un entero y denotemos por S_n el grupo simétrico del conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Observamos que el estabilizador de un punto en S_n es isomorfo a S_{n-1}, en particular, denotemos K al estabilizador de 1. Tenemos que S_n actúa en $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ por la acción diagonal, y notemos que para cualesquiera $x, y \in \{1, \ldots, n\}$ existe $h \in S_n$ tal que

$$h \cdot (x, y) = (h \cdot x, h \cdot y) = (y, x),$$

pues basta tomar h de manera que $h(x) = y$, $h(y) = x$ y la identidad en los demás puntos.

Consideremos $g \in S_n$ y veamos que $g \in S_{n-1}g^{-1}S_{n-1}$. Observamos que $\left(1, g^{-1}(1)\right) = g^{-1} \cdot (g(1), 1)$. Por lo dicho en el párrafo anterior, existe $h \in S_n$ tal que $h \cdot (1, g(1)) = (g(1), 1)$, luego,

$$\left(1, g^{-1}(1)\right) = g^{-1} \cdot (g(1), 1) = g^{-1} \cdot (h \cdot (1, g(1))) = \left(g^{-1} \circ h\right) \cdot (1, g(1))$$

de donde $\left(g^{-1} \circ h\right)(1) = 1$ y $\left(g^{-1} \circ h\right)(g(1)) = \left(\left(g^{-1} \circ h\right) \circ g\right)(1) = g^{-1}(1)$. En particular, la primera igualdad implica que $g^{-1} \circ h \in K$, mientras que a partir de la segunda igualdad se obtiene que

$$g \circ \left(g^{-1} \circ h\right) \circ g(1) = 1,$$

es decir, $g \circ \left(g^{-1} \circ h\right) \circ g \in K$. Por lo tanto,

$$g = \left(g \circ \left(g^{-1} \circ h\right) \circ g\right) \circ g^{-1} \circ \left(g^{-1} \circ h\right)^{-1} \in Kg^{-1}K$$

Finalmente, a partir del Corolario 1.9 obtenemos que (S_n, S_{n-1}) es un par de Gelfand.

Ejemplo 1.11. Consideremos $G = K \ltimes \mathbb{R}^n$ donde $K = \mathrm{O}(n)$. Si denotamos $g = (k, a) \in G$, con $k \in K$ y $a \in \mathbb{R}^n$, el producto en G está dado por

$$(k, a)\left(k', a'\right) = \left(kk', a + k \cdot a'\right),$$

y también $(k, a)^{-1} = \left(k^{-1}, -k^{-1} \cdot a\right)$. Notamos que G es el grupo de isometrías del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ dotado con el producto escalar usual. Definimos $\theta : G \longrightarrow G$ por $\theta(k, a) = (k, -a)$. Entonces θ es un automorfismo continuo de G, $\theta^2 = \mathrm{Id}_G$ y

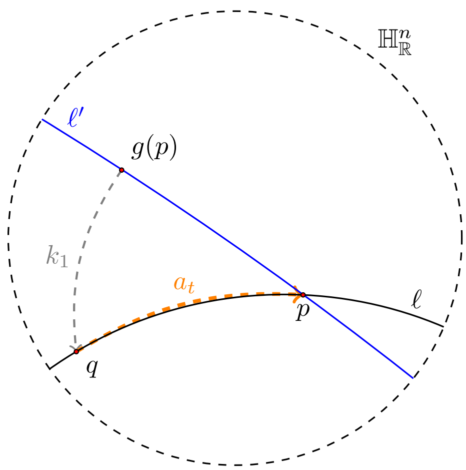
$$\theta(k, a) = \theta((\mathrm{Id}, a)(k, 0)) = (\mathrm{Id}, -a)(k, 0) = (k, 0)\,(k, a)^{-1}\,(k, 0),$$

esto es, $\theta(g) \in Kg^{-1}K$ para toda $g \in G$. Por la Proposición 1.8 se sigue que (G, K) es un par de Gelfand.

Ejemplo 1.12. Consideremos $G = \mathrm{PO}(1,n)^{\circ}$ la componente conexa de la identidad del grupo de isometrías del espacio hiperbólico real $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$. Fijemos $p \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ y tomemos K el estabilizador de p, el cual resulta ser un subgrupo compacto maximal de G que es isomorfo a $\mathrm{SO}(n)$. Sea ℓ una geodésica que pasa por p. Entonces existe $A = (a_t)_{t\in\mathbb{R}} \leq G$ subgrupo uniparamétrico que actúa por traslaciones en ℓ, lo cual implica que A actúa transitivamente en ℓ. Ahora, dado $g \in G$, sucede alguno de los siguientes casos:

(1) Si $g(p) = p$, entonces $g \in K$.

(2) Si $g \notin K$, entonces existe $k_1 \in K$ tal que $k_1 g(p) = q \in \ell$. Luego existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $a_t k_1 g(p) = p$, y por lo tanto $k_2 := a_t k_1 g \in K$, en particular, $g = k_1^{-1} a_t^{-1} k_2 \in KAK$.



Por lo anterior, $G = KAK$. Observamos que si para toda $a \in A$ se cumple (1.18), entonces se satisface para toda $g \in G$, ya que si $g = k_1 a_t k_2$, entonces $a_t^{-1} \in K a_t K$ y luego

$$g^{-1} = k_2^{-1} a_t^{-1} k_1^{-1} \in k_1^{-1} K a_t K k_2^{-1} = K k_1 a_t k_2 K = KgK.$$

Así, sea $a_t \in A$. Entonces $a_t^{-1} = a_{-t}$. Sean $q_1 = a_t(p)$ y $q_2 = a_{-t}(p)$. Notemos que existe $k \in K$ tal que $k(q_1) = q_2$, y esto implica que k deja invariante a ℓ porque además fija a p. Entonces $a_t k(p) = q_1$ y $a_t k(q_1) = p$, por lo cual $a_t k$ deja invariante a ℓ. Vemos que de hecho, $a_t k a_t \in K$ porque

$$a_t k a_t(p) = a_t k(q_1) = a_t(q_2) = a_t\left(a_{-t}(p)\right) = p.$$

A partir de lo anterior es inmediato que $k a_t \in a_t^{-1} K$, y luego $a_t \in K a_t^{-1} K$. Esto muestra lo deseado. Finalmente, por el Corolario 1.9, se concluye que $(\mathrm{PO}(1,n)^{o}, K)$ es un par de Gelfand.

1.4. Propiedad (T) de Kazhdan

Sea $(\mathscr{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert complejo con producto hermitiano $\langle\ ,\ \rangle$ y $\mathrm{U}(\mathscr{H})$ su grupo unitario, esto es, el grupo de operadores lineales invertibles $f : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ tales que

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

para cualesquiera $u, v \in \mathscr{H}$. Sea G un grupo topológico. Una *representación unitaria*[2] de G en $\mathscr{H}$, es decir, un morfismo $\pi : G \longrightarrow \mathrm{U}(\mathscr{H})$, es (fuertemente) *continua* si para cualquier $v \in \mathscr{H}$ el mapeo $G \longrightarrow \mathscr{H}$ dado por $g \mapsto \pi(g)v$ es continuo.

Ejemplo 1.13. Sea G un grupo localmente compacto dotado de una medida de Haar invariante izquierda dx. Consideremos $L^2(G) = L^2(G, dx)$ el espacio de Hilbert de clases de equivalencia de funciones $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ de cuadrado integrable respecto a dx. Si $g \in G$, definimos el operador $\lambda_G(g) : L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$ mediante

$$\lambda_G(g)\xi(x) = \xi\left(g^{-1}x\right),$$

para cualesquiera $\xi \in L^2(G)$ y $x \in G$. Notamos que $\lambda_G(g)$ es un operador unitario por la invariancia izquierda de la medida de Haar. Además, dados $g, h \in G$ se satisface que $\lambda_G(gh) = \lambda_G(g)\lambda_G(h)$. Finalmente, el mapeo $G \longrightarrow L^2(G)$ definido por $g \mapsto \lambda_G(g)\xi$ es continuo para cada $\xi \in L^2(G)$. Así, $\lambda_G : G \longrightarrow \mathrm{U}\left(L^2(G)\right)$ es una representación unitaria que se llama *representación regular izquierda*.

Como se señala en [2], la propiedad (T) fue introducida por Kazhdan en 1967 para estudiar grupos localmente compactos al considerar sus representaciones unitarias.

Definición 1.14. Sea $\pi : G \longrightarrow \mathrm{U}(\mathscr{H})$ una representación unitaria de G.

(1) Decimos que π tiene *vectores invariantes no nulos* si existe $v \in \mathscr{H}$ con $v \neq 0$ tal que $\pi(g)v = v$ para toda $g \in G$.

(2) La representación π tiene *vectores cuasiinvariantes* si para cualesquiera $Q \subset G$ subconjunto compacto y $\varepsilon > 0$, existe $v \in \mathscr{H}$ tal que

$$\sup_{g \in Q} \|\pi(g)v - v\| < \varepsilon\|v\|.$$

(3) Decimos que G tiene la *propiedad (T) de Kazhdan* si toda representación unitaria que tiene vectores cuasiinvarientes, tiene vectores invariantes no nulos.

[2] De manera análoga, si $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert real, una *representación ortogonal* de G en $\mathscr{H}$ es un homomorfismo $G \longrightarrow \mathrm{O}(\mathscr{H})$, donde $\mathrm{O}(\mathscr{H})$ es el grupo de operadores lineales invertibles de $\mathscr{H}$ que preservan el producto interior de $\mathscr{H}$.

A partir de la desigualdad indicada en el inciso (2) de la definición anterior se sigue que si $v \in \mathscr{H}$ es un vector cuasiinvariante para π, entonces $v \neq 0$. También, es importante notar que resulta muy complicado dar ejemplos no triviales de grupos que tienen la propiedad (T).

Ejemplo 1.15. Si G es un grupo compacto, por ejemplo cuando G es un grupo finito, entonces G tiene la propiedad (T). Para una prueba de este hecho se puede consultar la Proposición 1.1.5 de [2].

Proposición 1.16. *Supongamos que G tiene la propiedad (T).*

(1) Si $N \leq G$ es un subgrupo normal cerrado, entonces G/N tiene la propiedad (T).

(2) Si G es localmente compacto, entonces G es compactamente generado. En particular, si Γ es un grupo discreto con la propiedad (T), entonces Γ es finitamente generado.

Para una demostración del resultado anterior se pueden consultar, por ejemplo, los Teoremas 1.3.1 y 1.3.4 de [2].

Ejemplo 1.17. Veamos que $\mathbb{Z}$ no tiene la propiedad (T). Consideremos la representación regular izquierda $\lambda_{\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Z}$ en $L^2(\mathbb{Z})$. En primer lugar, notemos que $\lambda_{\mathbb{Z}}$ no tiene vectores invariantes no nulos. Para ello, supongamos que para $\xi \in L^2(\mathbb{Z})$ se tiene que $\lambda_{\mathbb{Z}}(n)\xi = \xi$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. A partir de lo anterior se sigue que $\xi(-n+x) = \xi(x)$ para toda $x \in \mathbb{Z}$ y para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. En particular, si $x = 0$, obtenemos que $\xi(n) = \xi(0)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, lo que implica que ξ es una función constante. Luego, como $\xi \in L^2(\mathbb{Z})$, se sigue que $\xi \equiv 0$.

Sin embargo, $\lambda_{\mathbb{Z}}$ si tiene vectores cuasiinvariantes. Para mostrar esto, sean Q un compacto de $\mathbb{Z}$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos $A = \{a, a+1, \cdots, b\}$, con $a < b$ enteros y χ la función característica de A. Definimos $\xi = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\chi \in L^2(\mathbb{Z})$ y observamos que $||\xi|| = 1$ y también

$$||\lambda_{\mathbb{Z}}(m)\xi - \xi||^2 = \frac{2|m|}{b-a} < \varepsilon^2$$

para cualquier $m \in Q$ cuando consideramos $b - a > 0$ suficientemente grande. Esto prueba lo deseado.

Ejemplo 1.18. Para $n \geq 3$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ tiene la propiedad (T). También, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ tiene la propiedad (T). La prueba de estos hechos se puede consultar, por ejemplo, en la Sección 1.4 de [2].

Ejemplo 1.19. Si $n \geq 2$, el grupo libre en n generadores F_n no tiene la propiedad (T). Esto se obtiene porque $\mathbb{Z}$ es un cociente de F_n y, como $\mathbb{Z}$ no tiene la propiedad (T), la Proposición 1.16 implica que F_n tampoco tiene dicha propiedad.

Finalmente, enunciamos un resultado que relaciona la propiedad (T) con acciones en espacios hiperbólicos.

Proposición 1.20. *Sea G un grupo con la propiedad (T). Si G actúa continuamente por isometrías en un espacio hiperbólico (real o complejo), entonces dicha acción tiene un punto fijo.*

Una prueba de este hecho se puede encontrar en [2, Cor. 2.7.3]. En particular, la Proposición 1.20 implica que $\mathrm{PO}(1, n)$ no tiene la propiedad (T).

2 Serie principal esférica

La serie principal esférica es una familia de representaciones en espacios de Hilbert de dimensión infinita muy útil para entender algunas propiedades de representaciones de grupos de Lie conexos, semisimples y con centro finito. En [45], N. R. Wallach expone a detalle la construcción mediante el uso de la descomposición de Iwasawa y acciones de los subgrupos que aparecen en dicha descomposición. Un análisis similar al anterior se hace en [25] para estudiar elementos de la serie principal esférica que no son unitarios. En particular, esta familia de representaciones ha sido estudiada ampliamente en el caso de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, por ejemplo, en [26], [28], [36] y [37].

En nuestro caso, nos interesa construir la serie principal esférica $\{\pi_s\}_{s\in\mathbb{C}}$ para $\mathrm{PO}(1,n)$ el grupo de isometrías del espacio hiperbólico real $\mathbb{H}^n$ de dimensión $n \geq 2$. Para nuestros fines seguiremos principalmente el desarrollo hecho en [31, Sección 3.A]; es importante mencionar, que esta es una construcción muy clásica, se puede consultar por ejemplo en [11], [25], [26], [45] y [46].

Dividimos este capítulo en tres partes. Por un lado, en la Sección 2.1 se define la mencionada familia de representaciones para $\mathrm{PO}(1,n)$, se presenta un modelo isomorfo de dicha familia y se presentan algunos resultados elementales acerca de ella, mientras que en la Sección 2.2 se construyen formas bilineales invariantes y se da una interpretación geométrica de π_s para algunos valores de s. Finalmente, en la Sección 2.3 se plantean algunas preguntas que motivan el contenido de este documento.

2.1. Dos modelos de la serie principal

Sea $n \geq 2$. Tomamos el espacio hiperbólico real $\mathbb{H}^n$ construido al considerar $H = \mathbb{R}^n$ con el producto interior usual (ver Sección 1.2). Recordamos que $\mathrm{PO}(1,n)$ es el grupo de isometrías de $\mathbb{H}^n$.

Sean $e_0 = (1,0,\ldots,0) \in \mathbb{H}^n$ y $K = \mathrm{Stab}(e_0)$ el estabilizador de e_0 en $\mathrm{PO}(1,n)$; de hecho, K es isomorfo a $\mathrm{O}(n)$ (ver [4, Teorema 2.24]) y por lo tanto es compacto. Recordamos que la frontera de $\mathbb{H}^n$, denotada por $\partial\mathbb{H}^n$, es la grassmanniana de líneas B-isotrópicas en $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \oplus H$ (ver Sección 1.2). Consideremos Vol la única forma de volumen normalizada en $\partial\mathbb{H}^n$ que es K°-invariante. Ahora, sea $\mathrm{Jac}(g)(\cdot)$ el jacobiano de g para la forma de volumen Vol, es decir, la función tal que $(g^*\mathrm{Vol})_b = \mathrm{Jac}(g)(b)\mathrm{Vol}_b$ para $b \in \partial\mathbb{H}^n$. Otra manera de obtener el jacobiano es considerar que Vol es una medida y tomar la derivada de Radon-Nikodym respecto a la medida trasladada por g, esto es, $\mathrm{Jac}(g) = \mathrm{d}g_*^{-1}\mathrm{Vol}/\mathrm{dVol}$. De manera explícita (ver [25]), dados $g \in G$ y $b \in \partial\mathbb{B}$ se tiene que

$$\left|\mathrm{Jac}\left(g^{-1}\right)(b)\right| = \left(\frac{B(e_0, b)}{B(g(e_0), b)}\right)^{n-1}. \tag{2.1}$$

Notemos que en la fórmula anterior hay un abuso de notación, pues del lado izquierdo b denota una línea B-isotrópica, mientras que del lado derecho, b denota un representante de dicha línea, pero esto no causa problema ya que el cálculo es independiente del representante elegido.

Antes de dar la definición que nos interesa, denotemos por $L^2(\partial\mathbb{H}^n)$ al espacio de clases de equivalencia de funciones con valores complejos en $\partial\mathbb{H}^n$ de cuadrado integrable respecto a Vol. También, sea $L^2_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{H}^n) \subset L^2(\partial\mathbb{H}^n)$ el subespacio de clases de funciones con valores reales.

Definición 2.1. La *serie principal esférica* de $\mathrm{PO}(1,n)$ es la familia de representaciones $\{\pi_s\}_{s\in\mathbb{C}}$ parametrizada por los números complejos, cuyo espacio de representación es $L^2(\partial\mathbb{H}^n)$ y está definida por

$$\pi_s(g)(f) = \left|\mathrm{Jac}\left(g^{-1}\right)\right|^{\frac{1}{2}+s} f \circ g^{-1}. \tag{2.2}$$

En el siguiente lema se presentan algunas de las propiedades más importantes de esta familia de representaciones.

Lema 2.2. *(1) Si $s \in \mathbb{R}$, entonces $\pi_s(g)$ preserva $L^2_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{H}^n)$.*

(2) Dados $f_1, f_2 \in L^2(\partial\mathbb{H}^n)$, sea $(f_1, f_2) = \int_{\partial\mathbb{H}^n} f_1\overline{f_2}$. Entonces para cualquier $g \in \mathrm{PO}(1,n)$ se cumple que

$$(\pi_s(g)(f_1), \pi_{-\overline{s}}(g)(f_2)) = (f_1, f_2),$$

es decir, las representaciones π_s y $\pi_{-\overline{s}}$ son duales.

(3) Si $s \in i\mathbb{R}$, entonces π_s es unitaria respecto a $(\cdot,\cdot)$.

(4) Sea $s \in \mathbb{C}$. Se satisface que la representación π_s es irreducible si y sólo si $s \neq \pm\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{n-1}\right)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. (1) Se obtiene a partir de la definición.

(2) Sean $s \in \mathbb{C}$ y $g \in \mathrm{PO}(1,n)$. Consideremos $f_1, f_2 \in L^2(\partial\mathbb{H}^n)$. Basta observar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(\pi_s(g)(f_1), \pi_{-\overline{s}}(g)(f_2)) &= \int_{\partial\mathbb{H}^n} \left|\mathrm{Jac}\left(g^{-1}\right)\right|^{\frac{1}{2}+s} f_1 \circ g^{-1} \cdot \overline{\left|\mathrm{Jac}\left(g^{-1}\right)\right|^{\frac{1}{2}-\overline{s}} f_2 \circ g^{-1}} \\
&= \int_{\partial\mathbb{H}^n} \left|\mathrm{Jac}\left(g^{-1}\right)\right| \left(f_1 \cdot \overline{f_2}\right) \circ g^{-1} \\
&= \int_{\partial\mathbb{H}^n} f_1\overline{f_2} \\
&= (f_1, f_2)
\end{aligned}$$

(3) Si $s \in i\mathbb{R}$, entonces $\overline{s} = -s$ y por ello

$$\begin{aligned}
(\pi_s(g)(f_1), \pi_s(g)(f_2)) &= \int_{\partial\mathbb{H}^n} \left|\mathrm{Jac}\left(g^{-1}\right)\right|^{\frac{1}{2}+s} f_1 \circ g^{-1} \cdot \overline{\left|\mathrm{Jac}\left(g^{-1}\right)\right|^{\frac{1}{2}+s} f_2 \circ g^{-1}} \\
&= \int_{\partial\mathbb{H}^n} \left|\mathrm{Jac}\left(g^{-1}\right)\right| \left(f_1 \cdot \overline{f_2}\right) \circ g^{-1} \\
&= \int_{\partial\mathbb{H}^n} f_1\overline{f_2} \\
&= (f_1, f_2)
\end{aligned}$$

(4) Una prueba de este hecho se puede consultar, por ejemplo, en [45]. □

Para continuar, en el caso $s \in \mathbb{R}$, nos interesa introducir una forma sesquilineal en $L^2(\partial\mathbb{H}^n)$ que depende de s, la cual será invariante bajo la acción de $\mathrm{PO}(1,n)$. Para esto, se usará otro modelo de las representaciones, el cual se obtiene a partir de la descomposición de Iwasawa KAN de $\mathrm{PO}(1,n)$. En primer lugar, sean $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^{n+1}$ dados por

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0 \ldots, 0), \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, \ldots, 0),$$

los cuales son B-isotrópicos, donde B es la forma bilineal que permite definir $\mathbb{H}^n$ (ver Sección 1.2). Consideremos $P = \mathrm{Stab}(\mathbb{R}\xi_1)$ el estabilizador en $\mathrm{PO}(1,n)$ de la línea isotrópica $\mathbb{R}\xi_1$. Se puede demostrar que P es isomorfo a $\left\{ g_{\lambda,v,A} \mid \lambda \in \mathbb{R}_+^*, v \in \mathbb{R}^{n-1}, A \in \mathrm{O}(n-1) \right\}$, donde

$$g_{\lambda,v,A} = \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{2}\lambda\left|v\right|^2 & \lambda\langle v, A(\cdot)\rangle \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & v & A \end{pmatrix},$$

y $\langle\ ,\ \rangle$ denota el producto interno usual en $\mathbb{R}^{n-1}$. Observamos que cualquier $g \in \mathrm{PO}(1,n)$ se puede escribir de manera única como

$$g = k \cdot g_{\lambda,v,A},$$

donde $k \in K$, λ, v y A dependen de g aunque no se indica para no sobrecargar la notación. Además, consideremos el subgrupo uniparamétrico $L = \{g_{\lambda,0,\mathrm{Id}}\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+^*}$ y sea M su centralizador en K, es decir,

$$M = \{\, k \in K \mid\ kg = gk \text{ para cualquier } g \in L\} \,.$$

Procedemos a definir el segundo modelo de las representaciones π_s. Sea V_s el espacio de clases de funciones medibles $F : \mathrm{PO}(1,n) \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que

(I) Para cualesquiera $g \in \mathrm{PO}(1,n)$, $m \in M$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ y $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ se tiene que

$$F\left(gmg_{\lambda,v,\mathrm{Id}}\right) = F(g)\lambda^{-\left(\frac{1}{2}+s\right)(n-1)}.$$

(II) $F|_K$ es de cuadrado integrable.

Sea dk la medida de Haar en K normalizada. Entonces V_s admite una norma $|\cdot|$ dada por

$$|F|^2 = \int_K |F(k)|^2\, dk,$$

la cual le da estructura de espacio de Hilbert. Además, si $g \in \mathrm{PO}(1,n)$, entonces hay una acción dada por

$$\left(g \cdot F\right)(h) = F\left(g^{-1}h\right), \tag{2.3}$$

la cual define una acción de $\mathrm{PO}(1,n)$ en V_s.

A continuación referimos al lector a [31] para la prueba del siguiente resultado.

Proposición 2.3 (Vergne). *La representación π_s es isomorfa a la representación de* $\mathrm{PO}(1,n)$ *en V_s.*

La demostración de la proposición anterior consiste en dar explícitamente un isomorfismo entre $L^2\left(\partial\mathbb{H}^n\right)$ y V_s que sea $\mathrm{PO}(1,n)$-equivariante. La versión y prueba originales de este resultado se pueden encontrar en [43].

2.2. Formas sesquilineales e irreductibilidad

En esta sección se contruye una forma sesquilineal[1] en $L^2(\partial\mathbb{H}^n)$ que es π_s-invariante cuando $s > 0$. Este es un resultado clásico que se puede encontrar por ejemplo en [25], [36] y [37].

Sea $s \in \mathbb{R}_{>0}$. Ya que π_s y π_{-s} son duales para $s \in \mathbb{R}$, basta construir un operador L_s de $L^2(\partial\mathbb{H}^n)$ que entrelace π_s y π_{-s}, esto es, que cumpla

$$L_s \circ \pi_s(g) = \pi_{-s} \circ L_s$$

para cualquier $g \in \mathrm{PO}(1,n)$.

[1]Sea H un espacio vectorial complejo. Una función $\varphi : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ es una *forma sesquilineal* si $\varphi(x+y, z+w) = \varphi(x,z) + \varphi(x,w) + \varphi(y,z) + \varphi(y,w)$ y $\varphi(ax, by) = a\bar{b}\varphi(x,y)$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{C}$ y $x, y, z, w \in H$.

Definición 2.4. Sea $F \in V_s$. Si suponemos que F es continua, definimos $L_sF \in V_{-s}$ mediante

$$L_sF(x) = \frac{1}{\kappa(n,s)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} F\left(xg_{1,v,\mathrm{Id}}\sigma\right) dv, \tag{2.4}$$

donde dv es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{n-1}$, $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{smallmatrix}\right)$, con $J_1 = diag(-1, 1 \cdots, 1)$ de tamaño $(n-1) \times (n-1)$, y además se considera $\kappa(n,s) > 0$ una constante de normalización obtenida al considerar que L_s es un operador lineal que manda la función constante $1_{\partial\mathbb{H}^n}$ a una función constante positiva, y elegimos $\kappa(n,s)$ para que tal constante positiva sea 1.

Observamos que la definición anterior es correcta porque la integral que define L_sF siempre es convergente y, además, hace que L_s sea un mapeo continuo (ver [31, Prop. 3.3]). Por lo anterior, L_s se extiende a todo V_s. Notamos que, por definición, L_s entrelaza las acciones de $\mathrm{PO}(1,n)$ en V_s y V_{-s} (basta comparar (2.3) y (2.4)). Por la Proposición 2.3 y porque L_s es un operador de $L^2(\partial\mathbb{H}^n)$ se sigue que L_s entrelaza π_s y π_{-s}.

Definición 2.5. Sea B_s la forma bilineal $\mathrm{PO}(1,n)$-invariante en $L^2(\partial\mathbb{H}^n)$ dada por

$$B_s\left(h_1, h_2\right) = \int_{\partial\mathbb{H}^n} h_1 \overline{L_s h_2}. \tag{2.5}$$

Notamos que, por la normalización pedida en (2.4), se obtiene que $B_s\left(1_{\partial\mathbb{H}^n}, 1_{\partial\mathbb{H}^n}\right) = 1$. A continuación estudiamos algunas propiedades de la forma B_s, para ello seguimos el desarrollo dado en la Sección 3.B de [31].

Consideremos la descomposición de $L^2(\partial\mathbb{H}^n)$ en componentes K-irreducibles dada por

$$L^2\left(\partial\mathbb{H}^n\right) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^k, \tag{2.6}$$

donde estamos considerando el modelo de Klein de $\mathbb{H}^n$ (para un estudio de este modelo se puede consultar, por ejemplo, [4]) para obtener el homeomorfismo $\partial\mathbb{H}^n \cong S^{n-1}$ e identificamos S^{n-1} como la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ y tomamos H^k como el espacio de restricciones a S^{n-1} de funciones dadas por polinomios homogéneos armónicos de grado k. Además, $p_0 := \dim\left(H^0\right) = 1$, $p_1 := \dim\left(H^1\right) = n$ y si $k \geq 2$, entonces

$$p_k := \dim\left(H^k\right) = \binom{n+k-1}{n-1} - \binom{n+k-3}{n-1}. \tag{2.7}$$

Observación 2.6. En el caso $n = 2$ suele considerarse la descomposición de $L^2\left(\partial\mathbb{H}^n\right)$ en las componentes irreducibles para $\mathrm{SO}(2)$ (ver, por ejemplo, [44]) y, en tal caso, para $k > 0$ se satisface que H^k se descompone en dos líneas invariantes bajo $\mathrm{SO}(2)$. Sin embargo, cuando se considera la descomposición respecto a $K = \mathrm{O}(2)$, los subespacios H^k son irreducibles incluso cuando $k = 2$.

A continuación, nos interesa calcular la signatura de B_s. Ya que la acción de $\pi_s(K)$ en $L^2(\partial\mathbb{H}^n)$ no depende de s y L_s conmuta con dicha acción, se obtiene que L_s preserva cada subespacio H^k, lo cual implica, junto con el Lema de Schur, que $L_s|_{H^k} = \lambda_k(s)\,\mathrm{Id}_{H^k}$ para algún $\lambda_k(s) \in \mathbb{R}$. De hecho, por (2.4), $\lambda_0(s) = 1$. Además, de acuerdo con Sally [36, 37] y Johnson y Wallach [25], dado $k \geq 1$ se satisface que

$$\lambda_k(s) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j + \frac{n-1}{2} - (n-1)s}{j + \frac{n-1}{2} + (n-1)s}. \tag{2.8}$$

Para una exposición moderna acerca del cálculo de (2.8) se puede consultar [11] si $n = 2$. Para el cálculo cuando $n \geq 3$ se puede revisar [25]. Ahora, denotemos $s_j = \frac{j}{n-1} + \frac{1}{2}$ con $j \geq 0$ entero.

Lema 2.7. *Cuando $s \in (0, s_0)$ tenemos que B_s es definida positiva. Para valores $s > s_0$ se cumple lo siguiente:*

(1) Si $s \in (s_j, s_{j+1})$ con j impar, entonces B_s tiene índice $p(s) = \sum_{\substack{1\leq k\leq j \\ k \text{ impar}}} p_k.$

(2) Si $s \in (s_j, s_{j+1})$ con j par, entonces B_s tiene índice $p(s) = \sum_{\substack{1\leq k\leq j \\ k \text{ par}}} p_k.$

En virtud del lema anterior y de (2.7) obtenemos que los valores posibles del índice $p(s)$ de la forma B_s, para $s > 0$, están dados por los números $\binom{n-1+j}{n-1}$, con $j \geq 0$. En particular, cuando $n = 2$ es posible obtener todos los enteros positivos (ver [11]), y en el caso de $n = 3$ los índices posibles coinciden con los números triangulares $\frac{(j+1)(j+2)}{2}$ (con $j \geq 0$).

Observación 2.8. Si $s = \frac{1}{2} + \frac{k}{n-1}$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces B_s es degenerada. De hecho, el radical de B_s es $W = \oplus_{j\geq k+1} H^j$, ya que al considerar (2.8) obtenemos que para todo $j \geq k+1$ se satisface que $\lambda_j(s) = 0$. Esta es una demostración concreta de que π_s no es irreducible para este valor de s.

Pasamos ahora a estudiar de manera directa la forma bilineal B_s. En particular, supongamos que $s \in (s_0, s_1)$, lo cual implica que B_s tiene índice 1. Además, como los coeficientes $\lambda_k(s)$ son números reales, la forma B_s toma valores en $\mathbb{R}$ y por ello es posible considerar su restricción a $L^2_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{H}^n)$. Sin embargo, el producto escalar $-B_s$ en $\oplus_{k\geq 1} H^k$ no es completo porque los coeficientes $\lambda_k(s)$ convergen a 0 cuando k tiende a infinito (ver [31, Lema 3.8]). Consideremos V la compleción de $\oplus_{k\geq 1} H^k$ respecto a $-B_s$. Notemos que $\mathrm{PO}(1,n)$ también actúa en $H^0 \oplus V$ y preserva la acción de la forma B_s en este espacio. Además, la acción lineal de $\mathrm{PO}(1,n)$ en $H^0 \oplus V$ sigue siendo irreducible (ver [11, Sección 2.1] y notar que los argumentos dados para el caso $n = 2$ funcionan para todo $n \geq 2$).

Denotamos por $\mathbb{H}_s^\infty$ el espacio hiperbólico asociado a $\left(H^0 \oplus V, B_s\right)$ (aquí consideramos que $\mathbb{R} \cong H^0$ para realizar la construcción como en la Sección 1.2). Además, denotamos con $\overline{\pi}_s$ a la representación inducida

$$\overline{\pi}_s : \mathrm{PO}(1,n) \longrightarrow \mathrm{O}(1,\infty)$$

correspondiente. Ahora, si θ_0 es el punto en $\mathbb{H}_s^\infty$ asociado a la función constante 1, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.9 (Monod-Py)**.** *El punto θ_0 es el único punto fijo por la acción de $K^\circ = \mathrm{SO}(n)$ en $\mathbb{H}_s^\infty$ (y por ello por la acción de $K = \mathrm{O}(n)$). Además, el mapeo $f_s : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}_s^\infty$ dado por*

$$f_s\left(g \cdot e_0\right) = \pi_s(g)\left(\theta_0\right), \tag{2.9}$$

donde $g \in \mathrm{PO}(1,n)$, es el único mapeo $\mathrm{PO}(1,n)$-equivariante de $\mathbb{H}^n$ en $\mathbb{H}_s^\infty$.

Observamos que f_s se define únicamente mapeando e_0 en θ_0 y luego extendiendo mediante la acción transitiva de $\mathrm{PO}(1,n)$ en $\mathbb{H}^n$ vía la representación π_s.

Para finalizar esta sección, presentamos una clasificación de las representaciones continuas e irreducibles $\mathrm{PO}(1,n) \longrightarrow \mathrm{Isom}\left(\mathbb{H}^\infty\right)$. El resultado original aparece como Teorema B en [31]. Para enunciarlo requerimos de la función de longitud de traslación.

Definición 2.10. Sea Γ un grupo, X un espacio métrico, $\mathrm{Isom}(X)$ el grupo de isometrías de X y $\varrho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Isom}(X)$ un homomorfismo de grupos, la *longitud de traslación* de $\gamma \in \Gamma$ respecto a la representación ϱ es

$$\ell_\varrho(\gamma) = \inf_{x \in X} d_X\left(\varrho(\gamma)(x), x\right).$$

En particular, cuando $X = \mathbb{H}^n$, denotamos por $\ell_{\mathbb{H}^n}$ la función de longitud de traslación asociada a la representación identidad cuando $\Gamma = \mathrm{PO}(1,n)$ (recordamos que $\mathrm{PO}(1,n) = \mathrm{Isom}\left(\mathbb{H}^n\right)$).

Ahora, antes de enunciar el teorema de clasificación, observamos que dado $s \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\right)$, al considerar $t = (n-1)\left(s - \frac{1}{2}\right)$ se obtiene que $t \in (0,1)$.

Teorema 2.11 (Clasificación de representaciones irreducibles en $\mathrm{O}(1,\infty)$)**.**

(1) Si $\varrho : \mathrm{PO}(1,n) \longrightarrow \mathrm{Isom}\left(\mathbb{H}^\infty\right)$ es una representación (continua) irreducible, entonces existe un único $t \in (0,1)$ tal que

$$\ell_\varrho = t\ell_{\mathbb{H}^n}.$$

(2) Si $t \in (0,1)$ y definimos $s(t) = \frac{1}{2} + \frac{t}{n-1}$, entonces, salvo conjugación en $\mathrm{Isom}\left(\mathbb{H}^\infty\right)$, $\overline{\pi}_{s(t)}$ es la única representación irreducible tal que

$$\ell_{\overline{\pi}_{s(t)}} = t\ell_{\mathbb{H}^n}.$$

Observación 2.12. Todos los resultados han sido enunciados en el caso de $\mathrm{PO}(1,n)$, pero también se verifican cuando consideramos la componente conexa de la identidad $\mathrm{PO}(1,n)^\circ$, por lo cual, se utilizarán en ese contexto más adelante (ver [31, Obs. 3.13]).

2.3. Representaciones en espacios simétricos

Supongamos que $s \in \mathbb{R}_{>0}$ con $s \notin \left\{ \frac{1}{2} + \frac{k}{n-1} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$. Por lo hecho en la sección anterior, los valores de la función $s \mapsto p(s)$, donde $p(s)$ es el índice de la forma B_s, son enteros de la forma

$$\binom{n-1+j}{n-1}, \; j \geq 0. \tag{2.10}$$

A partir de lo anterior obtenemos una familia de representaciones irreducibles de la forma $\mathrm{PO}(1,n) \longrightarrow \mathrm{O}(p(s),\infty)$. Luego, al restringirnos a la componente conexa de la identidad $\mathrm{PO}(1,n)^\circ$ del grupo de isometrías de $\mathbb{H}^n$, por el Teorema 2.11, de manera natural nos preguntamos lo siguiente.

Pregunta 2.13. *Sea $p \geq 2$. Si consideramos $\mathrm{PO}(1,n)^\circ \longrightarrow \mathrm{O}(p,\infty)$ una representación irreducible, ¿es conjugada a alguna de las representaciones $\overline{\pi}_s$?*

Una primera aproximación al problema anterior es entender cómo son las representaciones irreducibles en $\mathrm{O}(p,\infty)$ cuando no existe s tal que $p(s) = p$.

Pregunta 2.14. *Si p es un entero que no es de la forma dada en (2.10), ¿existen representaciones irreducibles de $\mathrm{PO}(n,1)^\circ$ en $\mathrm{O}(p,\infty)$?*

Notemos que los primeros valores para los que tiene sentido la pregunta anterior están en el conjunto $\{2, \cdots, n-1\}$. Este problema fue estudiado en [31] donde se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 2.15 (Monod-Py)**.** *Sea p un entero con $2 < p < n$ para $n > 4$. Entonces no existe ninguna representación irreducible $\mathrm{PO}(1,n)^\circ \longrightarrow \mathrm{O}(p,\infty)$.*

Con base en lo anterior, si suponemos que $p \in \{2, \cdots, n-1\}$, resta resolver el problema planteado en la Pregunta 2.14 en los siguientes casos:

(1) $p = 2$, $n \geq 3$;

(2) $p = 3$, $n = 4$.

Para el caso (1) se da una respuesta negativa a la Pregunta 2.14 en el Capítulo 4 (ver Teorema A). Para el caso 2, es posible hacer un análisis similar al que se realiza en el Capítulo 4: para ello, si consideramos morfismos $\mathrm{SO}(4) \longrightarrow \mathrm{U}(3)$, esto nos induce morfismos no triviales del tipo $\mathrm{SO}(4) \hookrightarrow \mathrm{SO}(3) \hookrightarrow \mathrm{U}(3)$, por lo cual es de interés el estudio de si existen morfismos que se factoricen o que sean "inyectivos" en el álgebra de Lie, lo cual motiva un análisis similar al que se realiza en la Proposición 4.16 para los morfismos $\mathrm{SO}(4) \longrightarrow \mathrm{SO}(2)$, con la dificultad de la existencia de los ya mencionados morfismos no triviales de $\mathrm{SO}(4)$ en $\mathrm{SO}(3)$. Otra enfoque posible tratar de imitar los argumentos dados para la prueba del Teorema B.

Finalmente, si $p, q \geq 0$ son ambos finitos entonces podemos conocer un poco acerca de las representaciones de $\mathrm{PO}(1,n)^\circ$ en $\mathrm{O}(p,q)$. Existen las representaciones obvias: si consideramos un espacio vectorial V_1 con una forma de signatura $(1,n)$ y otro espacio vectorial V_2 con una forma de signatura $(p-1, q-n)$, entonces $\mathrm{PO}(1,n)^\circ$ actúa en $V_1 \oplus V_2$ de manera estándar en V_1 y como la identidad en V_2. Veamos que estas son todas las representaciones salvo conjugación. Para esto, si consideramos un homomorfismo continuo $\varrho : \mathrm{PO}(1,n)^\circ \longrightarrow \mathrm{PO}(p,q)$, entonces es C^∞, y además ϱ está determinado por su diferencial en la identidad $D_{\mathrm{Id}}\varrho$. Como $D_{\mathrm{Id}}\varrho$ es morfismo de álgebras de Lie y $\mathfrak{po}(p,q)$ es simple, entonces $D_{\mathrm{Id}}\varrho$ es o bien el morfismo cero o bien es inyectivo. Esto último implica que si ϱ es una representación no trivial de $\mathrm{PO}(1,n)^\circ$ en $\mathrm{O}(p,q)$, por la conexidad se induce un morfismo en $\mathrm{PO}(p,q)$, y ello implica que ϱ debe ser inyectivo y nos lleva a las representaciones mencionadas al principio de este párrafo.

3 Teorema de Naĭmark

Para simplificar la exposición, denotemos por $\mathscr{H}_p$ a un espacio de Hilbert complejo $\mathscr{H}$ que es separable y está dotado de una forma hermitiana fuertemente no degenerada B de signatura (p, ∞), con $p \geq 0$ un entero. Además, recordemos que $\mathrm{U}(B)$ denota al grupo de operadores unitarios de $\mathscr{H}_p$ (ver Sección 1.1).

El presente capítulo está dedicado principalmente a presentar la demostración del siguiente resultado debido a Naĭmark [33].

Teorema 3.1 (Naĭmark)**.** *Sea $\mathscr{U} \subset \mathrm{U}(B)$ una familia de operadores que conmutan. Entonces existe un subespacio W positivo de $\mathscr{H}_p$ y de dimensión p que es invariante respecto a cualquier $U \in \mathscr{U}$.*

En la Sección 3.1 se presenta la prueba del Teorema 3.1 siguiendo el desarrollo realizado por J. Bognár en [3]. Por otro lado, en la Sección 3.2 se presentan los dos corolarios originales de dicho teorema, los cuales son importantes por sí mismos, en particular, el Corolario 3.7 es utilizado por N. Monod y P. Py para demostrar el Teorema 5.4 de [31] (ver Proposición 4.15). Finalmente, en la tercera sección se presenta un lema auxiliar debido a Ismagilov [24], en cuya demostración se muestra una estrategia para obtener descomposiciones en subespacios ortogonales de $\mathscr{H}_p$ que sean invariantes bajo subgrupos de operadores unitarios, y este resultado se utiliza en el Capítulo 4 (ver la Proposición 4.2).

3.1. Teorema principal

Como se indica arriba, esta sección está dedicada a demostrar el Teorema de Naĭmark. La prueba original se puede encontrar en [33], pero aquí seguimos el desarrollo dado por J. Bognár [3]. Existe otra prueba dada por Z. Sasvári en [39], la cual utiliza técnicas de análisis complejo y considera subespacios negativos en lugar de subespacios positivos. Para comenzar presentamos algunos resultados sobre la existencia de subespacios invariantes en el caso de una familia finita de operadores que conmutan.

Teorema 3.2 (Pontryagin)**.** *Sea $p > 0$. Si U es un operador unitario en $\mathscr{H}_p$, entonces existe un subespacio L de $\mathscr{H}_p$ de dimensión p, positivo y U-invariante.*

Una prueba de este hecho se puede encontrar en [3, Th. IX.7.1].

Lema 3.3. *Sea U un operador unitario en $\mathscr{H}_p$. Sea M un subespacio cerrado de $\mathscr{H}_p$ tal que $UM = M$. Si M no es definido negativo, entonces M contiene un subespacio positivo no cero que es invariante bajo U.*

Demostración. Sea $M_0 = M \cap M^{\perp}$. Si $M_0 \neq \{0\}$, entonces M_0 es un subespacio invariante que cumple lo deseado. Ahora, supongamos que $M_0 = \{0\}$. Como M no es definido negativo y por lo anterior $B|_{M\times M}$ es no degenerada, entonces por la Proposición 1.4 se obtiene que $\left(M, B|_{M\times M}\right)$ es de signatura (p', ∞) con $0 < p' \leq p$. Finalmente, obtenemos la conclusión deseada al aplicar el Teorema 3.2 al operador unitario $U|_M$. □

Lema 3.4. *Sean $U_1, \ldots, U_n$ operadores unitarios en $\mathscr{H}_p$ que conmutan, con $p > 0$. Entonces $\mathscr{H}_p$ tiene un subespacio L positivo y no cero tal que $U_jL \subset L$ para $j = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Por inducción sobre n. Por el Teorema 3.2 verifica el caso $n = 1$. Supongamos que el resultado es cierto para $n \geq 1$. Tomemos $U_1, \ldots, U_n, U_{n+1}$ operadores unitarios en $\mathscr{H}_p$ que conmutan. Por la hipótesis de inducción, existe un subespacio $L \subset \mathscr{H}_p$ positivo y no cero tal que $U_jL \subset L$ para $j = 1, \ldots, n$. Notemos que $\dim(L) \leq p$.

Recordemos que si V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita y $T_1, \ldots, T_n$ son operadores unitarios en V que conmutan, entonces tienen un vector propio común. Así, al considerar los operadores unitarios $U_1|_L, \ldots, U_n|_L$, obtenemos que existe un vector propio común $x_0 \in L$, esto es, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tales que $U_jx_0 = \lambda_jx_0$, para $j = 1, \ldots, n$. Definimos

$$M = \bigcap_{j=1}^{n} \ker\left(U_j - \lambda_j \operatorname{Id}\right).$$

Ahora, observemos que si T_1 y T_2 son dos operadores lineales en un espacio vectorial V que conmutan, entonces cada subespacio propio de uno de ellos es un subespacio invariante del otro. Basta notar que si $(T_1 - \lambda \operatorname{Id})x = 0$, entonces

$$\left(T_1 - \lambda \operatorname{Id}\right) T_2x = T_2 \left(T_1 - \lambda \operatorname{Id}\right) x = 0,$$

esto es, $T_2(x)$ es un vector propio asociado a λ para T_1. Usamos este hecho para obtener que $U_{n+1}M \subset M$.

Además, si A, B son operadores invertibles que conmutan, entonces B^{-1} conmuta con A:

$$AB^{-1} = B^{-1}BAB^{-1} = B^{-1}ABB^{-1} = B^{-1}A.$$

Por lo tanto, U_{n+1}^{-1} también conmuta con todo los U_j's, por lo cual también $U_{n+1}^{-1}M \subset M$, y por ello, $U_{n+1}M = M$. Como $x_0 \in M$, entonces M no es definido negativo. Luego, como

M es un subespacio cerrado, por el Lema 3.3 se sigue que M tiene un subespacio L' que es positivo, no cero e invariante bajo U_{n+1}. Finalmente, por la definición de M, $L' \subset M$ también es invariante bajo $U_1, \ldots, U_n$. □

A continuación damos la versión finita del Teorema de Naĭmark.

Proposición 3.5. *Sean $U_1, \ldots, U_n$ operadores unitarios en $\mathscr{H}_p$ que conmutan. Entonces $\mathscr{H}_p$ tiene un subespacio positivo L de dimensión p tal que $U_j L \subset L$ para $j = 1, \ldots n$.*

Demostración. El caso $p = 0$ es trivial. Supongamos que $p > 0$. Por el Lema 3.4 obtenemos un subespacio positivo L no cero tal que $U_j L \subset L$ para $j = 1, \ldots n$. Si $\dim(L) = p$ terminamos, por lo cual supongamos que $\dim(L) < p$. Ya que U_j es invertible y $\dim(L) < \infty$, entonces $U_j L = L$. Por ello también

$$U_j L^{\perp} = L^{\perp} \text{ y } U_j L_0 = L_0,$$

donde $L_0 = L \cap L^{\perp}$. A partir de esto, obtenemos que $L^{\perp}/L_0$ es un espacio de signatura (p', ∞) con $p' = p - \dim(L)$ y además $p' > 0$ (ver [3, Th. IX.2.6, Cor. V.3.7]). Luego, los operadores U_j inducen operadores unitarios $\widetilde{U}_j$ en $L^{\perp}/L_0$ que conmutan, y por el Lema 3.4 existe un subespacio positivo $\widetilde{M} \subset L^{\perp}/L_0$ no cero y tal que $\widetilde{U}_j \widetilde{M} \subset \widetilde{M}$, para $j = 1, \ldots, n$. Entonces, $\dim(\widetilde{M}) \leq p'$. Sea $\{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_s\}$ una base de $\widetilde{M}$ y consideremos x_j representante de $\widetilde{x}_j$. Tenemos que el subespacio $M = \langle x_1, \ldots, x_s \rangle \subset L^{\perp}$ cumple que

$$U_j(L + M) \subset L + M,$$

para $j = 1, \ldots, n$. Además, ya que M es positivo, no cero y linealmente independiente de L_0, el subespacio $L + M$ es positivo y diferente de L. La construcción anterior muestra que un subespacio positivo L no cero e invariante puede ser extendido a un subespacio positivo $L + M$ no cero e invariante tal que $\dim(L + M) > \dim(L)$ si $\dim(L) < p$. Así, al iterar dicho proceso a lo más $p - \dim(L)$ veces obtenemos un subespacio positivo de dimensión p que es invariante. □

Finalmente, para terminar esta sección se presenta la prueba del Teorema de Naĭmark.

Demostración [Teorema 3.1]. Consideremos una descomposición $\pm$ de $\mathscr{H}_p$ dada por $\mathscr{H}_p = H_+ \oplus H_-$, donde H_+ es definido positivo y H_- es definido negativo. Sean $P_+ x = x_+$ y $P_- x = x_-$ donde $x = x_+ + x_-$ con $x_+ \in H_+$ y $x_- \in H_-$, además, sea $J = P_+ - P_-$. Escribamos la matriz $(U_{jl})_{j,l=1,2}$ asociada a $U \in \mathscr{U}$ respecto a la descomposición $\pm$, donde

$$U_{11} = P_+ U|_{H_+},\ U_{12} = P_+ U|_{H_-},\ U_{21} = P_- U|_{H_+},\ U_{22} = P_- U|_{H_-}.$$

Consideremos el espacio $\mathscr{B}(H_+, H_-)$ de operadores lineales continuos de H_+ en H_-. Dotemos a $\mathscr{B}(H_+, H_-)$ con la topología débil de operadores τ_{wo}, esto es, la topología generada por las seminormas $p_{x,y}(T) = |B(Tx, y)|$ con $x \in H_+, y \in H_-$ y $T \in \mathscr{B}(H_+, H_-)$, y sea

$$\mathscr{B}_1 = \{T \in \mathscr{B}(H_+, H_-) \mid \|T\|_J \leq 1\},$$

donde tomamos $\|x\|_J = B(x_+, x_+) - B(x_-, x_-)$ si $x = x_+ + x_-$ con $x_+ \in H_+$ y $x_- \in H_-$ y dado $T \in \mathscr{B}(H_+, H_-)$ definimos

$$\|T\|_J = \sup_{\|x_+\|_J = 1, x_+ \in H_+} \|Tx\|_J.$$

Se verifica lo siguiente:

Afirmación 1. La fórmula

$$L = \{x + Kx \mid x \in H_+\}$$

define una biyección entre la clase de subespacios positivos L de dimensión p que son U-invariantes y el conjunto $\mathscr{B}_1^U$ de operadores K que cumplen

(1) $K \in \mathscr{B}_1$,

(2) $U_{21} + U_{22}K - K(U_{11} + U_{12}K) = 0$.

Para la demostrar este hecho consideremos lo siguiente: Sea $L \subset \mathscr{H}_p$ un subespacio positivo de dimensión p. Entonces $f_L = P_+|_L$ es inyectiva pues si $x \in L$ cumple que $f_L x = 0$, entonces $x \in L \cap H_- = \{0\}$, por lo cual $x = 0$. Pero L y H_+ tienen la misma dimensión, por lo tanto f_L es invertible. Definimos el operador $K = P_-|_L \circ f_L^{-1}$. Entonces $K \in \mathscr{B}(H_+, H_-)$. Ahora, por definición de K,

$$L = \{x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in H_+\}.$$

Además, si $x_+ \in H_+$, se obtiene que

$$B(x_+ + Kx_+, x_x + Kx_+) = B(x_+, x_+) + B(Kx_+, Kx_+) = \|x_+\|_J - \|Kx_+\|_J,$$

y como $x_+ + Kx_+ \in L$, entonces $B(x_+ + Kx_+, x_+ + Kx_+) \geq 0$, de donde se sigue que $\|x_+\|_J \geq \|Kx_+\|_J$ para toda $x_+ \in H_+$. En particular, esto último implica que

$$\|K\|_J = \sup_{\|x_+\|_J = 1, x_+ \in H_+} \|Kx_+\|_J \leq 1$$

Así, $K \in \mathscr{B}_1$. Para concluir la prueba de la afirmación veamos que L es U-invariante si y sólo si cumple la condición (2). Para esto, si $x_+ \in H_+$, al considerar $U = (U_{jl})_{j,l=1,2}$, obtenemos que

$$U(x_+ + Kx_+) = (U_{11}x_+ + U_{12}Kx_+) + (U_{21}x_+ + U_{12}Kx_+),$$

por lo cual L es U-invariante si y sólo si

$$U_{21}x_+ + U_{22}Kx_+ = K(U_{11}x_+ + U_{12}Kx_+).$$

Afirmación 2. $\mathscr{B}_1$ es compacto.

Consideremos $\mathscr{H}_+$ y $\mathscr{H}_-$ como espacios de Hilbert dotados con la topología débil. Sea $\mathscr{J} = \mathscr{H}_-^{\mathscr{H}_+}$ el espacio producto dotado con la topología producto. Definimos $\mathscr{F} \subset \mathscr{J}$ el subespacio de funciones lineales de $\mathscr{H}_+$ en $\mathscr{H}_-$; veamos que $\mathscr{F}$ es cerrado. Para esto, sea $\alpha_{x,y}(T) = (Tx, y)_J$ donde $x \in H_+$, $y \in H_-$. Supongamos que $Tx + Ty - T(x + y) \neq 0$, entonces existe $z \in H_-$ tal que $(Tx + Ty - T(x + y), z) \neq 0$; por lo cual

$$\alpha_{x,z}(T) + \alpha_{y,z}(T) - \alpha_{x+y,z}(T) \neq 0.$$

Esto prueba lo deseado. Ahora, por lo hecho en la prueba de la afirmación anterior sabemos que, dado $T \in \mathscr{B}(H_+, H_-)$, se satisface que

$$\|T\|_J \leq 1 \tag{3.1}$$

si y sólo si para cualquier $x \in H_+$ se cumple que

$$\|Tx\|_J = B(Tx, Tx) \leq B(x, x) = \|x\|_J. \tag{3.2}$$

Definimos

$$\mathscr{A} = \prod_{x \in H_+} B\left(0, \|x\|_J\right) \subset \mathscr{J}$$

donde $B(0, r) = \{y \in H_- \mid \|y\|_J \leq r\}$ es la bola de centro 0 y radio $r \geq 0$. Notamos que por el Teorema de Banach-Alaoglu se obtiene que, para cada $x \in H_+$, la bola $B\left(0, \|x\|_J\right)$ es compacta; así que $\mathscr{A}$ es compacto por el Teorema de Tychonoff. Finalmente, por lo establecido en (3.1) y (3.2), se sigue que

$$\mathscr{B}_1 = \mathscr{F} \cap \mathscr{A},$$

y como $\mathscr{F}$ es cerrado y $\mathscr{A}$ es compacto, entonces $\mathscr{B}_1$ es compacto. Para concluir, observamos que el espacio producto dotado de la topología producto de las topologías débiles coincide con dicho espacio dotado con la topología de operadores débil. Esto prueba lo deseado.

Afirmación 3. La función $\psi : \mathscr{B}_1 \longrightarrow \mathscr{B}\left(H_+, H_-\right)$ dada por $\psi(K) = U_{21} + U_{22}K - K\left(U_{11} + U_{12}K\right)$ es τ_{wo}-continua.

Ya que ψ se define como una suma de operadores lineales, basta ver que cada sumando es en sí mismo una función continua. Únicamente debemos probar que la función $\varphi : \mathscr{B}_1 \longrightarrow \mathscr{B}\left(H_+, H_-\right)$ definida por $\varphi(K) = KU_{12}K$ es una función continua. Recordemos que es posible escribir $U_{12} : H_- \longrightarrow H_+$ como

$$U_{12}\left(x_-\right) = \sum_{j=1}^{p} B\left(x_-, v_j\right) z_j$$

con $\{z_j\}_{j=1}^p$ una base de H_+ y $\{v_j\}_{j=1}^p \subset H_-$ (usamos que la dimensión de H_+ es finita y el teorema de representación de Riesz). Así, dados $x_+ \in H_+$ y $y_- \in H_-$ se sigue que

$$B\left(\varphi(K)x_+, y_-\right) = B\left(KU_{12}Kx_+, y_-\right) = \sum_{j=1}^{p} B\left(Kx_+, v_j\right) B\left(Kz_j, y_-\right),$$

y esta última expresión es un polinomio en K. Por lo tanto, φ es continua y, en conclusión, ψ es continua. Esto prueba la Afirmación 3.

Ahora, en virtud de la Afirmación 1, la conclusión del Teorema se obtiene si y sólo si

$$\bigcap_{U \in \mathscr{U}} \mathscr{B}_1^U \neq \varnothing. \tag{3.3}$$

Pero por la propia Afirmación 1 y la Afirmación 3, cada $\mathscr{B}_1^U$ está contenido en $\mathscr{B}_1$ y es cerrado respecto a la topología inducida por τ_{wo}. Finalmente, por la Afirmación 2, para demostrar (3.3) resta ver que el resultado es cierto para intersecciones de familias finitas, esto es, que el Teorema es cierto para familias finitas, lo cual se verifica por la Proposición 3.5. Esto termina la prueba. □

3.2. Resultados útiles

A continuación se enuncian dos corolarios del Teorema principal. Es importante notar que el segundo de ellos es citado en la prueba de la Proposición 5.4 de [31]. Para los fines de esta sección, si $A : \mathscr{H}_p \longrightarrow \mathscr{H}_p$ un operador lineal acotado, denotamos por A^* al *operador adjunto* respecto a B, es decir, al operador tal que para cualesquiera $x, y \in \mathscr{H}_p$ se cumple que $B(Ax, y) = B\left(x, A^* y\right)$. Además, decimos que A es un *operador hermitiano* si $A^* = A$.

Corolario 3.6. *Sea $\mathcal{H}$ una familia de operadores hermitianos en $\mathscr{H}_p$ que conmutan. Entonces existe un subespacio positivo de dimensión p que es invariante respecto a todos los operadores de $\mathcal{H}$.*

Demostración. Sean $t \in \mathbb{R}$ y $H \in \mathcal{H}$. Definimos el operador

$$\varphi(t, H) = e^{itH} = \sum_{j \geq 0} \frac{t^j}{j!}(iH)^j.$$

Entonces la familia $\mathscr{F} = \{\varphi(t, H), t \in \mathbb{R} \text{ y } H \in \mathcal{H}\}$ está formada por operadores que preservan B y además conmutan. Por el Teorema 3.1, existe un subespacio positivo N de dimensión p que es invariante bajo todos los elementos de $\mathscr{F}$. Finalmente, ya que $\left\|\frac{1}{it}\left(e^{itH} - \mathrm{Id}\right) - H\right\| \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow 0$, se obtiene que N también es invariante bajo todo $H \in \mathcal{H}$. □

Corolario 3.7. *Sea R una $\mathbb{C}$-álgebra conmutativa de operadores acotados en $\mathscr{H}_p$ tal que $A \in R$ implica que $A^* \in R$. Entonces existe un subespacio positivo de dimensión p e invariante respecto a cualquier $A \in R$.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de operadores hermitianos de R. Entonces $\mathcal{H}$ cumple las hipótesis del Corolario 3.6, por lo cual existe un subespacio positivo N de dimensión p e invariante respecto a cualquier $H \in \mathcal{H}$.

Ahora, sea $A \in R$. Por hipótesis, $A^* \in R$ y podemos escribir $A = H_1 + iH_2$, donde $H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$ y $H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$. Por lo tanto, H_1 y H_2 son hermitianos y $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$. Por lo dicho arriba, N es invariante bajo H_1 y H_2 y por lo tanto es invariante bajo A. □

3.3. Descomposiciones ortogonales

Como se anuncia al comienzo del capítulo, en esta sección presentamos el siguiente resultado debido a Ismagilov [24].

Lema 3.8 (Ismagilov)**.** *Sea Γ un subgrupo de $\mathrm{U}(B)$. Si $\mathscr{H}_p$ no contiene subespacios isotrópicos no triviales y Γ–invariantes, entonces existe una descomposición en suma directa ortogonal*

$$\mathscr{H}_p = \mathscr{H}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathscr{H}_{p_n} \oplus H_-$$

donde H_- es un subespacio cerrado Γ-invariante tal que la forma $B|_{H_- \times H_-}$ es definida negativa, y $\mathscr{H}_{p_k}$ es un subespacio cerrado Γ-invariante que no contiene subespacios cerrados no triviales Γ-invariantes y tal que la restricción $B|_{\mathscr{H}_{p_k} \times \mathscr{H}_{p_k}}$ es una forma sesquilinear de índice p_k $(k = 1, \ldots, n)$.

Observación 3.9. Notemos que si M es un subespacio Γ–invariante de $\mathscr{H}_p$, entonces B es no degenerada en M. En caso contrario, el subespacio isotrópico $M \cap M^{\perp_B}$ sería Γ–invariante y no trivial.

Demostración [Lema 3.8]. Supongamos que existe W subespacio cerrado, no trivial e invariante de $\mathscr{H}_p$ tal que $B|_{W \times W}$ es definido negativo (en caso contrario definimos $H_- = \{0\}$). Usaremos el Lema de Zorn para mostrar que existe H_- como en el Lema. Para ello, consideremos

$$\mathscr{W} = \{W \subset \mathscr{H}_p,\ W \text{ subespacio cerrado, no trivial, } \Gamma\text{-invariante y definido negativo}\}.$$

Por la hipótesis, $\mathscr{W} \neq \varnothing$. Sea $C = \{W_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cadena en $\mathscr{W}$. Observamos que $W_\infty = \overline{\cup W_\alpha}$ es una cota superior de C. Afirmamos que $W_\infty \in \mathscr{W}$.

(1) W_∞ es subespacio vectorial de $\mathscr{H}_p$ porque la unión de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial si dichos subespacios forman una cadena, y además la cerradura de un subespacio vectorial es también un subespacio vectorial.

(2) W_∞ es Γ–invariante. Para ello, sean $\varphi \in \Gamma$ y $w \in W_\infty$. Entonces, existe una sucesión $\{w_n\}$ en $\cup W_\alpha$ tal que w_n converge a w cuando n tiende a infinito y, por la continuidad de φ, φw_n converge a φw. Como $\{\varphi w_n\}$ es una sucesión en $\cup W_\alpha$ porque cada W_α es Γ-invariante, se obtiene que $\varphi w \in W_\infty$.

(3) La forma B restringida a $W_\infty \times W_\infty$ es definida negativa. Primero, sea $w \in W_\infty$ con $w \neq 0$. Nuevamente, hay una sucesión $\{w_n\}$ contenida en $W_\infty \setminus \{0\}$ tal que w_n converge a w; por hipótesis, $B(w_n, w_n) < 0$, luego, por la continuidad de B, $B(w_n, w_n)$ converge a $B(w, w)$, por lo cual $B(w, w) \leq 0$. Para continuar, notemos que $\{x \in W_\infty \mid B(x, x) = 0\} = W_\infty \cap W_\infty^{\perp_B}$. Ahora, el subespacio isotrópico $W_\infty \cap W_\infty^{\perp_B}$ es Γ–invariante, así que, por la hipótesis, es trivial. En conclusión, $B|_{W_\infty \times W_\infty}$ es definido negativo.

Lo anterior prueba que $W_\infty \in \mathscr{W}$. Por esto, $\mathscr{W}$ cumple las hipótesis del Lema de Zorn y, por lo tanto, existe un subespacio vectorial cerrado H_- que es Γ-invariante tal que $B|_{H_- \times H_-}$ es definido negativo y que es maximal respecto a esta propiedad. Ahora, escribimos $\mathscr{H}_p = H_-^\perp \otimes H_-$. Por lo dicho anteriormente, observamos que $H_-^\perp$ es Γ-invariante y B tiene índice p en dicho subespacio. Supongamos que $H_-^\perp$ contiene un subespacio propio $M \neq \{0\}$ que es cerrado y Γ-invariante. Entonces $B|_{M \times M}$ es no degenerada porque no hay subespacios isotrópicos no triviales Γ-invariantes. Así, por la Proposición 1.4, obtenemos una descomposición $H_-^\perp = M \oplus M^\perp$, donde $M^\perp$ también es invariante, $B|_{M \times M}$ es de índice p_1 y $B|_{M^\perp \times M^\perp}$ es de índice p_2. Como estamos suponiendo que H_- es maximal respecto a ser definido negativo, entonces $p_1 > 0$ y $p_2 > 0$. Estas desigualdades permiten repetir el argumento anterior a lo más una cantidad finita de veces y ello nos da la descomposición deseada. $\square$

Es importante notar que veremos un enunciado similar en el Capítulo 4 (Proposición 4.2), el cual se demuestra de manera análoga, por lo cual no se presentará su prueba. Además, en el caso de un espacio de Hilbert de dimensión finita, se puede enunciar un resultado totalmente análogo, lo cual se utilizará en el Capítulo 5.

4 Representaciones de $\mathrm{PO}(1, n)^\circ$ en $\mathrm{O}(2, \infty)$

El objetivo de este capítulo es resolver el problema planteado en la Pregunta 2.14 en el caso $p = 2$ con $n \geq 3$. En primer lugar enunciamos el resultado principal.

Teorema A. Sea $n \geq 3$. Entonces no existe ninguna representación irreducible

$$\mathrm{PO}(1, n)^\circ \longrightarrow \mathrm{O}(2, \infty). \tag{4.1}$$

En virtud del teorema anterior, sólo resta por resolver el caso (2) (ver p. 20) para tener una respuesta negativa a la Pregunta 2.14 cuando $p < n$.

Para construir la prueba del Teorema A se requieren algunos resultados generales acerca de complejificaciones de representaciones en $\mathrm{O}(2, \infty)$ (que son presentados en la sección 4.1), así como del concepto de argumento de Cartan (introducido en la Sección 4.2). Dedicamos la sección 4.3 a la demostración del teorema principal. Finalmente, en la sección 4.4 se prueba un resultado similar al Teorema A en el caso de pares de Gelfand donde el grupo ambiente tiene la propiedad (T) de Kazhdan.

4.1. Complejificaciones de representaciones en $\mathrm{O}(2, \infty)$

En esta sección consideremos G un grupo topológico, $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert real y B una forma bilineal fuertemente no degenerada en $\mathscr{H}$ de signatura $(2, \infty)$. Denotamos por $\mathrm{O}(\mathscr{H}, B)$ al grupo de operadores lineales biyectivos de $\mathscr{H}$ que preservan B. Consideremos una representación irreducible

$$\varrho : G \longrightarrow \mathrm{O}(\mathscr{H}, B).$$

Ahora, tomemos la complejificación $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$ de $\mathscr{H}$ y denotemos (con abuso de notación) por B a la extensión hermitiana de B a $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$. Sea $\mathrm{U}(\mathscr{H} \otimes \mathbb{C}, B)$ el grupo de operadores lineales biyectivos de $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$ que preservan B. Denotamos por $\varrho_{\mathbb{C}} : G \longrightarrow \mathrm{U}(\mathscr{H} \otimes \mathbb{C}, B)$ la complejificación de ϱ, que es una representación lineal de G en el espacio $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$. Identificamos $\mathscr{H}$ con $\mathscr{H} \otimes 1 \subset \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$ y denotamos por Re, Im a los mapeos $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathscr{H}$ que mandan $x + iy$ a x y y, respectivamente, para $x, y \in \mathscr{H}$.

Supongamos que $\varrho_{\mathbb{C}}$ no es irreducible. Entonces existe un subespacio complejo G-invariante, cerrado y no trivial en $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$. La siguiente proposición es cierta para cualquier subespacio con tales propiedades.

Proposición 4.1. *Sea $W \subset \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$ un subespacio propio cerrado, no cero y G-invariante.*

(1) Las restricciones de Re e Im a W son inyectivas.

(2) La dimensión de W es infinita.

(3) La restricción de B a W es fuertemente no degenerada.

Demostración. Si la restricción de Im a W no es inyectiva, entonces $W \cap \mathscr{H}$ es un subespacio cerrado, no trivial y G-invariante de $\mathscr{H}$, por lo cual debe ser $\mathscr{H}$ porque ϱ es irreducible. Luego, $\mathscr{H} \subset W$ y ya que W es subespacio complejo, entonces $W = \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$, pero esto contradice que W es un espacio propio. La prueba es análoga para Re.

Si la dimensión de W es finita, $Re(W)$ y $Im(W)$ son subespacios de dimensión finita G-invariantes de $\mathscr{H}$, y por lo tanto ambos son iguales a $\{0\}$. Esto implica que $W = \{0\}$, lo que contradice que W es no trivial. Por lo tanto, W es de dimensión infinita.

Sea N_W el radical de la restricción de B a W. Se cumple que N_W es un subespacio isotrópico y por lo tanto de dimensión finita porque B es de índice finito. Como también es G-invariante, debe ser igual a $\{0\}$. Por ello, B restringido a W es no degenerada. El hecho de que la restricción es fuertemente no degenerada se sigue de la Proposición 2.8 en [8]. Es importante notar que los resultados en [8] están dados para el caso real, pero también se satisfacen en el caso complejo. □

El siguiente resultado es similar al Lema 3.8. La prueba es esencialmente la misma, sólo hay que usar de manera adicional la Proposición 4.1.

Proposición 4.2. *Ocurre uno de los dos casos siguientes:*

(1) Existe una descomposición ortogonal G-invariante en subespacios cerrados $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C} = V \oplus W$ donde B restringida a W es definida negativa, B restringida a V tiene signatura $(2, \infty)$ y la acción de G en V es irreducible.

(2) Existe una descomposición ortogonal G-invariante en subespacios cerrados $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C} = V_1 \oplus V_2 \oplus W$ donde B restringida a W es definida negativa, B restringida a cada W_i es de signatura $(1, \infty)$ y la acción de G en cada W_i es irreducible.

4.2. Argumento de Cartan

El objetivo de esta sección es dar la prueba del siguiente resultado.

Proposición 4.3. *Sea* $\alpha : \mathrm{PO}(1,n)^\circ \longrightarrow \mathrm{U}(1,\infty)$ *una representación irreducible. Entonces* α *es la complejificación de una representación irreducible* $\mathrm{PO}(1,n)^\circ \longrightarrow \mathrm{O}(1,\infty)$.

En primer lugar se presentarán algunos conceptos auxiliares que serán requeridos para dicha prueba, así como algunos resultados de interés por sí mismos. A lo largo de esta sección consideramos $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo de dimensión κ, la proyección natural $\mathbb{P} : (\mathbb{C} \oplus \mathscr{H}) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus \mathscr{H})$ de $(\mathbb{C} \oplus \mathscr{H}) \setminus \{0\}$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus \mathscr{H})$ y el modelo proyectivo del espacio hiperbólico complejo $\mathbb{H}^\kappa_{\mathbb{C}}$.

Definición 4.4. Sea X un conjunto no vacío. Una función $\gamma : X^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es un 2-*cociclo* si su *cofrontera* $d\gamma : X^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ se anula, donde $d\gamma$ se define mediante

$$d\gamma\left(x_0, x_1, x_2, x_3\right) = \gamma\left(x_1, x_2, x_3\right) - \gamma\left(x_0, x_2, x_3\right) + \gamma\left(x_0, x_1, x_3\right) - \gamma\left(x_0, x_1, x_2\right).$$

Además, decimos que un 2-cociclo es *alternante* si para cualquier permutación σ de $\{1, 2, 3\}$ se cumple

$$\gamma\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}\right) = \mathrm{sign}\left(\sigma\right) \gamma\left(x_1, x_2, x_3\right)$$

para cualesquiera $x_1, x_2, x_3 \in X$. Es importante notar que trivialmente el mapeo $\gamma \equiv 0$ es un 2-cociclo alternante. A continuación presentamos un concepto debido a Cartan [9]. Para obtenerlo, consideremos $[x], [y], [z] \in \mathbb{H}^\kappa_{\mathbb{C}}$ y notemos que

$$B(x, x), B(y, y), B(z, z) > 0$$

para cualesquiera representantes de $[x], [y]$ y $[z]$, respectivamente. Luego, definimos el *triple producto* $\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle : (\mathbb{C} \oplus \mathscr{H})^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$\langle x, y, z\rangle = B(x, y)B(y, z)B(z, x)$$

para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{C} \oplus \mathscr{H}$. En particular, si $[x], [y], [z] \in \mathbb{H}^\kappa_{\mathbb{C}}$, entonces $\langle x, y, z\rangle \neq 0$, ya que en caso contrario alguno de los factores sería igual a 0, y ello implicaría que existen dos vectores positivos ortogonales, lo cual contradice que B es de signatura $(1,\infty)$. También observamos que el triple producto se escala por un factor positivo cuando multiplicamos cualquier vector por un escalar complejo no cero: si $x, y, z \in \mathbb{C} \oplus \mathscr{H}$ y $\lambda \in \mathbb{C}^*$, entonces

$$\langle\lambda x, y, z\rangle = B(\lambda x, y)B(y, z)B(z, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}B(x, y)B(y, z)B(z, x) = |\lambda|^2\langle x, y, z\rangle. \tag{4.2}$$

Ahora, en virtud de (4.2), podemos suponer que x, y, z representan a $[x], [y], [z] \in \mathbb{H}^\kappa_{\mathbb{C}}$, respectivamente, y satisfacen que $\langle x, y, z\rangle \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Veamos que $\langle x, y, z\rangle$ tiene parte real positiva. Notemos que para cualquier $g \in \mathrm{PU}(1,\kappa)$ se satisface que

$$\langle gx, gy, gz\rangle = \langle x, y, z\rangle, \tag{4.3}$$

porque B es $\mathrm{PU}(1,\kappa)$-equivariante. Luego, como $\mathrm{PU}(1,\kappa)$ actúa transitivamente en $\mathbb{H}^\kappa_{\mathbb{C}}$, por (4.3) nos basta estudiar cuando $x = 1+\overline{0}$, $y = y_1 + y'$ y $z = z_1 + z'$, con $1, y_1, z_1 \in \mathbb{C}$ y $\overline{0}, y', z' \in \mathscr{H}$. En primer lugar obtenemos que

$$\langle x,y,z\rangle = \left\langle 1+\overline{0}, y_1+y', z_1+z'\right\rangle = \overline{y_1} z_1 B\left(y_1+y', z_1+z'\right) = \overline{y_1} z_1 B(y,z). \tag{4.4}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $y_1,\ z_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, ya que y,z son B–positivos y por ello $y_1 \neq 0$ y $z_1 \neq 0$. Así, a partir de (4.4), salvo un escalar positivo, nos basta estudiar

$$Re\,(B(y,z)) = Re\left(y_1\overline{z}_1 - \langle y', z'\rangle\right).$$

Luego, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos lo siguiente

$$Re\,(B(y,z)) = y_1 z_1 - Re\langle y', z'\rangle \geq y_1 z_1 - \left\|y'\right\|\ \left\|z'\right\| > y_1 z_1 - y_1 z_1 = 0, \tag{4.5}$$

donde la última desigualdad se obtiene porque $y_1 > \|y'\|$ y $z > \|z'\|$ ya que y y z son B–positivos. Por lo tanto $\langle x,y,z\rangle$ tiene parte real positiva cuando $[x],[y],[z] \in \mathbb{H}^\kappa_{\mathbb{C}}$. En virtud de esto último, tenemos que el argumento del triple producto se puede representar por un número en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Definición 4.5. La función $c : \mathbb{H}^\kappa_{\mathbb{C}} \times \mathbb{H}^\kappa_{\mathbb{C}} \times \mathbb{H}^\kappa_{\mathbb{C}} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dada por

$$c\,([x],[y],[z]) = \arg\langle x_1, y_1, z_1\rangle,$$

donde x_1, y_1 y z_1 son representantes de $[x],[y]$ y $[z]$, respectivamente, se llama *argumento de Cartan.*

Lema 4.6. *El argumento de Cartan es un* 2*-cociclo alternante.*

Demostración. Como la forma B es hermitiana, se obtiene de inmediato que el argumento de Cartan es alternante. En primer lugar veamos que el triple producto es un 2-cociclo multiplicativo. Para ello observamos que si $[x_0],[x_1],[x_2],[x_3] \in \mathbb{H}^\kappa_{\mathbb{C}}$, entonces, salvo un escalar positivo,

$$\begin{aligned} d\,(\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle)\,(x_0,x_1,x_2,x_3) &= \frac{B\,(x_1,x_2)\,B\,(x_2,x_3)}{B\,(x_1,x_3)} \cdot \frac{B\,(x_0,x_3)}{B\,(x_0,x_2)\,B\,(x_2,x_3)} \\ &\quad \frac{B\,(x_0,x_1)\,B\,(x_1,x_3)}{B\,(x_0,x_3)} \cdot \frac{B\,(x_0,x_2)}{B\,(x_0,x_1)\,B\,(x_1,x_2)} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{4.6}$$

A continuación, para mostrar que el argumento de Cartan c es un cociclo, primero consideremos $[x],[y],[z] \in \mathbb{H}^\kappa_{\mathbb{C}}$ y notemos que

$$e^{i\,c([x],[y],[z])} = \frac{\langle x,y,z\rangle}{|\langle x,y,z\rangle|},$$

por lo cual

$$e^{i\, dc([x],[y],[z],[t])} = 1. \tag{4.7}$$

donde $[t] \in \mathbb{H}^{\kappa}_{\mathbb{C}}$ y usamos (4.6). Luego, la igualdad (4.7) implica que dc toma valores en $2\pi\mathbb{Z}$. Ya que la expresión $dc([x],[y],[z],[t])$ tiene 4 términos todos menores a $\frac{\pi}{2}$ en valor absoluto, entonces $|dc([x],[y],[z],[t])| < 2\pi$, y por lo tanto $dc = 0$. Esto prueba lo deseado. □

Definición 4.7. Decimos que un subespacio real V de $\mathbb{C} \oplus \mathscr{H}$ es *totalmente real* si es cerrado y $B(z,w) \in \mathbb{R}$ para cualesquiera $z, w \in V$. También, $U \subset \mathbb{H}^{\kappa}_{\mathbb{C}}$ es un subespacio totalmente real de dimensión r si existe un subespacio totalmente real $V_U \subset \mathbb{C} \oplus \mathscr{H}$ de dimensión $r+1$ tal que $\mathbb{P}(V_U) = U$.

A continuación presentamos algunos resultados acerca de esta clase de subespacios.

Lema 4.8. *Sea V un subespacio real de $\mathbb{C} \oplus \mathscr{H}$. Si V es un subespacio totalmente real de $\mathbb{C} \oplus \mathscr{H}$, entonces se cumple alguno de los siguientes casos:*

(1) o bien, $V \cap J(V) = \{0\}$, donde $J : \mathbb{C} \oplus \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C} \oplus \mathscr{H}$ es la multiplicación por el escalar i;

(2) o bien, existe $w \in V$ vector isotrópico tal que $V = \mathbb{C}w \oplus U$, donde U es un subespacio contenido en $w^{\perp}$, la restricción de B a U es definida negativa y $U \cap J(U) = \{0\}$.

Demostración. Supongamos que no ocurre (1). Entonces $V \cap J(V) \neq \{0\}$. Tomemos $w \in V \cap J(V)$ con $w \neq 0$. Luego, $\mathbb{C}w \subset V$ pues $iw \in V$. A continuación, notamos que

$$B(iw, w) = iB(w,w) \in \mathbb{R},$$

y como por hipótesis también se tiene que $B(w,w) \in \mathbb{R}$, entonces $B(w,w) = 0$.

Ahora, consideremos $v \in V$. Entonces, por las hipótesis, $B(w,v), B(iw,v) \in \mathbb{R}$, de donde $B(w,v) = 0$, esto es, $v \in w^{\perp}$. Esto último implica que $V \cap J(V) = \mathbb{C}w$ ya que en caso contrario tendríamos dos líneas ortogonales isotrópicas en $\mathbb{C} \oplus \mathscr{H}$.

A continuación, observamos que, sin pérdida de generalidad, podemos escribir $w = e_1 + e_2$ con $B(e_1, e_2) = 0$, $B(e_1, e_1) = \theta$, $B(e_2, e_2) = -\theta$ para algún $\theta > 0$, y a partir de esto obtenemos una descomposición de $\mathbb{C} \oplus \mathscr{H}$ en suma directa ortogonal dada por

$$\mathbb{C} \oplus \mathscr{H} = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus W,$$

donde W es un subespacio definido negativo. Definimos $U = V \cap W$. Veamos que $V = \mathbb{C}w \oplus U$. Tomemos $v \in V$ y escribamos $v = \lambda e_1 + \mu e_2 + w'$, con $w' \in W$. Entonces

$$B\left(v - w', w\right) = B\left(\lambda e_1 + \mu e_2, w\right) = (\lambda - \mu)\,\theta,$$

pero $B(v - w', w) = -B(w', w)$ y w' es ortogonal a w, por lo cual se tiene que $\lambda - \mu = 0$, esto es,

$$v = \lambda w + w'.$$

Obtenemos que $\mathbb{C}w \cap U = \{0\}$ porque si $v \in (\mathbb{C}w \cap U) \setminus \{0\}$, entonces $B(v,v) = 0$ y $B(v,v) < 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $V = \mathbb{C}w \oplus U$. Finalmente, $U \cap J(U) = \{0\}$ porque en caso contrario, repitiendo los argumentos del inicio, obtenemos otro vector isotrópico ortogonal a w, lo cual contradice que B es de índice 1. Esto termina la prueba. $\square$

Corolario 4.9. *Sea V un subespacio totalmente real de $\mathbb{C} \oplus \mathscr{H}$. Si existe $v \in V$ tal que $B(v,v) > 0$, entonces tenemos una descomposición $V = \mathbb{R}v \oplus U$, con U ortogonal a v y tal que $U \cap J(U) = \{0\}$.*

Demostración. Ya que existe $v \in V$ tal que $B(v,v) > 0$ estamos en el caso (1) del Lema 4.8 y el resultado es inmediato. $\square$

Lema 4.10. *Sea V un subespacio totalmente real de $\mathbb{C} \oplus \mathscr{H}$ y supongamos que existe $u_0 \in V$ tal que $B(u_0, u_0) > 0$.*

(1) Si $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}$ denota la proyección natural de V en su espacio proyectivo real, entonces $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(V) = \mathbb{P}(V)$.

(2) Si V_1 es otro subespacio totalmente real tal que $\mathbb{P}(V_1) = \mathbb{P}(V)$, entonces existe $\lambda_0 \in S^1$ tal que $V_1 = \lambda_0 V$.

Demostración. (1) Ya que existe $u_0 \in V$, se cumple el inciso (1) del Lema 4.8, es decir, $V \cap J(V) = \{0\}$. Ahora, sean $u, v \in V \setminus \{0\}$. Supongamos que $[u] = [v] \in \mathbb{P}(V)$, esto es, supongamos que existe $a + ib \in \mathbb{C}^*$ tal que $u = (a+ib)v$. Si $b \neq 0$, entonces $iv \in V \setminus \{0\}$, lo cual contradice que $V \cap J(V) = \{0\}$. Por lo tanto, $b = 0$ y $[u] = [v] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(V)$. Como la otra contención es inmediata, entonces se tiene la igualdad deseada.

(2) Por la hipótesis, podemos escribir $V = \mathbb{R}u_0 \oplus V'$, donde $V' \subset u_0^{\perp}$. Ya que $B(u_0, u_0) > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualesquiera w, w' en la bola abierta $B_\varepsilon(0) \subset V'$ se tiene que $B(u_0 + w, u_0 + w') > 0$.

Vemos que dados $v, v' \in V$, existen $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}^*$ y $v_1, v_1' \in V_1$ tales que $v = \lambda v_1$ y $v' = \lambda' v_1'$. Luego, $B(v, v') = \lambda \overline{\lambda'} B(v_1, v_1')$. Ahora, si $v = u_0$ y $v' = u_0 + w$, entonces $\lambda\overline{\lambda'} \in \mathbb{R}$, por lo cual $\arg(\lambda) = \pm \arg(\lambda')$. A partir de lo anterior obtenemos que para cualquier $w \in B_\varepsilon(0)$ se tiene que $u_0 + w \in \lambda_0 V_1$ y, como $u_0 \in \lambda_0 V_1$, entonces $w \in \lambda_0 V_1$ (aquí denotamos $\lambda = \lambda_0$ el escalar asociado a u_0). Por lo tanto, $V \subset \lambda_0 V_1$. De manera análoga obtenemos que existe $\mu \in \mathbb{C}^*$ tal que $V_1 \subset \mu V$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que λ_0 y μ tienen norma 1. Notemos que existe $\hat{v} \in V$ tal que $u_0 = \lambda_0 \mu \hat{v}$, por lo cual $\lambda_0 \mu B(\hat{v}, \hat{v}) = B(u_0, \hat{v}) \in \mathbb{R}^*$. Esto implica que $\lambda_0\mu \in \mathbb{R}$,de donde $\lambda_0 = \pm \mu^{-1}$. En conclusión, $V = \lambda_0 V_1$ con $\lambda_0 \in S^1$. $\square$

Observación 4.11. En el Lema 4.10 se obtiene que $\lambda_0 \in S^1$ es único salvo un signo. Para verlo, notamos que si $u_0 = \lambda v_1 = \lambda' v_1'$, con $\lambda, \lambda' \in S^1$, como $B|_{V_1 \times V_1}$ es no degenerada, existe $v_1'' \in V_1$ tal que $B(v_1, v_1'') \neq 0$. Luego, se tiene que

$$\lambda' B\left(v_1', v_1''\right) = B\left(u_0, v_1''\right) = \lambda B\left(v_1, v_1''\right) \neq 0,$$

y como $B(v_1', v_1''), B(v_1, v_1'') \in \mathbb{R}$, se sigue el resultado deseado.

Antes de continuar, introducimos algunos conceptos adicionales que permitirán entender la motivación de algunas construcciones relacionadas con el argumento de Cartan. En primer lugar, dado un conjunto $X \neq \varnothing$, un *núcleo de tipo positivo* complejo es una función $\Phi : X^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in X$ y cualesquiera $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ se satisface que $\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \Phi(x_j, x_k) \geq 0$. Para el caso real se agrega la hipótesis de que Φ sea simétrica. Si consideremos un conjunto X, $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert complejo y $u : X \longrightarrow H$ una función, entonces $\tau_u : X^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\tau_u(x, y) = \langle u(x), u(y) \rangle$ es un núcleo de tipo positivo complejo. Resulta que, esencialmente, cualquier núcleo de tipo positivo está dado como κ_u. Esto último hecho es conocido como *construcción GNS* (en honor a Gelfand, Naĭmark y Segal): si $\tau : X^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ es un núcleo de tipo positivo complejo, existen un espacio de Hilbert complejo $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ y una función $u : X \longrightarrow H$ tales que $\tau_u = \tau$ y $\operatorname{span}\{u(x)\}$ es denso en H. Para mayor información acerca de núcleos de tipo positivo y la construcción GNS se puede consultar [2, Apéndice C].

Para los fines del presente trabajo, también estamos interesados en una generalización de los núcleos de tipo positivo: dado un conjunto $X \neq \varnothing$, un *núcleo de tipo hiperbólico real* es una función simétrica $\beta : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que es igual a la constante 1 sobre la diagonal y para cualquier $x_0 \in X$ se tiene que la función definida por

$$(x, y) \mapsto \beta(x, x_0)\, \beta(x_0, y) - \beta(x, y)$$

es un núcleo de tipo positivo para toda $x_0 \in X$. En la Proposición 1.1 de [30] se exhibe que la condición anterior es equivalente a la existencia de un mapeo $f : X \longrightarrow \mathbb{H}^{\kappa}_{\mathbb{R}}$, para algún cardinal κ, tal que $\beta(x, y) = \cosh(d(f(x), f(y)))$. Para el caso complejo definimos un *núcleo de tipo hiperbólico complejo* sobre un conjunto no vacío X como un par (β, γ), donde $\beta : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\gamma : X^3 \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tales que β es la constante 1 sobre la diagonal de X^2, γ es un 2–cociclo alternante y el mapeo

$$(x, y) \mapsto \beta(x, x_0)\, \beta(x_0, y) - e^{i\gamma(x_0, x, y)} \beta(x, y)$$

es un núcleo de tipo positivo complejo para toda $x_0 \in X$. Como $\gamma \equiv 0$ es un cociclo alternante, un par $(\beta, 0)$ es un núcleo de tipo hiperbólico complejo si y sólo si β es un núcleo de tipo hiperbólico real. Los resultados anteriores y más propiedades acerca de núcleos de tipo hiperbólico se pueden consultar en [31] y [30].

A continuación usaremos el argumento de Cartan c y los conceptos anteriores para caracterizar los conjuntos contenidos en un subespacio totalmente real. Este resultado aparece como Lema 2.6 de [30].

Lema 4.12. *Sea X un subconjunto de $\mathbb{H}^{\kappa}_{\mathbb{C}}$. El argumento de Cartan se anula en X^3 si y sólo si X está contenido en un subespacio totalmente real de $\mathbb{H}^{\kappa}_{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Notemos que la segunda implicación es inmediata porque el argumento de un número real es cero. Para la primera implicación supongamos que el argumento de Cartan c se anula en X^3 y consideremos $H_{\mathbb{C}}(X) \subset \mathbb{H}^{\kappa}_{\mathbb{C}}$ la intersección de todos los subespacios hiperbólicos de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{\kappa}$ que contienen a X. Tenemos que el par (β, c) es un núcleo de tipo hiperbólico complejo, donde $\beta : X^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ está dada por $\beta(x,y) = \cosh\left(d(x,y)\right)$ (ver [30, Proposición 1.9]). Pero como $c = 0$, entonces β es un núcleo hiperbólico real.

Por la construcción GNS, existen un espacio de Hilbert complejo $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ y un mapeo $h : X \longrightarrow H$ tal que

$$\langle h(x), h(y)\rangle = \beta\left(x, x_0\right)\beta\left(y, x_0\right) - \beta(x,y)$$

para un $x_0 \in X$ fijo y cualesquiera $x, y \in X$. Dotamos al espacio $\mathbb{C} \oplus H$ con la forma hermitiana de Minkowski B y definimos $f : X \longrightarrow \mathbb{C} \oplus H$ por $f(x) = \beta\left(x, x_0\right) \oplus h(x)$. Entonces para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que

$$B\left(f(x), f(y)\right) = \beta(x,y) = \cosh\left(d\left(f(x), f(y)\right)\right).$$

Esto nos dice que la forma B es real sobre la imagen de f, entonces X está contenido en un espacio hiperbólico complejo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{\kappa'}$ totalmente real. Luego, por la unicidad (salvo isometría holomorfa) del espacio hiperbólico complejo que contiene a un conjunto, obtenemos que $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{\kappa'}$ es isométrico a $H_{\mathbb{C}}(X)$, esto es, $H_{\mathbb{C}}(X)$ es un espacio hiperbólico complejo y es un subespacio totalmente real de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{\kappa}$ que contiene a X. $\square$

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [30].

Lema 4.13 (Lema 4.2 de [30])**.** *Sea $3 \leq n \leq \infty$. Si γ es un cociclo alternante en $\left(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n}\right)^3$ que es $\mathrm{PO}(1,n)^{\circ}$-invariante por la acción diagonal, entonces γ se anula en $\left(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n}\right)^3$.* $\square$

Finalmente, para concluir esta sección, presentamos la prueba de la Proposición 4.3.

Demostración [Proposición 4.3]. Consideremos W el espacio de Hilbert complejo subyacente a la representación α, y B la forma hermitiana de signatura $(1,\infty)$ en W. Denotemos por $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{\infty}$ el espacio hiperbólico de dimensión infinita asociado, es decir,

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{\infty} = \left\{ [x] \in \mathbb{P}(W) \mid\ B(x,x) > 0\right\}.$$

Consideremos el argumento de Cartan $c : \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{\infty} \times \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{\infty} \times \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{\infty} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Por definición, c es invariante bajo la acción diagonal del grupo $\mathrm{PU}(1,\infty)$ y, por el Lema 4.6, también es un 2-cociclo alternante. Ahora, la representación α induce una acción isométrica continua de $\mathrm{PO}(1,n)^{\circ}$ en $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n}$ que también denotaremos por α. Sea $f : \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n} \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{\infty}$ un mapeo α-equivariante continuo, por ejemplo, consideremos la siguiente construcción. Sea $e_0 = (1, 0\ldots, 0) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n}$. Como el estabilizador $\mathrm{Stab}(e_0)$ en $\mathrm{PO}(1,n)^{\circ}$ de e_0 es compacto y actúa por isometrías en $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{\infty}$, por el Teorema de punto fijo de Cartan existe $\zeta \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{\infty}$ que es fijado por $\mathrm{Stab}(e_0)$. Definimos $f(e_0) = \zeta$ y, ya que para todo $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n}$ existe $g_x \in \mathrm{PO}(1,n)^{\circ}$ tal que $g_x(e_0) = x$, extendemos mediante la acción de α (ver la Proposición 2.9 para un argumento similar), es decir,

$$f(x) = f\left(g_x\left(e_0\right)\right) = \alpha\left(g_x\right)(\zeta).$$

Notemos que el Lema 4.13 implica que

$$c\left(f(x), f(y), f(z)\right) = 0$$

para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$. Si denotamos $X = f\left(\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}\right)$, a partir del Lema 4.12 se obtiene que existe un subespacio totalmente real V de W tal que $X \subset \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{H}^\infty_{\mathbb{C}}$. Notemos que por definición, X es $\mathrm{PO}(1,n)^\circ$-invariante. Además, existe $x_0 \in V$ tal que $B\left(x_0, x_0\right) > 0$ y $x = [x_0] \in X$. Consideremos $\mathscr{N}$ la intersección de todos los subespacios totalmente reales de $\mathbb{H}^\infty_{\mathbb{C}}$ que contienen a la imagen de f, es decir,

$$\mathscr{N} = \bigcap_{\substack{W' \subset W \\ \text{totalmente real,} \\ X \subset \mathbb{P}(W') \subset \mathbb{H}^\infty_{\mathbb{C}}}} \mathbb{P}\left(W'\right).$$

También, sea

$$U = \bigcap_{\substack{W' \subset W \\ \text{totalmente real,} \\ x_0 \in W',\, X \subset \mathbb{P}(W') \subset \mathbb{H}^\infty_{\mathbb{C}}}} W'.$$

Afirmación. Se satisface que $\mathscr{N} = \mathbb{P}(U)$.

La contención $\mathbb{P}(U) \subset \mathscr{N}$ es inmediata porque U es un subespacio totalmente real ya que es un subespacio cerrado y para cualesquiera $v, v' \in U$ se tiene que $B\left(v, v'\right) \in \mathbb{R}$ y, por definición, contiene a X. Por otro lado, la contención $\mathscr{N} \subset \mathbb{P}(U)$ se obtiene como sigue. Consideremos subespacios totalmente reales $W', W'' \subset W$ tales que $X \subset \mathbb{P}\left(W'\right) \subset \mathbb{H}^\infty_{\mathbb{C}}$ y $X \subset \mathbb{P}\left(W''\right) \subset \mathbb{H}^\infty_{\mathbb{C}}$. Veamos que $x_0 \in W' \cap W''$. Ya que $[x_0] \in \mathbb{P}\left(W'\right) \cap \mathbb{P}\left(W''\right)$, existen $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{C}^*$, $w' \in W'$ y $w'' \in W''$ tales que $x_0 = \lambda' w' = \lambda'' w''$. Tenemos que $w' = \frac{\lambda''}{\lambda'} w''$, pero como $B\left(w', w''\right) \in \mathbb{R}$ porque W'' es totalmente real, y de hecho $B\left(w'', w''\right) > 0$ porque $[w''] \in \mathbb{H}^\infty_{\mathbb{C}}$, entonces $\frac{\lambda''}{\lambda'} \in \mathbb{R}$. Con un argumento similar se muestra que debe ocurrir $\lambda' \in \mathbb{R}$ y por lo tanto $\lambda'' \in \mathbb{R}$. Esto prueba que $x_0 \in W' \cap W''$ y por lo tanto se tiene la otra contención. En conclusión, es cierta la Afirmación.

La Afirmación implica que $\mathscr{N}$ es la imagen de un subespacio totalmente real U. Observamos que $\mathscr{N}$ es invariante bajo la acción de $\mathrm{PO}(1,n)^\circ$. Veamos que U también lo es. Notamos que si $g \in \mathrm{PO}(1,n)^\circ$, entonces $g\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(U)$. Por el Lema 4.10, existe $\lambda_g \in S^1$ tal que $gU = \lambda_g U$. Definimos $G \longrightarrow S^1$ dado por $g \mapsto \lambda_g^2$, vemos que es un morfismo porque

$$(gh) \cdot U = g\left(\lambda_h U\right) = \lambda_h \lambda_g U,$$

y está bien definido porque $g x_0 = \lambda_g x_0'$, con $x_0 \in U$ tal que $B\left(x_0, x_0\right) > 0$, y entonces

$$\left(B\left(g x_0, x_0'\right)\right)^2 = \lambda_g^2 \left(B\left(x_0', x_0'\right)\right)^2.$$

Lo anterior implica que el morfismo es continuo y, por lo tanto, debe ser trivial. En conclusión, $gU = U$. Por lo tanto, U es $\mathrm{PO}(1,n)^\circ$-invariante.

Observemos que la restricción de B a U es fuertemente no degenerada de signatura $(1,\infty)$. En primer lugar notamos que si $v_1, v_2 \in U$, entonces para cualesquiera $v, v' \in U$ se verifica que

$$B\left(v_1 + iv, v_2 + iv'\right) = B\left(v_1, v_2\right) - iB\left(v_1, v'\right) + iB\left(v, v_2\right) + B\left(v, v'\right),$$

por lo cual B es hermitiana en U. Luego, como $x_0 \in U$ y $B\left(x_0, x_0\right) > 0$, por el Corolario 4.9, existe una descomposición ortogonal $U = \mathbb{R}x \oplus U'$ tal que $U' \cap J\left(U'\right) = \{0\}$, y como B es de signatura $(1,\infty)$ en W, U' debe ser definido negativo, lo cual prueba lo deseado.

Tenemos que, por el Lema 4.8, $U \cap J(U) = \{0\}$. Consideremos la inclusión $j : U \oplus J(U) \longrightarrow W$ y mostremos que $j\left(U \oplus J(U)\right)$ es cerrado en W para obtener que $W = U \oplus J(U)$ por la irreductibilidad de α. Además, ello implica que la acción de $\mathrm{PO}(1,n)^\circ$ en U es irreducible. Ya que B es de signatura $(1,\infty)$ en W, podemos tomar una descomposición $W = \mathbb{C} \oplus W_1$, donde $B|_{W_1 \times W_1}$ es definida negativa. Con un argumento análogo, obtenemos que existe una descomposición $U = \mathbb{R} \oplus V_1$, donde $B|_{V_1 \times V_1}$ es definida negativa. Notemos que V_1 es un subespacio real de U. Así, $j\left(U \oplus J(U)\right) = \mathbb{C} \oplus \left(V_1 + J\left(V_1\right)\right)$. Para terminar, únicamente se debe mostrar que $V_1 + J\left(V_1\right)$ es cerrado. Con un argumento similar al de la prueba del Lema 4.8, obtenemos que V_1 es ortogonal a $J\left(V_1\right)$, por lo cual podemos escribir $W_1 = V_1 \oplus J\left(V_1\right) \oplus W_2$, donde W_2 es el complemento ortogonal en W_1 de $V_1 \oplus J\left(V_1\right)$. Observamos que V_1, $J\left(V_1\right)$ y W_2 son espacios de Hilbert reales y W_2 se expresa como su suma directa, de donde se sigue que en particular $V_1 \oplus J\left(V_1\right)$ es un subespacio cerrado. Esto concluye la prueba. □

4.3. Prueba del Teorema A

Procedemos a la prueba del resultado principal. Consideremos una representación irreducible

$$\varrho : \mathrm{PO}(1,n)^\circ \longrightarrow \mathrm{O}(2,\infty)$$

con $n \geq 3$. Como se hizo en la sección anterior, denotemos por $\mathscr{H}$ al espacio de Hilbert y por B a la forma bilineal subyacentes a la representación ϱ. Fijemos desde ahora un subgrupo compacto maximal

$$K \subset \mathrm{PO}(1,n)^\circ.$$

Observemos que K es isomorfo al grupo $\mathrm{SO}(n)$. Para continuar, revisamos el siguiente resultado de [31].

Proposición 4.14. *Existe un subespacio $P \subset \mathscr{H}$ de dimensión 2 que es fijado puntualmente por K.*

Demostración. Consideremos el espacio $X_2(\mathscr{H})$ de subespacios de $\mathscr{H}$ de dimensión 2 en los cuales la restricción de B es definida positiva. Se cumple que $X_2(\mathscr{H})$ admite una estructura de espacio $\mathrm{CAT}(0)$ completo en el cual el grupo $\mathrm{O}(\mathscr{H}, B)$ actúa por isometrías (ver [14] para una prueba de estos resultados); luego, por el Teorema de Cartan se obtiene que existe $P \in X_2(\mathscr{H})$ que es fijado por la acción de K. Ahora, la acción de K en P está dada, salvo conjugación, por un homomorfismo $K \longrightarrow \mathrm{O}(2)$. Se sigue que tal morfismo es trivial, por lo cual $P \subset \mathscr{H}^K$. Por lo tanto, K fija puntualmente a P. □

La siguiente proposición es demostrada en [31, Prop. 5.4] y se presenta porque será referida varias veces. La versión original incluye una afirmación para el caso de representaciones reales que no utilizaremos aquí.

Proposición 4.15. *Sea (G, K) un par de Gelfand. Consideremos π una representación $\mathbb{C}$-lineal en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ que preserva una forma hermitiana continua y fuertemente no degenerada de índice finito. Si π es irreducible, entonces el espacio $\mathscr{H}^K$ de vectores K-invariantes tiene dimensión compleja a lo más* 1*.*

Se refiere al lector a la Sección 1.3 para consultar la definición de par de Gelfand y la prueba de que $(\mathrm{PO}(1,n)^\circ, K)$ es un par de Gelfand. Notemos que la versión unitaria sobre espacios de Hilbert es un resultado clásico, mientras que el trabajo de N. Monod y P. Py generalizó el resultado al caso de formas fuertemente no degeneradas de índice p (con $p \geq 1$).

En virtud de las dos proposiciones anteriores se obtiene que la complejificación $\varrho_{\mathbb{C}}$ de ϱ no es irreducible. En efecto, primero notemos que la dimensión real del espacio de puntos K-fijos en $\mathscr{H}$ es igual a la dimensión compleja de puntos K-fijos en $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$:

$$\dim_{\mathbb{R}}\left(\mathscr{H}^K\right) = \dim_{\mathbb{C}}\left((\mathscr{H} \otimes \mathbb{C})^K\right).$$

Si $\varrho_{\mathbb{C}}$ fuese irreducible, el lado derecho debe ser menor o igual a 1 por la Proposición 4.15, pero el lado izquierdo tiene dimensión mayor o igual a 2 por la Proposición 4.14. Lo anterior es un absurdo y por lo tanto $\varrho_{\mathbb{C}}$ no es irreducible.

Ahora, por la Proposición 4.2 obtenemos dos casos que analizamos de manera separada:

Caso (1). Supongamos que tenemos una descomposición $\mathrm{PO}(1,n)^\circ$-invariante

$$\mathscr{H} \otimes \mathbb{C} = V \oplus W$$

donde V es subespacio cerrado de signatura $(2, \infty)$ tal que la acción de $\mathrm{PO}(1,n)^\circ$ es irreducible y W es cerrado y definido negativo. Con un argumento similar al dado en la prueba de la Proposición 4.14 obtenemos que existe un subespacio complejo P de dimensión compleja 2 que es fijado por K.

Ahora estudiemos la acción de K en P. Ya que dicha acción preserva la restricción de B a P, ésta define un homomorfismo de K en el grupo unitario $\mathrm{U}(2)$ (bien definido salvo conjugación). De hecho, se tiene el siguiente resultado acerca de homomorfismos entre dichos grupos.

Proposición 4.16. *Sea $n \geq 3$. Cualquier homomorfismo continuo de $\mathrm{SO}(n)$ en $\mathrm{U}(2)$ es trivial.*

Demostración. Sea $\varphi : \mathrm{SO}(n) \longrightarrow \mathrm{U}(2)$ un homomorfismo continuo, entonces φ es suave. Ahora, consideremos el mapeo determinante $\det : \mathrm{U}(2) \longrightarrow \mathbb{S}^1$. Luego, la diferencial del mapeo composición $\det \circ \varphi$ en el elemento identidad Id es

$$D_{\mathrm{Id}}(\det \circ \varphi) : \mathfrak{so}(n) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Como $\mathrm{SO}(n)$ es simple, su álgebra de Lie es perfecta, esto es, si $z \in \mathfrak{so}(n)$ entonces z se puede escribir como una suma de conmutadores

$$z = \sum [x_j, y_j],$$

para algunos $x_j, y_j \in \mathfrak{so}(n)$. Ya que $D_{\mathrm{Id}}(\det \circ \varphi)$ es un morfismo de álgebras de Lie y $\mathbb{R}$ es un álgebra de Lie abeliana, obtenemos que $D_{\mathrm{Id}}(\det \circ \varphi)$ es el mapeo cero, y como $\mathrm{SO}(n)$ es conexo, se obtiene que $\det \circ \varphi$ es el mapeo constante 1. Esto implica que $\varphi(A) \in \mathrm{SU}(2)$, por lo cual podemos considerar que tenemos el mapeo $\varphi : \mathrm{SO}(n) \longrightarrow \mathrm{SU}(2)$.

Ahora, observemos que si $n \geq 5$, como $\mathrm{SO}(n)$ es simple y $\dim(\mathfrak{so}(n)) = \frac{n(n-1)}{2} > 3$, entonces el morfismo $D_{\mathrm{Id}}(\varphi)$ es cero, lo cual implica que φ es trivial por la conexidad de $\mathrm{SO}(n)$.

Para $n = 3$ notamos que, por la simplicidad de $\mathfrak{so}(3)$, $D_{\mathrm{Id}}(\varphi)$ es cero o bien es inyectiva. Si ocurre que $D_{\mathrm{Id}}(\varphi) = 0$, procedemos como en el caso anterior. Veamos que no puede suceder que $D_{\mathrm{Id}}(\varphi)$ sea inyectiva. Por contradicción, supongamos que $D_{\mathrm{Id}}(\varphi)$ es inyectiva, entonces es un isomorfismo porque son espacios de la misma dimensión. Luego, por el teorema de inversión local obtenemos que φ es un difeomorfismo local, y esto implica que φ es un mapeo cubriente. Ya que $\mathrm{SO}(3)$ es simple, se sigue que φ es un difeomorfismo, pero esto es una contradicción porque $\mathrm{SU}(2)$ es simplemente conexo pero $\mathrm{SO}(3)$ no lo es. En conclusión, φ es trivial.

Finalmente estudiamos el caso $n = 4$. Supongamos que φ no es trivial. Tenemos que existe un mapeo cubriente de dos hojas $\pi : \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(4)$ cuyo núcleo es generado por $(-\mathrm{Id}, -\mathrm{Id})$. Consideramos la composición

$$\varphi \circ \pi : \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SU}(2)$$

Veamos que las restricciones p_1 y p_2 a $\mathrm{SU}(2) \times \{\mathrm{Id}\}$ y $\{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{SU}(2)$, respectivamente, no pueden ser ambas no triviales, pues en caso contrario, obtenemos que $D_{\mathrm{Id}}(\varphi \circ \pi)| : \mathfrak{su}(2) \times \{0\} \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$ y $D_{\mathrm{Id}}(\varphi \circ \pi)| : \{0\} \times \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$ son isomorfismos, luego, para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$ existen únicos $(u, 0) \in \mathfrak{su}(2) \times \{0\}$ y $(0, v) \in \{0\} \times \mathfrak{su}(2)$ tales que $X = D_{\mathrm{Id}}(\varphi \circ \pi)(u, 0)$ y $Y = D_{\mathrm{Id}}(\varphi \circ \pi)(0, v)$, pero ello implica que

$$[X, Y] = [D_{\mathrm{Id}}(\varphi \circ \pi)(u, 0), D_{\mathrm{Id}}(\varphi \circ \pi)(0, v)] = D_{\mathrm{Id}}(\varphi \circ \pi)\left[(u, 0), (0, v)\right] = 0,$$

y esto significa que $\mathfrak{su}(2)$ es un álgebra abeliana, pero ello no ocurre. Así, al menos una de las dos proyecciones es trivial. Sin pérdida de generalidad supongamos que la segunda proyección es trivial. Entonces, existe $f : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SU}(2)$ tal que

$$\varphi \circ \pi = f \circ p_1.$$

Como f es un homomorfismo no trivial, entonces debe ser un isomorfismo. Por otro lado,

$$f(-\mathrm{Id}) = f \circ p_1(-\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}) = \varphi \circ \pi(-\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}) = \varphi(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id},$$

lo cual contradice que f es un isomorfismo. Por lo tanto, φ es trivial. Esto concluye la prueba. $\square$

En virtud de la Proposición anterior, obtenemos que K fija puntualmente a P (como en la Proposición 4.14) y por ello $\dim_{\mathbb{C}}\left(V^K\right)$ es mayor o igual que 2, pero esto contradice la Proposición 4.15 porque estamos suponiendo que la representación de $\mathrm{PO}(1,n)^{\circ}$ en V es irreducible. En conclusión, este caso no es posible.

Caso (2). Supongamos que tenemos una descomposición $\mathrm{PO}(1,n)^{\circ}$-invariante

$$\mathscr{H} \otimes \mathbb{C} = U_1 \oplus U_2 \oplus W,$$

donde U_1, U_2 son subespacios cerrados de signatura $(1,\infty)$ y la acción de $\mathrm{PO}(1,n)^{\circ}$ es irreducible en cada uno de ellos, y W es subespacio cerrado definido negativo.

Aplicamos la Proposición 4.3 a la representación de $\mathrm{PO}(1,n)^{\circ}$ en U_1. Esto nos da un subespacio totalmente real $V_1 \subset U_1$ tal que su complejificación es igual a U_1 y la restricción de B a U_1 es la extensión hermitiana de una forma fuertemente no degenerada en V_1 de signatura $(1,\infty)$.

Consideremos la proyección $p_1 : \mathscr{H} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow U_1$ que tiene núcleo $U_2 \oplus W$ y el mapeo $Re : U_1 \longrightarrow V_1$ que tiene núcleo $J(V_1)$. Sea $\pi = Re \circ p_1|_{\mathscr{H}}$, el cual es un mapeo lineal. Notemos que en caso de que $\pi = 0$, podemos cambiar Re por el mapeo $Im : U_1 \longrightarrow V_1$, pues si ambas composiciones fueran igual al mapeo cero, entonces $\mathscr{H} \subset U_2 \oplus W$, pero ello implica que $i\mathscr{H} \subset U_2 \oplus W$ y por lo tanto, como son subespacios complejos, $U_2 \oplus W = \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$, lo que no ocurre por hipótesis. Así, supongamos sin pérdida de generalidad que $\pi \neq 0$. Tenemos que π es inyectiva ya que $ker(\pi)$ es un subespacio propio, cerrado e invariante de $\mathscr{H}$ y, por la irreductibilidad de ϱ, $ker(\pi) = \{0\}$. Por la Proposición 4.14 existe P subespacio 2-dimensional de $\mathscr{H}$ que es fijado puntualmente por K. Luego, $\pi(P)$ está contenido en V_1^K y, por la inyectividad de π, $\dim_{\mathbb{R}}\left(V_1^K\right) \geq 2$, pero esto implica que $\dim_{\mathbb{C}}\left(U_1^K\right) \geq 2$. Finalmente, esto es una contradicción con la Proposición 4.15 porque la representación en U_1 es irreducible. Esto muestra que este caso tampoco ocurre.

Para concluir, lo anterior demuestra que no existen representaciones irreducibles de $\mathrm{PO}(1,n)^{\circ}$ en $\mathrm{O}(2,\infty)$. Esto termina la prueba del Teorema A.

4.4. Una aplicación del Teorema A

En la Sección 4.1 se usó la estrategia de considerar la complejificación de una representación irreducible de un grupo G en $\mathrm{O}(2,\infty) = \mathrm{O}(\mathscr{H}, B)$ para obtener, mediante la Proposición 4.2, una descomposición de $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$ en espacios G-invariantes (o bien, irreducibles respecto a la restricción de B, o bien, definidos negativos respecto a la restricción de B). En esta sección utilizamos esa misma idea para obtener un resultado análogo al Teorema A que es válido para ciertos grupos con la propiedad (T) de Kazhdan (con algunas condiciones adicionales). Se presenta el siguiente teorema porque su demostración es sencilla y usa ideas similares a las presentadas a lo largo de esta capítulo, aunque en el siguiente capítulo se prueba un resultado que lo mejora (ver Teorema B).

Teorema 4.17. *Sea* (G,K) *un par de Gelfand. Si* G *tiene la propiedad* (T) *de Kazhdan y cualquier homomorfismo continuo* $K \longrightarrow \mathrm{U}(2)$ *es trivial, entonces no existen representaciones irreducibles* $G \longrightarrow \mathrm{O}(2,\infty)$.

Demostración. Por contradicción. Supongamos que existe una representación irreducible $\varrho : G \longrightarrow \mathrm{O}(2,\infty)$, y consideremos su complejificación $\varrho_{\mathbb{C}} : G \longrightarrow \mathrm{U}(2,\infty)$.

Ahora, con un argumento análogo al dado en la Proposición 4.14 y usando el hecho de que cualquier morfismo $K \longrightarrow \mathrm{U}(2)$ es trivial, tenemos que existe un subespacio complejo V de $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$ de dimensión 2 que es fijado puntualmente por K. Luego, por la Proposición 4.15 se obtiene que $\varrho_{\mathbb{C}}$ no es irreducible.

A continuación usamos la Proposición 4.2. Vemos que el segundo caso no ocurre porque G tiene (T), pues si $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{U}(1,\infty)$ es una representación lineal, entonces G fija una línea definida positiva en el espacio de Hilbert subyacente, lo que contradice que α es irreducible.

Así, supongamos que $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C} = U \oplus W$ con U subespacio cerrado G-invariante tal que la restricción de B a U es de signatura $(2,\infty)$ y la acción es irreducible, y W es subespacio cerrado definido negativo. Tenemos que K fija puntualmente a un plano complejo $Z \subset U$, entonces la dimensión de U^K es mayor o igual 2, lo cual contradice que la acción de G en U es irreducible por la Proposición 4.15. $\square$

Ejemplo 4.18. Consideremos $G = \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ y $K = \mathrm{SO}(3)$. Tenemos que (G,K) es un par de Gelfand y por la Proposición 4.16, no hay homomorfismos no triviales de K en $\mathrm{U}(2)$, así que por el Teorema 4.17 no existen representaciones irreducibles de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ en $\mathrm{O}(2,\infty)$. Es importante notar que este hecho se puede deducir a partir de los resultados presentados en [16], pero la prueba presentada aquí es más sencilla.

5 Representaciones y pares de Gelfand

En este capítulo estamos interesados en obtener resultados análogos al Teorema A. En particular, uno de los objetivos es presentar la prueba del siguiente teorema.

Teorema B. Sea (G, K) un par de Gelfand. Si G tiene la propiedad (T) de Kazhdan y cualquier homomorfismo $K \longrightarrow \mathrm{O}(2)$ es trivial, entonces no existen representaciones continuas irreducibles $G \longrightarrow \mathrm{O}(2, \infty)$.

Notamos que dicho teorema es análogo al Teorema 4.17, sin embargo, se impone una condición menos restrictiva sobre los morfismos con dominio K. Para dar una prueba completa de este teorema, primero se presentan algunos resultados auxiliares acerca de subespacios invariantes bajo conjugación al considerar complejificaciones de representaciones irreducibles de un grupo G en un espacio de Hilbert real (ver Sección 5.1); luego, en la Sección 5.2 se enuncian algunos resultados de Teoría Espectral que serán utilizados más adelante. La demostración del Teorema B se da en la Sección 5.3, así como un resultado que identifica algunas propiedades de los subespacios invariantes bajo representaciones de G en $\mathrm{O}(2, \infty)$. Finalmente, en la Sección 5.4 se hace una aplicación directa del Teorema B al estudio de representaciones de grupos de matrices con coeficientes en el campo de números p-ádicos (con $p \geq 2$ un número primo).

5.1. Conjugación de subespacios invariantes

Sea G un grupo topológico y consideremos ϱ una representación irreducible de G en el espacio de Hilbert real $\mathscr{H}$. Tomemos $\varrho_{\mathbb{C}}$ la complejificación de dicha representación y sea $W \subset \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$ un subespacio cerrado G-invariante. Definimos el subespacio conjugado de W como

$$\overline{W} = \{ a - ib \mid a + ib \in W \} .$$

Notemos que $\{0\}$ y $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$ cumplen que $\overline{\{0\}} = \{0\}$ y $\overline{\mathscr{H} \otimes \mathbb{C}} = \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$. El siguiente resultado dice que, bajo estas condiciones, son los únicos subespacios que cumplen esta propiedad.

Lema 5.1. *Sean ϱ una representación irreducible de un grupo topológico G en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y $\varrho_{\mathbb{C}}$ su complejificación. Si $W \subset \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$ es un subespacio cerrado G-invariante y tal que $\overline{W} = W$, entonces $W = \{0\}$ o $W = \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$.*

Observación 5.2. Un subespacio complejo $U \subset \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$ es invariante bajo conjugación si y sólo si $U = V \oplus iV$ para algún subespacio $V \subset \mathscr{H}$. Además, U es cerrado si y sólo si V es cerrado.

Demostración [Lema 5.1]. Sea W como en las hipótesis del Lema. Por la observación anterior sabemos que existe $V \subset \mathscr{H}$ subespacio cerrado y G-invariante con $W = V \oplus iV$. Como ϱ es irreducible se tiene que o bien $V = \{0\}$ o bien $V = \mathscr{H}$, lo cual implica que $W = \{0\}$ o $W = \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$. □

Usamos el resultado anterior para estudiar la descomposición del espacio subyacente al considerar una representación no irreducible.

Lema 5.3. *Sean ϱ una representación irreducible de un grupo topológico G en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y $\varrho_{\mathbb{C}}$ su complejificación. Si $\varrho_{\mathbb{C}}$ no es irreducible y $W \subset \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$ es un subespacio cerrado, propio, no cero y G-invariante, entonces $W \cap \overline{W} = \{0\}$.*

Demostración. Ya que $W \cap \overline{W}$ es invariante bajo conjugación, por el Lema 5.1 se sigue que $W \cap \overline{W} = \{0\}$ o $W \cap \overline{W} = \mathscr{H} \oplus \mathbb{C}$. Como $W \cap \overline{W} \subset W \neq \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$ se concluye que $W \cap \overline{W} = \{0\}$. □

Observación 5.4. En general no sabemos que $W + \overline{W}$ sea un subespacio cerrado. Sin embargo, cuando $W + \overline{W}$ es cerrado en $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$, se puede demostrar que $W \oplus \overline{W} = \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$. Para esto, basta notar que $W \subset W + \overline{W}$, así que, por el Lema 5.1, o bien $W + \overline{W} = \{0\}$ o bien $W + \overline{W} = \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$; como $W \neq \{0\}$, entonces $W + \overline{W} = \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$. Finalmente, por el lema anterior sabemos que $W \cap \overline{W} = \{0\}$, y por lo tanto se satisface la igualdad deseada.

5.2. Interludio de teoría espectral

El contenido de esta sección sigue principalmente los desarrollos hechos en [21] (ver las Secciones 6.5, 6.6 y 6.7) y [20] (ver la Sección 1.4). También se puede consultar el Capítulo 7 de [35]. Ya que el objetivo de esta sección es únicamente referir una versión del Teorema Espectral (ver Proposición 5.6) y algunos resultados auxiliares, no se hace ninguna demostración y se remite al lector a las referencias mencionadas.

A lo largo de esta sección, $\mathscr{V}$ denota un espacio de Hilbert complejo y $\langle\ ,\ \rangle$ su producto hermitiano. Si M es un subespacio cerrado de $\mathscr{V}$, decimos que el operador acotado P es la *proyección* (ortogonal) sobre M si para todo $x \in \mathscr{V}$ se cumple que $Px = y$ si y sólo si

$x = y + z$ con $y \in M$ y $z \in M^\perp$. También, si T es un operador acotado en $\mathscr{V}$, el *espectro* de T se define como

$$\sigma(T) = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \operatorname{Id} \text{ no tiene inverso acotado} \}\,.$$

Recordamos que un operador lineal acotado S en $\mathscr{V}$ es *simétrico* si $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ para cualesquiera $x, y \in \mathscr{V}$. Es inmediato que si S es simétrico, entonces $\langle Sx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para toda $x \in \mathscr{V}$. También, un hecho no trivial en este caso es que el espectro $\sigma(S)$ está formado por números reales, esto es, $\sigma(S) \subset \mathbb{R}$.

Decimos que un operador simétrico S es *positivo* si $\langle Sx, x\rangle \geq 0$ para toda $x \in \mathscr{V}$, y en tal caso lo denotamos por $S \geq 0$. Si S y T son operadores simétricos tales que $S - T \geq 0$, lo denotamos por $S \geq T$ o $T \leq S$.

Sea Ω un conjunto equipado con una σ-álgebra $\mathscr{M}$. Decimos que $P : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{B}(\mathscr{V})$ es una *medida con valores en proyecciones sobre* $\mathscr{V}$ si

(1) Cada $P(E)$ es una proyección ortogonal.

(2) $P(\varnothing) = 0$ y $P(\Omega) = \operatorname{Id}$.

(3) $P(E \cap F) = P(E)P(F)$.

(4) Si (E_j) es una familia disjunta, entonces $P\left(\cup E_j\right) = \sum P\left(E_j\right)$, donde la suma converge en la topología de operador fuerte (es decir, la topología más débil tal que para cualquier $x \in \mathscr{V}$, el mapeo evaluación $(T, x) \mapsto Tx$ es continuo en T).

Lema 5.5. *Sea S un operador simétrico en $\mathscr{V}$ y consideremos E y F borelianos del espectro de S. Además, supongamos que P es una medida en los borelianos del espectro de S con valores en proyecciones. Si E y F son ajenos, entonces los conjuntos imagen de $P(E)$ y de $P(F)$ son mutuamente ortogonales*[1]*.*

Para una prueba de este lema y la siguiente proposición se puede consultar [20, Sección 1.4].

Proposición 5.6. *Sea S un operador simétrico en $\mathscr{V}$. Entonces a S se le puede asociar P_S una medida en los borelianos del espectro $\sigma(S)$ con valores en proyecciones tal que:*

(1) S conmuta con $P_S(E)$ para todo boreliano E.

(2) Si T es un operador acotado que conmuta con S, entonces T conmuta con $P_S(E)$ para todo boreliano E.

(3) Se cumple que $S = \int \lambda dP_S(\lambda)$.

[1] En este caso, los conjuntos imagen de $P(E)$ y $P(F)$ son *mutuamente ortogonales* si $\langle P(E)u, P(F)v\rangle = 0$ para cualesquiera $u, v \in \mathscr{V}$.

El inciso (3) tiene sentido a partir de las siguientes consideraciones:

(1) Para cualesquiera $u, v \in \mathscr{V}$, el mapeo $P_{u,v}$ definido en los borelianos por

$$P_{u,v}(E) = \langle P_S(E)u, v\rangle$$

es una medida compleja usual.

(2) Luego, dado el operador simétrico S, se satisface que para cualesquiera $u, v \in \mathscr{V}$ se tiene la siguiente igualdad

$$\langle Su, v\rangle = \int_{\sigma(S)} \lambda dP_{u,v}(\lambda).$$

5.3. Propiedad (T) y $\mathrm{O}(2,\infty)$

La primera parte de esta sección está dedicada a la prueba del Teorema B. Posteriormente se presenta un resultado que mejora a dicho teorema y también una versión en dimensión finita del Teorema B.

Demostración [Teorema B]. Procedemos por contradicción. Supongamos que existe una representación irreducible $\varrho : G \longrightarrow \mathrm{O}(2,\infty)$, y sean $\mathscr{H}$ el espacio de Hilbert real subyacente y B la forma bilineal en $\mathscr{H}$ de signatura $(2,\infty)$. Consideremos $\varrho_{\mathbb{C}} : G \longrightarrow \mathrm{U}(2,\infty)$ su complejificación y, con abuso de notación, denotamos también por B a la extensión hermitiana a $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C}$ de la forma B. Ya que por hipótesis no existe un homomorfismo $K \longrightarrow \mathrm{O}(2)$ no trivial, entonces existe $P \subset \mathscr{H}$ subespacio de dimensión 2 que es fijado puntualmente por K (ver Proposición 4.14); lo anterior implica que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathscr{H}^K) \geq 2$, de donde se sigue que $\dim_{\mathbb{C}}\left((\mathscr{H} \otimes \mathbb{C})^K\right) \geq 2$ y, por la Proposición 4.15, que $\varrho_{\mathbb{C}}$ no es irreducible. Ahora, por la Proposición 4.2 tenemos dos casos. Observamos que el caso (2) no ocurre por el mismo argumento dado en la prueba del Teorema 4.17: si $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{U}(1,\infty)$ es una representación lineal, como G tiene la propiedad (T) debe existir una línea ℓ definida positiva en el espacio de Hilbert subyacente, tal que ℓ es fijada por G, lo cual contradice que α es irreducible.

Pasamos al caso (1) de la Proposición 4.2: supongamos que $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C} = V \oplus W$ es una descomposición G-invariante en subespacios cerrados tales que B restringida a W es definida negativa y B restringida a V es de signatura $(2,\infty)$ con la acción de G en V irreducible. Notamos que también tenemos una descomposición en suma ortogonal dada por $\mathscr{H} \otimes \mathbb{C} = \overline{V} \oplus \overline{W}$ que es G-invariante, donde $\overline{V}$ y $\overline{W}$ son los respectivos subespacios conjugados de V y W. Observamos que W no está contenido en $\overline{W}$, ya que en caso contrario $W \cap \overline{W} = W$ y el Lema 5.3 implica que $W \cap \overline{W} = \{0\}$, por lo cual obtendríamos que $W = \{0\}$, lo cual no ocurre. Luego, al considerar la proyección

$$p : \mathscr{H} \otimes \mathbb{C} = \overline{V} \oplus \overline{W} \longrightarrow \overline{V}$$

con $ker(p) = \overline{W}$, obtenemos que $p(W) \neq \{0\}$. Ahora, definimos la forma hermitiana $B_1 : W \times W \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$B_1(u,v) = B\left(p(u), p(v)\right),$$

para cualesquiera $u, v \in W$. Notamos que B_1 es no cero por definición. Con esto, B_1 y $-B$ son dos formas hermitianas en W, de hecho, $-B$ es un producto hermitiano.

Afirmación 1. Existe un operador lineal acotado $S : W \longrightarrow W$ tal que

$$B_1(u,v) = -B(u, Sv)$$

para cualesquiera $u, v \in W$.

Para obtener este hecho, primero sea $v \in W$ y consideremos el mapeo lineal $f_v : W \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por $f_v(u) = -B(u,v)$. Entonces, por el Teorema de representación de Riesz existe un único $Sv \in W$ tal que $f_v(u) = -B(u, Sv)$ para todo $u \in W$. Esto define $S : W \longrightarrow W$ tal que $B_1(u,v) = -B(u, Sv)$ para cualesquiera $u, v \in W$. Veamos que S es lineal. Sean $v_1, v_2 \in W$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces, para cualquier $u \in W$ se tiene que

$$\begin{aligned} -B\left(u, S\left(v_1 + \lambda v_2\right)\right) &= B_1\left(u, v_1 + \lambda v_2\right) = B_1\left(u, v_1\right) + \overline{\lambda} B\left(u, v_2\right) \\ &= -B\left(u, Sv_1\right) - \overline{\lambda} B\left(u, Sv_2\right) = -B\left(u, Sv_1 + \lambda Sv_2\right), \end{aligned}$$

así que por la unicidad del Teorema de Riesz se obtiene que $S\left(v_1 + \lambda v_2\right) = Sv_1 + \lambda Sv_2$, es decir, S es lineal. Que S es un operador acotado se obtiene porque es continuo en 0 gracias a la continuidad de $-B$. Esto termina la prueba de la Afirmación 1.

Afirmación 2. El operador S es simétrico respecto a $-B$.

Para esto, notemos que si $u, v \in W$, entonces

$$-B(Su, v) = -\overline{B(v, Su)} = \overline{B_1(v,u)} = B_1(u,v) = -B(u, Sv),$$

por lo cual S es un operador simétrico respecto a $-B$.

Afirmación 3. El operador S conmuta con la acción de G en W.

Queremos ver que $g(Sv) = S(gv)$ para cualesquiera $g \in G$ y $v \in W$. Para ello, basta con mostrar que $-B(u, g(Sv)) = -B(u, S(gv))$ para cualquier $u \in W$ y utilizar la unicidad asegurada por el Teorema de Riesz. Pero la igualdad deseada es inmediata porque

$$-B\left(u, S(gv)\right) = B_1(u, gv) = B_1\left(g^{-1}u, v\right) = -B\left(g^{-1}u, Sv\right) = -B\left(u, g(Sv)\right),$$

pues tanto $-B$ como B_1 son G-invariantes. Esto prueba lo deseado.

Así, las Afirmaciones 1, 2 y 3 muestran que S es un operador y simétrico (respecto al producto hermitiano $-B$) en W que conmuta con la acción de G en W. Entonces, por la Proposición 5.6, para todo E boreliano del espectro de S se cumple que $P_S(E)$ conmuta con la acción de G, en particular, si $E_1 = (-\infty, 0), E_2 = [0, \infty)$, entonces $P_+ = P_S(E_1)$ y $P_- = P_S(E_2)$ conmutan con la acción de G. Luego, por el Lema 5.5, se obtiene que $W_+ = P_+(W)$ y $W_- = P_-(W)$ son mutuamente ortogonales. Luego, como $\mathrm{Id} = P_+ + P_-$, obtenemos una descomposición $W = W_+ \oplus W_-$ que es ortogonal respecto a $-B$.

Afirmación 4. La descomposición $W = W_+ \oplus W_-$ es ortogonal respecto a B_1 si y sólo si S estabiliza a W_+ y W_-.

Vemos que si W_+ es ortogonal a W_- respecto a B_1 entonces $B_1(u, v) = 0$ para cualesquiera $u \in W_+$ y $v \in W_-$. Pero, por la definición de S, lo anterior implica que para cualesquiera $u \in W_+$ y $v \in W_-$ tenemos que $B_1(u, v) = -B(u, Sv) = 0$. Como $v = P_-(v)$, se obtiene $Sv = SP_-(v) = P_-Sv \in W_-$, es decir, S estabiliza a W_-. Ya que también obtenemos una descomposición $W = P_-(W) \oplus ker\,(P_-)$ que es ortogonal respecto a $-B$, S estabiliza a $ker\,(P_-)$. Puesto que $x = P_+x + P_-x$ para toda $x \in W$, entonces $P_-x = 0$ si y sólo si $x \in W_+$. Esto muestra que $ker\,(P_-) = W_+$. Por lo tanto, S estabiliza a W_+. El recíproco es inmediato. Esto prueba la Afirmación 4.

En virtud de la Afirmación 4 obtenemos que la descomposición $W = W_+ \oplus W_-$ es ortogonal respecto a B_1, ya que S estabiliza a W_+ y W_-. Lo anterior implica que B_1 es positiva en W_+, de donde se sigue que B es positiva en $p\,(W_+)$, por lo cual $\dim_{\mathbb{C}}(p\,(W_+)) \leq 2$. Ahora, como $p\,(W_+) \subsetneq \overline{V}$ y la acción de G en $\overline{V}$ es irreducible, obtenemos que $p\,(W_+) = 0$. Esto implica que B_1 es negativa en W, es decir, $p(W)$ es negativo respecto a B, pero $p(W)$ no es denso en $\overline{V}$, así por G-invariancia se obtiene que $p(W) = 0$, pero esto es una contradicción. En conclusión, tampoco ocurre el caso (1). Esto termina la prueba del Teorema B. $\square$

Observación 5.7. Notemos que en la prueba de que no ocurre el caso (1) no fue relevante la signatura de la restricción de B al subespacio V, ya que únicamente se usó la G-invariancia de la descomposición. Así, si $p \geq 2$, dada una representación continua $G \longrightarrow \mathrm{U}(p, \infty)$, con H el espacio de Hilbert complejo y B la forma hermitiana subyacentes, no existe una descomposición G-invariante $H = V \oplus W$ en subespacios cerrados tales que la restricción de B a W sea definida negativa y la restricción de B a V sea de signatura (p, ∞) con la acción de G en V irreducible.

A continuación se presenta un resultado un poco más fuerte que el Teorema B.

Teorema B'. Sea (G, K) un par de Gelfand tal que G tiene la propiedad (T) de Kazhdan y cualquier homomorfismo continuo $K \longrightarrow \mathrm{O}(2)$ es trivial. Entonces para toda representación continua $\varrho : G \longrightarrow \mathrm{O}(2, \infty)$ se cumple que $\varrho(G)$ preserva un subespacio de dimensión 2 que es definido positivo respecto a la forma bilineal subyacente, o preserva un subespacio isotrópico no cero.

La prueba de este resultado usa el Teorema B y la siguiente versión en dimensión finita de dicho teorema.

Teorema 5.8. *Sea $q \geq 1$ un entero. Si (G,K) es un par de Gelfand tal que G tiene la propiedad (T) de Kazhdan y cualquier homomorfismo continuo $K \longrightarrow \mathrm{O}(2)$ es trivial, entonces no existen representaciones irreducibles $G \longrightarrow \mathrm{O}(2,q)$.*

Demostración. Procedemos por contradicción. Supongamos que existe $\varrho : G \longrightarrow \mathrm{O}(2,q)$ representación irreducible. Sea V el espacio de Hilbert subyacente y B la forma bilineal sobre V de signatura $(2,q)$. Analizamos los siguientes 3 casos.

Caso (1). Supongamos que $q=1$. Ya que G tiene (T) entonces fija una línea definida negativa, esto contradice que ϱ es irreducible. Por lo tanto no existen representaciones irreducibles de G en $\mathrm{O}(2,1)$.

Caso (2). Supongamos que $q=2$. En primer lugar notemos que

$$\mathrm{O}(2,2) \cong \mathrm{O}\left(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}), B_{\det}\right),$$

esto es, si consideramos el espacio vectorial de matrices cuadradas de tamaño 2×2 con entradas reales y $\det : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ el determinante, entonces $B_{\det}$ es una forma bilineal de signatura $(2,2)$ en $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, donde $B_{\det}$ es la forma bilineal inducida por la forma cuadrática det (el determinante de una matriz). Para obtener el isomorfismo basta notar que si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, entonces:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2,$$

de donde se obtiene un isomorfismo con $\mathbb{R}^{2,2}$. Ahora, queremos definir un homomorfismo continuo $\psi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{O}(2,2)$, para ello observamos que si $(g,h) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ y definimos $\psi(g,h) : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ como $\psi(g,h)(M) = gMh^{-1}$, entonces $\det(\psi(g,h)(M)) = \det(M)$ para cualquier $M \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, es decir, $\psi(g,h)$ preserva la forma cuadrática det en $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ (y por lo tanto preserva $B_{\det}$). Notamos que ψ es un homomorfismo porque dados $(g,h),(l,m) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ se tiene que para cualquier $M \in \mathrm{Mat}_2(R)$:

$$\begin{aligned}\psi((g,h)\cdot(l,m))(M) &= \psi(gl,hm)(M) = glM(hm)^{-1} = glMm^{-1}h^{-1} \\ &= \psi(g,h)\left(lMm^{-1}\right) = \psi(g,h)\circ\psi(l,m)(M).\end{aligned}$$

Ya que ψ es continua y $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ es conexo, entonces

$$\psi(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})) \subset \mathrm{O}(2,2)^\circ.$$

Con abuso de notación, denotamos $\psi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{O}(2,2)^\circ$. A continuación veamos que $ker(\psi) = \langle(-\mathrm{Id},-\mathrm{Id})\rangle$. Claramente $(-\mathrm{Id},-\mathrm{Id}) \in ker(\varphi)$. Sea $(g,h) \in ker(\varphi)$. Entonces $gMh^{-1} = M$ para cualquier $M \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, en particular, $g\,\mathrm{Id}_2\,h^{-1} = \mathrm{Id}_2$, lo cual implica que $g = h$ y además que $gM = Mg$ para cualquier $M \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, esto último significa que g es un elemento del centro $Z\left(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})\right)$ de $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, por lo cual $g = \lambda\,\mathrm{Id}_2$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$, pero $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, así que $g \in \{\mathrm{Id}_2, -\mathrm{Id}_2\}$. Esto muestra que $ker(\psi) = \langle(-\mathrm{Id}_2, -\mathrm{Id}_2)\rangle$.

Como $ker(\psi)$ es discreto (de hecho finito) y cualquier morfismo entre grupos de Lie es de rango constante, obtenemos que ψ es una inmersión. Pero ya que

$$\dim \mathrm{O}(2,2) = \dim(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})) = 6,$$

entonces ψ es un isomorfismo local. En particular, esto implica que la imagen de ψ es un subgrupo abierto (y por lo tanto cerrado) de $\mathrm{O}(2,2)^\circ$, por lo cual debe coincidir con $\mathrm{O}(2,2)^\circ$. Entonces tenemos un isomorfismo

$$\widetilde{\psi} : \frac{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}{\langle(-\mathrm{Id}, -\mathrm{Id})\rangle} \longrightarrow \mathrm{O}(2,2)^\circ,$$

tal que si

$$\pi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \frac{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}{\langle(-\mathrm{Id}, -\mathrm{Id})\rangle}$$

es la proyección natural, entonces $\psi = \widetilde{\psi} \circ \pi$. Consideremos el homomorfismo

$$\widetilde{\varphi} : \frac{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}{\langle(-\mathrm{Id}, -\mathrm{Id})\rangle} \longrightarrow \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$$

dado por $[(g,h)] \mapsto ([g],[h])$ y definamos

$$\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}^{-1} : \mathrm{O}(2,2)^\circ \longrightarrow \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}).$$

Observamos que $\widetilde{\varphi}$ es una función propia y por lo tanto φ también lo es.

A partir de ahora procedemos a la prueba de la inexistencia de representaciones irreducibles continuas de G en $\mathrm{O}(2,2)$. Procedemos por contradicción. Supongamos que existe $\varrho : G \longrightarrow \mathrm{O}(2,2)$ una representación irreducible continua. Tomamos $G_1 = \varrho^{-1}(\mathrm{O}(2,2)^\circ)$, y notamos que G_1 es un subgrupo cerrado de G y de índice finito en G, por lo cual, como G tiene (T), entonces G_1 también tiene (T) (ver Teorema 1.7.1 de [2] o el punto 2 de la prueba del Lema 19.53 de [13]).

Consideremos $p_i : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ la proyección canónica con $i = 1,2$. Entonces $p_i \circ \varphi \circ \varrho\,(G_1) \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ es relativamente compacto, esto es, existe $K_i \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ subgrupo compacto tal que $p_i \circ \varphi \circ \varrho\,(G_1) \subset K_i$ para $i = 1,2$. Para obtener esto usamos que $\overline{p_i \circ \varphi \circ \varrho\,(G_1)}$ tiene (T) porque G_1 tiene (T) y su imagen es densa en $\overline{p_i \circ \varphi \circ \varrho\,(G_1)}$ (ver Teorema 1.3.4 de [2]); luego, como este grupo actúa por isometrías en el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$, fija un punto $x \in \mathbb{H}^2$, esto implica que $\overline{p_i \circ \varphi \circ \varrho\,(G_1)}$ está contenido en el estabilizador K_i de x, el cual es un subgrupo compacto. Ahora, se tiene que

$$\varrho\,(G_1) \subset \varphi^{-1}\,(K_1 \times K_2) \subset \mathrm{O}(2,2)^\circ$$

y como $K_1 \times K_2$ es compacto y φ es un mapeo propio, entonces $K = \varphi^{-1}(K_1 \times K_2)$ es compacto. Ya que K actúa continua e isométricamente en $\mathbb{R}^{2,2}$, entonces K fija un punto (ver Corolario 3.75 de [13]), pero esto contradice la irreductibilidad de ϱ. Esto concluye la prueba de este caso.

Caso (3). Supongamos que $q \geq 3$ y consideremos $\varrho_{\mathbb{C}}$ la complejificación de ϱ. Ya que no existen homomorfismos no triviales $K \longrightarrow \mathrm{O}(2)$, entonces existe $P \subset V$ subespacio de dimensión 2 que es fijado puntualmente por K (ver Proposición 4.14), por lo cual $\dim_{\mathbb{R}}\left((V)^K\right) \geq 2$, de donde se obtiene que $\dim_{\mathbb{C}}\left((V \otimes \mathbb{C})^K\right) \geq 2$ y, ya que la Proposición 4.15 es cierta en dimensión finita, entonces $\varrho_{\mathbb{C}}$ no es irreducible.

Notemos que no existe ningún subespacio de $V \otimes \mathbb{C}$ que sea cerrado, isotrópico, no cero y G–invariante. En caso contrario, si existe $W \subset V \otimes \mathbb{C}$ subespacio cerrado, isotrópico, no cero y G–invariante. Ya que $W + \overline{W}$ es un subespacio de dimensión finita, entonces es cerrado, así, a partir de la Observación 5.4 obtenemos que $W \oplus \overline{W} = V \otimes \mathbb{C}$. Ya que W es un subespacio isotrópico no cero, se tiene que $0 < \dim_{\mathbb{C}} W \leq 2$, de donde se sigue que $\dim_{\mathbb{C}}(V \otimes \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}}(W \oplus \overline{W}) \leq 4$; pero por otro lado, como V admite una forma bilineal de signatura $(2,q)$ con $q \geq 3$, entonces $\dim_{\mathbb{R}}(V) \geq 5$, por lo cual $\dim_{\mathbb{C}}(V \otimes \mathbb{C}) \geq 5$, esto es una contradicción. Así, no existe ningún subespacio cerrado, isotrópico, no cero y G-invariante de $V \otimes \mathbb{C}$.

Observamos que el Lema 3.8 (con las modificaciones adecuadas) también es cierto para espacios de dimensión finita. Lo aplicamos en nuestro caso y obtenemos dos subcasos:

Subcaso 1. Existe una descomposición $V \otimes \mathbb{C} = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ que es G–invariante y donde U_3 es un subespacio cerrado definido negativo, y U_j es un subespacio cerrado de signatura $(1, r_j)$ tal que la acción de G es irreducible para $j = 1, 2$. Ahora, como G tiene (T) y la acción en U_j es irreducible, se debe tener que $r_j = 0$ (en caso contrario hay una contradicción y terminamos). Así, $r_1 = 0 = r_2$. Esto último implica que $0 < \dim_{\mathbb{R}}(Re\,(U_1)) \leq 2$ o $0 < \dim_{\mathbb{R}}(Im\,(U_1)) \leq 2$ y, ya que $\dim_{\mathbb{R}}(V) \geq 5$, entonces existe un subespacio cerrado, propio, no cero y G-invariante de V, lo cual contradice que ϱ es irreducible. Se sigue que este caso no ocurre.

Subcaso 2. Existe $V \otimes \mathbb{C} = U_1 \oplus U_2$ una descomposición G–invariante en subespacios cerrados, donde la restricción de la forma hermitiana B a U_2 es definida negativa y B restringida a U_1 es de signatura $(2, r)$ con la acción de G en U_1 irreducible.

Veamos que $r = 0$. Procedemos por contradicción, así que supongamos que $r \geq 1$. Ya que $U_1 + \overline{U_1}$ es de dimensión finita y por lo tanto es cerrado en $V \otimes \mathbb{C}$, a partir de la Observación 5.4 obtenemos que $V \otimes \mathbb{C} = U_1 \oplus \overline{U_1}$. En virtud de lo anterior, definimos un isomorfismo $\mathbb{C}$-lineal $\varphi : \overline{U_1} \longrightarrow U_2$ que es G–equivariante: dado $v \in U_1$, por la descomposición en suma directa existen únicos $v_\star \in U_1$ y $w \in U_2$ tales que $\overline{v} = v_\star + w$, tomamos $\varphi(\overline{v}) = w$. Notamos que por definición φ es lineal pues φ es la composición de la inclusión de $\overline{U_1}$ en $V \otimes \mathbb{C}$ seguida de la proyección en U_2. Para la G–equivariancia basta observar que

$$\varphi\left(g\overline{v}\right) = \varphi\left(g\left(v_\star + w\right)\right) = \varphi\left(gv_\star + gw\right) = gw = g\varphi\left(\overline{v}\right).$$

De manera análoga se obtiene el mapeo inverso. Ahora, ya que por hipótesis se tiene que $B|_{U_2\times U_2}$ es definido negativo, la función $B_1 : \overline{U_1} \times \overline{U_1} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$B_1\left(\overline{v_1}, \overline{v_2}\right) = -B\left(\varphi\left(\overline{v_1}\right), \varphi\left(\overline{v_2}\right)\right)$$

es un producto hermitiano en $\overline{V}$. Así, si definimos $\langle\ ,\ \rangle : U_1 \times U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$\langle v_1, v_2\rangle = B_1\left(\overline{v_2}, \overline{v_1}\right),$$

entonces $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto hermitiano en U_1 y, por construcción, es G–invariante. De hecho, $(U_1, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio de Hilbert porque $(U_2, -B|_{U_2\times U_2})$ lo es. Ahora, ya que tenemos 2 formas hermitianas G–invariantes en U_1 vamos a usar esto para obtener la contradicción deseada.

Afirmación I. Se satisface lo siguiente:

(1) Existe un operador lineal acotado $S : U_1 \longrightarrow U_1$ tal que para cualesquiera $u, v \in U_1$ se cumple que
$$B(u, v) =< u, Sv > .$$

(2) El operador S es simétrico respecto a $<,>$.

(3) El operador S conmuta con la acción de G en U_1.

La prueba de la Afirmación I es totalmente análoga a la realizada para las Afirmaciones 1,2 y 3 en la demostración del Teorema B.

Afirmación II. Existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}^*$ tal que $S = \lambda_0 \operatorname{Id}$.

Por las Afirmación I sabemos que S es un operador simétrico que conmuta con la acción de G en U_1. Ya que la representación $\varrho_{\mathbb{C}}|^{U_1}$ es irreducible, por el Lema de Schur (ver [26, Prop. 1.5]) existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que $S = \lambda_0 \operatorname{Id}$. Por las propiedades de S sabemos que $S \neq 0$, así que $\lambda_0 \neq 0$; además, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ porque S es un operador simétrico. Esto prueba lo deseado.

La Afirmación II implica que para cualesquiera $u, v \in U_1$ se tiene que

$$-B(u, v) = \langle u, Sv\rangle = \langle u, \lambda_0 v\rangle = \lambda_0\langle u, v\rangle,$$

es decir, la forma hermitiana $B|_{U_1\times U_1}$ es un múltiplo escalar del producto hermitiano $\langle\ ,\ \rangle$ en U_1, pero esto es una contradicción, pues por hipótesis $B|_{U_1\times U_1}$ es de signatura $(2, r)$ con $r \geq 1$. Esto muestra que $r = 0$.

Entonces debe ocurrir que $\dim_{\mathbb{C}}(U_1) = 2$, por lo cual o bien $0 < \dim_{\mathbb{R}}(Re(U_1)) \leq 4$ o $0 < \dim_{\mathbb{R}}(Im(U_1)) \leq 4$, y así, como $\dim_{\mathbb{R}}(V) \geq 5$, se obtiene que existe un subespacio de V que es cerrado, propio, no cero y G–invariante, lo cual contradice que ϱ es irreducible. Por lo tanto, este caso tampoco sucede.

Notemos que los Subcasos 1 y 2 prueban que si $q \geq 3$ entonces no existen representaciones irreducibles de G en $\mathrm{O}(2, q)$.

En conclusión, los Casos (1), (2) y (3) muestran que no existen representaciones irreducibles de G en $\mathrm{O}(2, q)$ con $q \geq 1$. $\square$

Finalmente, para concluir esta sección presentamos la prueba del Teorema B'.

Demostración [Teorema B']. Sea $\mathscr{H}$ el espacio de Hilbert real subyacente. Si existe $V \subset \mathscr{H}$ un subespacio isotrópico no cero G–invariante, terminamos. Así, supongamos que no existen subespacios isotrópicos no cero que sean G-invariantes. Notemos que el Lema 3.8 es cierto para espacios reales (con las modificaciones adecuadas), así que de manera inmediata obtenemos dos casos.

Caso 1. Hay una descomposición $\mathscr{H} = V_1 \oplus V_2$ que es G–invariante donde V_2 es un subespacio cerrado definido negativo y V_1 es un subespacio cerrado de signatura $(2, q)$ y la acción de G en V_1 es irreducible. Si $0 < q \leq \infty$, entonces por los Teoremas B y 5.8 se obtiene una contradicción. Por lo anterior, el único caso posible es $q = 0$, y así V_1 es un subespacio de dimensión 2 definido positivo que es G–invariante.

Caso 2. Hay una descomposición $\mathscr{H} = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ que es G–invariante donde V_3 es un subespacio cerrado definido negativo, y V_j es un subespacio cerrado de signatura $(1, q_j)$ tal que la acción de G en V_j es irreducible (con j=1,2). Notamos que si para algún $j \in \{1, 2\}$ se tiene que $0 < q_j \leq \infty$, ya que G tiene (T), se sigue que existe $\ell \subset \mathscr{H}$ una línea fija, pero esto contradice la irreductibilidad de V_j. Por lo tanto $q_1 = 0 = q_2$. Entonces, $V_1 \oplus V_2$ es un subespacio de dimensión 2 definido positivo que es G–invariante. Esto termina la prueba. □

5.4. Matrices de números p-ádicos

Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo fijo. Esta sección está dedicada al estudio de la existencia de representaciones del grupo especial lineal con coeficientes en los números p–ádicos $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Q}_p)$ en $\mathrm{O}(2, \infty)$. El interés surge al intentar obtener una generalización del siguiente hecho: si consideramos un árbol $\mathscr{T}$ y $\mathrm{Aut}(\mathscr{T})$ su grupo de automorfismos, en [8] se demuestra la existencia de representaciones continuas e irreducibles de $\mathrm{Aut}(\mathscr{T})$ en $\mathrm{O}(1, \infty)$. En particular existen representaciones irreducibles de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Q}_p)$ en $\mathrm{O}(1, \infty)$. Ya que $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Q}_p)$ actúa en un edificio de dimensión 2 (ver, por ejemplo, [5]) y dado que los edificios son generalizaciones de los árboles, de manera natural surge la pregunta siguiente:

Pregunta 5.9. *Sea $n \geq 3$. ¿Existen representaciones irreducibles de* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Q}_p)$ *en* $\mathrm{O}(q, \infty)$ *para algún $q \geq 2$?*

El Teorema C da una respuesta negativa si $q = 2$. Para dar la prueba de dicho teorema, en primer lugar se describen brevemente a los números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$ así como a los enteros p-ádicos $\mathbb{Z}_p$, y posteriormente se presentan algunos resultados acerca de los grupos de matrices $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Q}_p)$ y $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}_p)$. En la parte final de la sección se demuestra el Teorema C.

Definición 5.10. Sea $\mathbb{K}$ un campo.

(1) Un *valor absoluto* en $\mathbb{K}$ es una función $|\cdot| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{K}$ se verifica que

a) $|x| \geq 0$, y $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$;

b) $|xy| = |x||y|$;

c) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(2) Un valor absoluto define una topología en $\mathbb{K}$ mediante la métrica $d(x, y) = |x - y|$.

(3) El campo $\mathbb{K}$ es un *local* si $\mathbb{K}$ puede ser dotado de un valor absoluto para el cual $\mathbb{K}$ es localmente compacto y no discreto.

Observación 5.11. Notemos que, dado un valor absoluto en $\mathbb{K}$, se tiene que $\mathbb{K}$ es localmente compacto si y sólo si la bola unitaria $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{K} \,|\, |x| \leq 1\}$ es compacta, y también $\mathbb{K}$ no es discreto si y sólo si existe $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $|x| \neq 1$ (el valor absoluto no es trivial).

Observación 5.12. Existe una clasificación salvo isomorfismo de los campos locales. De hecho, cualquier campo local es isomorfo a alguno de los siguientes campos:

(1) $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con el valor absoluto usual,

(2) una extensión finita del campo de los números p-ádicos con una extensión del valor absoluto p-ádico,

(3) el campo $\mathbb{K} = k((X))$ de series de Laurent sobre un campo finito k con valor absoluto dado por $|\sum_{i=m}^{\infty} a_i X^i| = e^{-m}$ con $a_m \in k \setminus \{0\}$.

Este hecho puede consultarse, por ejemplo, en [47].

A continuación se presenta la construcción de los números p-ádicos tal como aparece en [2, Sección D.4]; para una explicación más extensa (e introductoria) acerca de esta construcción (así como un poco de teoría de representaciones de grupos sobre campos p–ádicos) se puede consultar [38]. Dado $x \in \mathbb{Q}$ escribimos $x = p^m \frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{Z}$, a primo relativo con p y b primo relativo con p. Definimos $|x|_p = p^{-m}$ y $|0|_p = 0$. Entonces el mapeo $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$x \mapsto |x|_p$$

es un valor absoluto no trivial en $\mathbb{Q}$ llamado *valor absoluto p–ádico*. La compleción de $\mathbb{Q}$ respecto a la métrica

$$d_p(x, y) = |x - y|_p, \text{ para } x, y \in \mathbb{Q}$$

es el *campo $\mathbb{Q}_p$ de los números p-ádicos*. Tenemos que $\mathbb{Q}_p$ es en efecto un campo porque las operaciones de $\mathbb{Q}$ se extienden a la compleción $\mathbb{Q}_p$. Además, el valor absoluto p–ádico en $\mathbb{Q}$ se extiende a un valor absoluto en $\mathbb{Q}_p$. Ahora, la bola unitaria

$$\mathbb{Z}_p = \{\, x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}$$

es un conjunto abierto y un subanillo compacto de $\mathbb{Q}_p$ llamado *anillo de los enteros p–ádicos*. Por la Observación 5.11 se obtiene que $\mathbb{Q}_p$ es localmente compacto. Ya que $|\cdot|_p$ no es trivial, se obtiene que $\mathbb{Q}_p$ es un campo local.

Teorema 5.13. *El par* $(\mathrm{SL}(n,\mathbb{Q}_p), \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}_p))$ *es par de Gelfand.*

El teorema anterior se sigue de los resultados de F. Bruhat en [6], en particular de su Ejemplo 2, y del Teorema I de I. Satake en [40, Sección 5]. También es posible deducirlo a partir de [29] mediante la reducción al estudio de ciertas acciones sobre edificios con características adecuadas.

Teorema 5.14. *Sea $n \geq 3$ un entero. El grupo* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Q}_p)$ *tiene la propiedad* (T) *de Kazhdan.*

Ya que $\mathbb{Q}_p$ es un campo local, el teorema anterior es un caso particular del Teorema 1.4.15 de [2], el cual es válido para campos locales en general.

Definición 5.15. Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y A un anillo con $1 \in A$. Definimos el *grupo elemental* $E_n(A)$ como el subgrupo de $\mathrm{GL}(n,A)$ generado por las matrices elementales $e_{ij}(a)$, donde $1 \leq i,j \leq n$ con $i \neq j$ son enteros, $a \in A$, y e_{ij} es la matriz con 1 en la diagonal, a en la posición (i,j) y 0 en otro caso.

Es un resultado conocido que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) = E_n(\mathbb{Z})$. Además, dado un anillo unitario A, el estudio de si $\mathrm{SL}(n,A) = E_n(A)$ es también un tema clásico. En particular, aquí usaremos lo siguiente.

Proposición 5.16. *Para todo $n \geq 2$ se cumple que* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}_p) = E_n(\mathbb{Z}_p)$.

Ya que $\mathbb{Z}_p$ es un anillo local (y por tanto un anillo semilocal), por el Teorema 4.3.9 de Hahn y O'Meara [23], se obtiene la proposición anterior. De hecho, el mismo teorema de Hahn y O'Meara es cierto para anillos euclidianos, lo cual implica que la proposición anterior también es cierta si sustituimos $\mathbb{Z}_p$ por $\mathbb{Z}$, es decir, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) = E_n(\mathbb{Z})$ para todo $n \geq 2$.

Lema 5.17. *Sea $n \geq 3$. Si $e_{ij} \in E_n(\mathbb{Z}_p)$ es una matriz elemental, entonces es el conmutador de dos matrices elementales.*

Demostración. Dada $e_{ij}(r) \in E_n(\mathbb{Z}_p)$ basta notar que, si $l \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i,j\}$, entonces

$$[e_{il}(r), e_{lj}(1)] = e_{ij}(r).$$

□

A partir de la demostración anterior es inmediato que el Lema 5.17 se satisface para cualquier anillo con unidad.

Corolario 5.18. *Sea* $n \geq 3$*. Entonces* $\mathrm{SL}\left(n, \mathbb{Z}_p\right)$ *es un grupo perfecto.*

Demostración. Queremos ver que cualquier $g \in \mathrm{SL}\left(n, \mathbb{Z}_p\right)$ se puede expresar como un producto de conmutadores. Por la Proposición 5.16 basta probar el resultado para las matrices elementales mientras que el Lema 5.17 nos da la conclusión deseada. $\square$

Finalmente presentamos el resultado principal de esta sección.

Teorema C. Sea $n \geq 3$ un entero. No existen representaciones irreducibles continuas $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{O}(2, q)$ con $1 \leq q \leq \infty$.

Demostración. Notamos que por el Teorema 5.13 se obtiene que $\left(\mathrm{SL}\left(n, \mathbb{Q}_p\right), \mathrm{SL}\left(n, \mathbb{Z}_p\right)\right)$ es un par de Gelfand y por el Teorema 5.14 $\mathrm{SL}\left(n, \mathbb{Q}_p\right)$ tiene la propiedad (T). Ahora, observemos que si $\varphi : \mathrm{SL}\left(n, \mathbb{Z}_p\right) \longrightarrow \mathrm{O}(2)$ es un homomorfismo (continuo), por el Corolario 5.18 se sigue que, para cualquier $g \in \mathrm{SL}\left(n, \mathbb{Z}_p\right)$, $\varphi(g)$ es un producto de conmutadores de elementos de $\mathrm{O}(2)$, y esto implica que $\varphi\left(\mathrm{SL}\left(n, \mathbb{Z}_p\right)\right) \subset \mathrm{SO}(2)$ ya que $[h, l] \in \mathrm{SO}(2)$ para cualesquiera $h, l \in \mathrm{O}(2)$, y puesto que $\mathrm{SO}(2)$ es abeliano, se sigue que φ es un morfismo trivial. Por lo tanto, cualquier homomorfismo $\mathrm{SL}\left(n, \mathbb{Z}_p\right) \longrightarrow \mathrm{O}(2)$ es trivial. Finalmente, ya que se satisfacen las hipótesis de los Teoremas B y 5.8, se concluye que no existen representaciones irreducibles de $\mathrm{SL}\left(n, \mathbb{Q}_p\right) \longrightarrow \mathrm{O}(2, q)$ con $1 \leq q \leq \infty$. $\square$

6 Del plano hiperbólico a la grassmanniana no compacta

Para los fines de este capítulo, consideramos $s \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ fijo. Por lo dicho en el Capítulo 2 sabemos que $\overline{\pi}_s$ es una representación irreducible de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ en $\mathrm{O}(2,\infty)$. En virtud de lo anterior, y relacionado con lo realizado en los dos capítulos anteriores, de manera natural surgen las siguientes preguntas:

(1) ¿existen otras representaciones irreducibles de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ en $\mathrm{O}(2,\infty)$?

(2) ¿es posible estudiar de manera geométrica algunas de las propiedades de $\overline{\pi}_s$?

Aquí, en particular, se estudia la segunda pregunta. Para ello se construirá un mapeo del plano hiperbólico real $\mathbb{H}^2$ hacia la grassmanniana no compacta $X_2(L^2(S^1))$ (definida más adelante). En la Sección 6.1 se presenta de manera explícita la acción inducida por la serie principal esférica de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ en los mapeos $Re, Im \in L^2(S^1)$. Luego, en la sección 6.2 se introduce brevemente un modelo auxiliar de la grassmaniana no compacta, de manera análoga a lo realizado por D. Toledo al comienzo de la Sección 2 de [42]. A continuación, en la Sección 6.3 se construye el mapeo anunciado y se estudian algunas de sus propiedades; en particular se muestra que existe un único mapeo $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-equivariante de $\mathbb{H}^2$ en $X_2(L^2(S^1))$ y, ya que $X_2(L^2(S^1))$ es una variedad compleja, se prueba que dicho mapeo no es holomorfo. Finalmente, en la Sección 6.4 se presentan algunos problemas abiertos en la misma dirección de los resultados presentados en este capítulo.

Antes de comenzar, fijamos un poco de notación. Para simplificar la escritura, sea $\widetilde{\mathscr{H}} = L^2(S^1, \mathrm{dm})$ el espacio de Hilbert (complejo) de clases de equivalencia de funciones medibles de cuadrado integrable respecto a la medida de Lebesgue dm en S^1 que toman valores complejos. Por lo visto en el Capítulo 2, la representación π_s de la serie principal esférica, de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ en $\widetilde{\mathscr{H}}$, induce una forma hermitiana $B = B_s$ de signatura $(2,\infty)$ en $\widetilde{\mathscr{H}}$. Por lo realizado en [11] y [31] (ver Sección 2.2), tenemos que dicha forma hermitiana se restringe a una forma bilineal, que también denotamos por B, en $\mathscr{H} = L^2_{\mathbb{R}}(S^1, dm) \subset \widetilde{\mathscr{H}}$ el subespacio de funciones con valores reales. Notamos que de hecho $\widetilde{\mathscr{H}}$ es la complejificación de $\mathscr{H}$, así que denotaremos por $\widetilde{B}$ a la extensión $\mathbb{C}$-bilineal de B a $\widetilde{\mathscr{H}}$. De manera adicional, tomamos el plano de Poincaré $\mathbb{H}^2 = \{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, y > 0\}$ como el plano hiperbólico (ver Sección 1.2).

6.1. Serie principal y $L^2(S^1)$

Sea Δ el disco de Poincaré, así $\partial\Delta = S^1$ y denotamos $\overline{\Delta} = \Delta \cup \partial\Delta$. Sea $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ un elemento de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Consideremos las funciones $\alpha, \beta : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$\alpha(e^{i\theta}) = Re(e^{i\theta}) = \cos(\theta) \tag{6.1}$$

y

$$\beta(e^{i\theta}) = Im(e^{i\theta}) = \mathrm{sen}(\theta). \tag{6.2}$$

Notamos que $\alpha, \beta \in \widetilde{\mathscr{H}}$. Como se mencionó al inicio de este capítulo, π_s denota la representación de parámetro s de la serie principal esférica de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ así que al evaluar $\pi_s(g)$ en α y β obtenemos los mapeos

$$\pi_s(g)(\alpha) : e^{i\theta} \mapsto [\mathrm{Jac}(g^{-1})]^{\frac{1}{2}+s} Re(g^{-1}e^{i\theta}) \tag{6.3}$$

y

$$\pi_s(g)(\beta) : e^{i\theta} \mapsto [\mathrm{Jac}(g^{-1})]^{\frac{1}{2}+s} Im(g^{-1}e^{i\theta}) \tag{6.4}$$

Ahora consideremos la descomposición de Iwasawa ANK de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ donde

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a > 0 \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad K = \mathrm{SO}(2).$$

Supongamos además que $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right) \in AN$, lo cual no resta generalidad porque $\mathrm{PSO}(2)$ es el estabilizador de $0 \in \Delta$ y este hecho se usará más adelante. Notemos que hay una acción simplemente transitiva de AN en $\mathbb{H}^2$ dada por

$$z \mapsto g \cdot z = a^2 z + ab,$$

por lo cual induce una biyección $\psi : AN \longrightarrow \mathbb{H}^2$ determinada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto ab + ia^2.$$

También tomemos el difeomorfismo $\varphi : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \Delta$ dado por $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$, el cual manda i a 0 y se extiende a $\partial\Delta$. También se tiene que $\varphi^{-1} : \Delta \longrightarrow \mathbb{H}^2$ está dada por $\varphi^{-1}(w) = i\frac{1+w}{1-w}$.

A continuación, definimos el mapeo $g_{a,b} : \overline{\Delta} \longrightarrow \overline{\Delta}$ dado por

$$g_{a,b}(w) = \frac{ia^2(1+w) + (ab-i)(1-w)}{ia^2(1+w) + (ab+i)(1-w)},$$

el cual se obtiene de aplicar φ^{-1} a w, seguido de la acción de g sobre $\varphi^{-1}(w)$, y finalmente aplicar φ.

A partir de ahora nuestro interés está en estudiar el comportamiento de $g_{a,b}$ en la frontera del disco de Poincaré $\partial\Delta$. Es por esto que supondremos que $w = e^{i\theta} \in S^1$. De manera explícita, la imagen de w bajo $g_{a,b}$ está dada por

$$g_{a,b}(e^{i\theta}) = \frac{ia^2(1+e^{i\theta}) + (ab-i)(1-e^{i\theta})}{ia^2(1+e^{i\theta}) + (ab+i)(1-i\theta)}. \tag{6.5}$$

Notamos que podemos considerar que $g_{a,b}$ es una función en las variables a, b y θ, y observamos que de hecho es diferenciable en las tres variables. Por esto último, después de algunos cálculos elementales, la derivada de $g_{a,b}$ respecto a θ es:

$$\frac{\partial g_{a,b}(e^{i\theta})}{\partial\theta} = \frac{-4ia^2e^{i\theta}}{(ia^2(1+e^{i\theta}) + (ab+i)(1-i\theta))^2} \tag{6.6}$$

Ya que $g_{a,b}(e^{i\theta}) \in S^1$, existe una función $\alpha(\theta)$ tal que $g_{a,b}(e^{i\theta}) = e^{i\alpha(\theta)}$, y como $g_{a,b}(e^{i\theta})$ es diferenciable en θ, entonces α también lo es, y además

$$\frac{\partial}{\partial\theta} g_{a,b}(e^{i\theta}) = \frac{d}{d\theta} e^{i\alpha(\theta)} = i\alpha'(\theta)e^{i\alpha(\theta)} = i\alpha'(\theta) g_{a,b}(e^{i\theta}). \tag{6.7}$$

En virtud de lo anterior, obtenemos el jacobiano de $g_{a,b}(e^{i\theta})$ como

$$\mathrm{Jac}(g_{a,b})(e^{i\theta}) = \alpha'(\theta) = \frac{1}{ig_{a,b}(e^{i\theta})}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} g_{a,b}(e^{i\theta})\right). \tag{6.8}$$

Luego, después de sustituir (6.6) en la ecuación (6.8) y de hacer las simplificaciones necesarias, el jacobiano está dado de manera explícita por

$$\mathrm{Jac}(g_{a,b})(e^{i\theta}) = \frac{-4a^2e^{i\theta}}{(ia^2(1+e^{i\theta}) + ab(1-e^{i\theta}))^2 + (1-e^{i\theta})^2} \tag{6.9}$$

A continuación calculamos explícitamente el valor de las partes real e imaginaria de $g_{a,b}$ en $e^{i\theta}$. Ya que $g_{a,b}(e^{i\theta}) \in S^1$, tenemos que

$$Re(g_{a,b}(e^{i\theta})) = \frac{1}{2}\left(g_{a,b}(e^{i\theta}) + \frac{1}{g_{a,b}(e^{i\theta})}\right)$$

y también
$$Im(g_{a,b}(e^{i\theta})) = \frac{1}{2i}\left(g_{a,b}(e^{i\theta}) - \frac{1}{g_{a,b}(e^{i\theta})}\right).$$
Así, después de las simplificaciones necesarias, obtenemos que
$$Re(g_{a,b}(e^{i\theta})) = \frac{(ia^2(1+e^{i\theta}) + ab(1-e^{i\theta}))^2 - (1-e^{i\theta})^2}{(ia^2(1+e^{i\theta}) + ab(1-e^{i\theta}))^2 + (1-e^{i\theta})^2}, \tag{6.10}$$
y
$$Im(g_{a,b}(e^{i\theta})) = \frac{-2(ia^2(1+e^{i\theta}) + ab(1-e^{i\theta}))(1-e^{i\theta})}{(ia^2(1+e^{i\theta}) + ab(1-e^{i\theta}))^2 + (1-e^{i\theta})^2}. \tag{6.11}$$

Para continuar, usamos las ecuaciones (6.9), (6.10) y (6.11) para obtener expresiones en términos de $e^{i\theta}$ de $\pi_s(g)\alpha$ y $\pi_s(g)\beta$. Ya que $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{smallmatrix}\right)$, entonces $g^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a\end{smallmatrix}\right)$, por lo cual, al sustituir en (6.9), (6.10) y (6.11) obtenemos:
$$\mathrm{Jac}(g_{a^{-1},-b})(e^{i\theta}) = \frac{-4a^{-2}e^{i\theta}}{(ia^{-2}(1+e^{i\theta}) - a^{-1}b(1-e^{i\theta}))^2 + (1-e^{i\theta})^2}, \tag{6.12}$$

$$Re(g_{a^{-1},-b}(e^{i\theta})) = \frac{(ia^{-2}(1+e^{i\theta}) - a^{-1}b(1-e^{i\theta}))^2 - (1-e^{i\theta})^2}{(ia^{-2}(1+e^{i\theta}) - a^{-1}b(1-e^{i\theta}))^2 + (1-e^{i\theta})^2}, \tag{6.13}$$
y
$$Im(g_{a^{-1},-b}(e^{i\theta})) = \frac{-2(ia^{-2}(1+e^{i\theta}) - a^{-1}b(1-e^{i\theta}))(1-e^{i\theta})}{(ia^{-2}(1+e^{i\theta}) - a^{-1}b(1-e^{i\theta}))^2 + (1-e^{i\theta})^2}. \tag{6.14}$$
Así, al retomar las ecuaciones (6.3) y (6.4) y sustituir, obtenemos:
$$\begin{aligned}\pi_s(g)(\alpha)(e^{i\theta}) = &\left(\frac{-4a^{-2}e^{i\theta}}{(ia^{-2}(1+e^{i\theta}) - a^{-1}b(1-e^{i\theta}))^2 + (1-e^{i\theta})^2}\right)^{\frac{1}{2}+s} \\ &\cdot \frac{(ia^{-2}(1+e^{i\theta}) - a^{-1}b(1-e^{i\theta}))^2 - (1-e^{i\theta})^2}{(ia^{-2}(1+e^{i\theta}) - a^{-1}b(1-e^{i\theta}))^2 + (1-e^{i\theta})^2}\end{aligned} \tag{6.15}$$

y

$$\begin{aligned}\pi_s(g)(\beta)(e^{i\theta}) = &\left(\frac{-4a^{-2}e^{i\theta}}{(ia^{-2}(1+e^{i\theta}) - a^{-1}b(1-e^{i\theta}))^2 + (1-e^{i\theta})^2}\right)^{\frac{1}{2}+s} \\ &\cdot \frac{-2(ia^{-2}(1+e^{i\theta}) - a^{-1}b(1-e^{i\theta}))(1-e^{i\theta})}{(ia^{-2}(1+e^{i\theta}) - a^{-1}b(1-e^{i\theta}))^2 + (1-e^{i\theta})^2}.\end{aligned} \tag{6.16}$$

Ahora, ya que $\psi(g) = ab+ia^2$, hacemos el cambio de variable $x = ab$, $y = a^2$ (así $y > 0$). Además, obtenemos que $a^{-2} = y^{-1}$ y $a^{-1}b = xy^{-1}$. Así, después de las sustituciones en

(6.15) y (6.16), obtenemos las siguientes expresiones:

$$\pi_s(g)(\alpha)(e^{i\theta}) = \left(\frac{-4ye^{i\theta}}{(i(1+e^{i\theta})-x(1-e^{i\theta}))^2+y^2(1-e^{i\theta})^2}\right)^{\frac{1}{2}+s} \cdot \frac{(i(1+e^{i\theta})-x(1-e^{i\theta}))^2-y^2(1-e^{i\theta})^2}{(i(1+e^{i\theta})-x(1-e^{i\theta}))^2+y^2(1-e^{i\theta})^2} \tag{6.17}$$

y

$$\pi_s(g)(\beta)(e^{i\theta}) = \left(\frac{-4ye^{i\theta}}{(i(1+e^{i\theta})-x(1-e^{i\theta}))^2+y^2(1-e^{i\theta})^2}\right)^{\frac{1}{2}+s} \cdot \frac{-2y(i(1+e^{i\theta})-x(1-e^{i\theta}))(1-e^{i\theta})}{(i(1+e^{i\theta})-x(1-e^{i\theta}))^2+y^2(1-e^{i\theta})^2}. \tag{6.18}$$

6.2. Un modelo proyectivo de la grassmanniana

En esta sección se presentan dos variedades complejas que son de interés porque en ambas hay una acción de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ inducida por la representación π_s. Además, se da un difeomorfismo entre ellas que permite estudiar dicha acción en cualquiera de ellas.

En primer lugar, consideremos $\mathscr{G}_2(\mathscr{H})$ la familia de planos de $\mathscr{H}$, esto es,

$$\mathscr{G}_2(\mathscr{H}) = \{E \subset \mathscr{H}\,,\, E \text{ es un subespacio con } \dim(E)=2\}.$$

Observamos que si $E \in \mathscr{G}_2(\mathscr{H})$, entonces E es un subespacio cerrado de $\mathscr{H}$. Definimos la *grassmanniana de tipo no compacto* de planos definidos positivos como

$$X_2(\mathscr{H}) = \{E \in \mathscr{G}_2(\mathscr{H})\,,\, B|_{E\times E} \text{ es definida positiva}\}.$$

Como se prueba en [14], a este espacio se le puede dar estructura de espacio CAT(0). De hecho, $X_2(\mathscr{H})$ admite una estructura de variedad suave (ver [27]), que es totalmente análoga a la estructura de la grassmanniana en dimensión finita. Definamos a continuación la segunda variedad de interés. Tal como en el caso de dimensión finita, el *espacio proyectivo complejo* de $\widetilde{\mathscr{H}}$ está definido por

$$\mathbb{P}(\widetilde{\mathscr{H}}) = (\widetilde{\mathscr{H}} \setminus \{0\})/\!\sim,$$

donde $\zeta \sim \zeta'$ si existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $\zeta = \lambda\zeta'$, y admite una estructura de variedad compleja (de dimensión infinita, ver [27]). Tomemos el subespacio

$$\mathscr{Q} = \{[\zeta] \in \mathbb{P}(\widetilde{\mathscr{H}})\,,\, \widetilde{B}(\zeta,\zeta)=0\},$$

que resulta ser una subvariedad compleja. A continuación, consideremos el subespacio abierto

$$\mathscr{O} = \{[\zeta] \in \mathscr{Q}\,,\, B(\zeta,\bar{\zeta}) > 0\}, \tag{6.19}$$

por lo cual $\mathscr{O}$ también es una variedad compleja.

Con lo anterior ya se han construido las dos variedades que nos interesan. Para definir el morfismo que permite relacionarlas introducimos algunas notaciones. En primer lugar, recordemos que si $E \in X_2(\mathscr{H})$ consideramos dos bases ordenadas $b_1 = \{\zeta_1, \zeta_2\}$ y $b_2 = \{\xi_1, \xi_2\}$ de E, decimos que b_1 y b_2 *tienen la misma orientación* si la matriz de cambio de coordenadas de b_1 en b_2 tiene determinante positivo. Observamos que la propiedad de tener la misma orientación induce una relación de equivalencia en el conjunto de bases ordenadas de E, y define únicamente dos clases de equivalencia. Denotaremos por

$$E = \langle b_1 \rangle = \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle$$

al plano E con la orientación inducida por la base b_1.

A continuación elegimos una orientación privilegiada que llamaremos *orientación positiva*. Para esto, sean $\varepsilon_1 = \pi_s(\mathrm{Id}_2)\alpha$ y $\varepsilon_2 = \pi_s(\mathrm{Id}_2)\beta$, con α y β como en la Sección 6.1. Notamos que α y β toman valores reales por definición, así que $\alpha, \beta \in \mathscr{H}$; además, $B(\varepsilon_1, \varepsilon_1),\ B(\varepsilon_2, \varepsilon_2) > 0$ y $B(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$. Sea $H_0 =< \varepsilon_1, \varepsilon_2 >$ y decimos que H_0 está *orientado positivamente*. Definimos la *grassmanniana orientada* por

$$X_2^+ = \{E = \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle,\ E \in X_2(\mathscr{H}),\ \{\zeta_1, \zeta_2\} \text{ es base ordenada de } E\},$$

Observamos que X_2^+ es homeomorfo a dos copias de $X_2(\mathscr{H})$.

Definimos el mapeo $\eta : X_2^+ \longrightarrow \mathscr{O}$ mediante

$$H = \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle \mapsto [\zeta_1 + i\zeta_2]\,,$$

donde $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ es una base ortonormal de H.

En primer lugar veamos que η está bien definida. Para comenzar, sea $H =< \zeta_1, \zeta_2 >$ un elemento de X_2^+, donde $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ es una base ortonormal de H. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \widetilde{B}(\zeta_1 + i\zeta_2, \zeta_1 + i\zeta_2) &= \widetilde{B}(\zeta_1, \zeta_1) + i\widetilde{B}(\zeta_1, \zeta_2) + i\widetilde{B}(\zeta_2, \zeta_1) + i^2\widetilde{B}(\zeta_2, \zeta_2) \\ &= B(\zeta_1, \zeta_1) + iB(\zeta_1, \zeta_2) + iB(\zeta_2, \zeta_1) - B(\zeta_2, \zeta_2) = 0, \end{aligned} \tag{6.20}$$

y también:

$$\begin{aligned} B(\zeta_1 + i\zeta_2, \zeta_1 + i\zeta_2) &= B(\zeta_1, \zeta_1) - iB(\zeta_1, \zeta_2) + iB(\zeta_2, \zeta_1) - i^2B(\zeta_2, \zeta_2) \\ &= 1 + 1 = 2. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Así, en virtud de (6.20) y (6.21), se tiene que $\eta(\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle) = [\zeta_1 + i\zeta_2] \in \mathscr{O}$. Ahora, veamos que η es independiente de la base ortonormal positiva elegida para $H = \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle$, para lo cual tomemos $\{\zeta_1', \zeta_2'\} \subset H$ otra base ortonormal positiva de H tal que $\langle \zeta_1', \zeta_2' \rangle = \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle$. Ya que ambas bases tienen la misma orientación, existe

$$g = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$$

que manda una base en la otra, es decir,

$$\begin{aligned} \zeta_1' &= \cos(\theta)\zeta_1 - \operatorname{sen}(\theta)\zeta_2, \\ \zeta_2' &= \operatorname{sen}(\theta)\zeta_1 + \cos(\theta)\zeta_2. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Por lo anterior,

$$\begin{aligned} \zeta_1' + i\zeta_2' &= \cos(\theta)\zeta_1 - \operatorname{sen}(\theta)\zeta_2 + i(\operatorname{sen}(\theta)\zeta_1 + \cos(\theta)\zeta_2) \\ &= (\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))\zeta_1 + (-\operatorname{sen}(\theta) + i\cos(\theta))\zeta_2 \\ &= (\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))\zeta_1 + i(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))\zeta_2 \\ &= e^{i\theta}(\zeta_1 + i\zeta_2), \end{aligned} \tag{6.23}$$

y esto último implica que $[\zeta_1' + i\zeta_2'] = [\zeta_1 + i\zeta_2]$ porque $e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. Por lo tanto, η está bien definida.

A continuación, veamos que η es inyectiva. Sean $< \zeta_1, \zeta_2 >, < \zeta_1', \zeta_2' > \in X_2^+$ tales que $[\zeta_1 + i\zeta_2] = [\zeta_1' + i\zeta_2']$, queremos ver que $< \zeta_1, \zeta_2 > = < \zeta_1', \zeta_2' >$. Ahora, por hipótesis, existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $\zeta_1' + i\zeta_2' = \lambda(\zeta_1 + i\zeta_2)$. Ahora, por (6.21) tenemos que

$$B(\zeta_1 + i\zeta_2, \zeta_1 + i\zeta_2) = 2 = B(\zeta_1' + i\zeta_2', \zeta_1' + i\zeta_2'), \tag{6.24}$$

y, como B es una forma hermitiana, también

$$B(\zeta_1' + i\zeta_2', \zeta_1' + i\zeta_2') = |\lambda|^2 B(\zeta_1 + i\zeta_2, \zeta_1 + i\zeta_2) = 2|\lambda|^2. \tag{6.25}$$

A partir de (6.24) y (6.25) se deduce que $|\lambda|^2 = 1$, esto es, $|\lambda| = 1$, por lo cual $\lambda \in S^1$ y podemos escribir $\lambda = e^{i\theta}$ (con $\theta \in [0, 2\pi]$). Así obtenemos que $\zeta_1' + i\zeta_2' = e^{i\theta}(\zeta_1 + i\zeta_2)$, y luego por (6.22) y (6.23) se sigue que existe

$$g = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$$

que manda una base en la otra. Por lo tanto, $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ y $\{\zeta_1', \zeta_2'\}$ tienen la misma orientación y por ello $< \zeta_1, \zeta_2 > = < \zeta_1', \zeta_2' >$.

Para seguir, veamos que η es sobreyectiva (y, por lo tanto, biyectiva). Sea $[\zeta] \in \mathscr{O}$. Ya que $\zeta \in \widetilde{\mathscr{H}} \setminus \{0\}$, podemos escribir $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$ con $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathscr{H}$ no ambos cero. Ya que $\widetilde{B}(z, z) = 0$, en particular $B(\zeta_1, \zeta_2) = 0$ y $B(\zeta_1, \zeta_1) = B(\zeta_2, \zeta_2)$, y por lo tanto, $\zeta_1 \neq 0$ y $\zeta_2 \neq 0$. Ya que también $B(\zeta, \zeta) > 0$, entonces $B(\zeta_1, \zeta_1) = \frac{1}{2}B(\zeta, \zeta) > 0$. En virtud de lo anterior notamos que

$$\eta\left(\left\langle \frac{\zeta_1}{\sqrt{B(\zeta_1, \zeta_1)}}\, , \, \frac{\zeta_2}{\sqrt{B(\zeta_2, \zeta_2)}} \right\rangle\right) = \left[\frac{1}{\sqrt{B(\zeta_1, \zeta_1)}}(\zeta_1 + i\zeta_2)\right] = [\zeta]\, .$$

Esto muestra la sobreyectividad de η.

Finalmente, mostremos que η es un difeomorfismo. Observamos que η^{-1} es suave porque si tomamos el mapeo $\overline{\eta} : p^{-1}(\mathscr{O}) \subset \widetilde{\mathscr{H}} \setminus \{0\} \longrightarrow X_2(\mathscr{H})$ dado por

$$\zeta_1 + i\zeta_2 \mapsto \left\langle \frac{\zeta_1}{\sqrt{B(\zeta_1,\zeta_1)}} \, , \, \frac{\zeta_2}{\sqrt{B(\zeta_2,\zeta_2)}} \right\rangle , \tag{6.26}$$

donde $p : \widetilde{\mathscr{H}} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(\widetilde{\mathscr{H}})$ es la proyección natural, entonces $\overline{\eta}$ es suave y sobreyectivo, y como $p|_{p^{-1}(\mathscr{O})}$ es suave y una proyección natural, entonces η^{-1} es suave porque $\overline{\eta} = \eta^{-1} \circ p$.

Ahora, notamos que $X_2(\mathscr{H})$ es conexo porque tiene estructura de espacio CAT(0). Esto muestra que $\mathscr{O}$ tiene dos componentes conexas, cada una en biyección con $X_2(\mathscr{H})$, y por ello, para probar que η es suave, basta hacerlo en cada componente. Sin pérdida de generalidad, tomamos $\eta| : (X_2^+)^\circ \longrightarrow \mathscr{O}^+$ el mapeo restringido a $(X_2^+)^\circ$ que es la componente de H_0.

Como $\mathscr{H}$ admite una descomposición $\pm$ respecto a B, podemos suponer que $\mathscr{H} = H_0 \oplus H_1$ donde $H_0 = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$ que es un plano definido positivo respecto a B y H_1 es un subespacio definido negativo respecto a B. Notamos que hay un difeomorfismo

$$X_2(\mathscr{H}) \cong C = \{A \in L(\mathbb{R}^2, H_1)\, , \, \|A\| \leq 1\} \tag{6.27}$$

donde $\mathbb{R}^2 \cong H_0$, $L(\mathbb{R}^2, H_1)$ denota las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en H_1, y $\|A\|$ denota la norma de operador de A (bien definida porque tomamos el supremo sobre $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ que es compacto). Sea $< e_1, e_2 >$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y denotemos por L_A al plano asociado a $A \in C$, entonces el difeomorfismo está dado por

$$L_A =< e_1 + Ae_1, e_2 + Ae_2 > \tag{6.28}$$

y tiene la misma orientación que H_0. Ya que el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt es suave y preserva la orientación, entonces el mapeo $C \longrightarrow \mathscr{O}^+$ que se obtiene como la composición

$$A \mapsto < e_1 + Ae_1, e_2 + Ae_2 > \mapsto < u_A^1, u_A^2 > \overset{\eta}{\mapsto} [u_A^1 + iu_A^2], \tag{6.29}$$

donde $\{u_A^1, u_A^2\}$ es la base normalizada luego del proceso de Gram-Schmidt aplicado a $\{e_1 + Ae_1, e_2 + Ae_2\}$, es claramente C^∞. Y como los primeros dos mapeos son C^∞, se concluye que η es C^∞. Esto prueba lo deseado.

Todo el desarrollo anterior demuestra el siguiente resultado.

Lema 6.1. *Existe un difeomorfismo entre $X_2(\mathscr{H})$ y $\mathscr{O}^+$.*

6.3. El mapeo del semiplano complejo a la grassmaniana

Notamos que al tomar $g = \mathrm{Id}_2$, las ecuaciones (6.12), (6.13) y (6.14) se convierten en

$$\mathrm{Jac}(g_{1,0}(e^{i\theta})) = 1, \tag{6.30}$$

$$\varepsilon_1(e^{i\theta}) = \cos(\theta), \tag{6.31}$$

$$\varepsilon_2(e^{i\theta}) = \mathrm{sen}(\theta). \tag{6.32}$$

Denotemos $\iota = \mathrm{Id}_{S^1} : S^1 \longrightarrow S^1$. A partir de (6.31) y (6.32) se obtiene que

$$\iota(e^{i\theta}) = (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(\theta).$$

Definimos el mapeo $f_s : \mathbb{H}^2 \longrightarrow X_2(\mathscr{H})$ como sigue: tomamos

$$f_s(i) =< \varepsilon_1, \varepsilon_2 >,$$

luego, como i es el único punto fijo por la acción de $\mathrm{PSO}(2)$ (luego de considerar el difeomorfismo $\varphi : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \Delta$), extendemos f_s mediante la acción transitiva de elementos $g \in AN$, esto es,

$$f_s(x + iy) = f_s(g \cdot i) =< \pi_s(g)\alpha, \pi_s(g)\beta > . \tag{6.33}$$

Proposición 6.2. *El mapeo $f_s : \mathbb{H}^2 \longrightarrow X_2(\mathscr{H})$ definido en (6.33) es el único morfismo $\mathrm{PSL}(\mathbb{R})$-equivariante del plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ en la grassmanniana no compacta $X_2(\mathscr{H})$.*

Aunque ya tenemos un mapeo entre $\mathbb{H}^2$ y la grassmaniana no compacta, no es fácil estudiar las propiedades del mismo, es por ello que nos apoyamos en el mapeo $\eta : X_2(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathscr{O}$ dado en la sección anterior y definimos $F_s : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathscr{O}$ como

$$F_s(x + iy) = \eta \circ f_s(x + iy). \tag{6.34}$$

Notamos que por la definición de η y por las propiedades de π_s obtenemos

$$F_s(x + iy) = [\pi_s(g)\alpha + i\pi_s(g)\beta] = [\pi_s(g)(\alpha + i\beta)] = [\pi_s(g)\iota]. \tag{6.35}$$

Usaremos la igualdad anterior para estudiar F_s. En primer lugar vemos que si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ es un elemento de AN, entonces

$$\pi_s(g)(\iota)(e^{i\theta}) = (\mathrm{Jac}(g_{a^{-1},-b})e^{i\theta})^{\frac{1}{2}+s} g_{a^{-1},-b}(e^{i\theta})$$

y por las ecuaciones (6.5) y (6.12) obtenemos de manera explícita que

$$\begin{aligned}\pi_s(g)(\iota)(e^{i\theta}) &= \left(\frac{-4a^{-2}e^{i\theta}}{(ia^{-2}(1+e^{i\theta})-a^{-1}b(1-e^{i\theta}))^2+(1-e^{i\theta})^2}\right)^{\frac{1}{2}+s} \\ &\quad\cdot\frac{ia^{-2}(1+e^{i\theta})+(a^{-1}(-b)-i)(1-e^{i\theta})}{ia^{-2}(1+e^{i\theta})+(a^{-1}(-b)+i)(1-i\theta)} \\ &= \left(\frac{-4a^{-2}e^{i\theta}}{(ia^{-2}(1+e^{i\theta})-a^{-1}b(1-e^{i\theta}))^2+(1-e^{i\theta})^2}\right)^{\frac{1}{2}+s} \\ &\quad\cdot\frac{i(1+e^{i\theta})-(ab+ia^2)(1-e^{i\theta})}{i(1+e^{i\theta})+(-ab+ia^2)(1-e^{i\theta})}.\end{aligned} \tag{6.36}$$

Aplicamos nuevamente el cambio de variable $x = ab$ y $y = a^2$ con lo cual la expresión en (6.36) se simplifica a

$$\begin{aligned}\pi_s(g)(\iota)(e^{i\theta}) &= \left(\frac{-4ye^{i\theta}}{(i(1+e^{i\theta})-x(1-e^{i\theta}))^2+y^2(1-e^{i\theta})^2}\right)^{\frac{1}{2}+s} \\ &\quad\cdot\frac{i(1+e^{i\theta})-(x+iy)(1-e^{i\theta})}{i(1+e^{i\theta})+(-x+iy)(1-e^{i\theta})}.\end{aligned} \tag{6.37}$$

En virtud de (6.37) podemos definir $G_s : \mathbb{R}\times(0,\infty)\times[0,2\pi] \longrightarrow S^1$ dada por

$$G_s(x,y,\theta) = \pi_s(g)(\iota)(e^{i\theta}).$$

Además, claramente G_s es diferenciable en las tres variables y cumple la relación

$$F_s(x+iy) = [G_s(x,y,\cdot)], \tag{6.38}$$

por lo tanto, F_s es suave en $\mathbb{H}^2$. Esto nos permite resolver uno de los problemas que nos interesa:

Pregunta 6.3. *¿Es F_s un mapeo holomorfo?*

Para ello basta con calcular $d_iF_s : T_i\mathbb{H}^2 = \mathbb{C} \longrightarrow T_{[\eta]}\mathscr{O}$ y, como se satisface (6.38), nos basta con hacer el siguiente cálculo:

$$d_iF_s(u+iv) = u\left[\left.\frac{\partial G_s}{\partial x}\right|_{(0,1,\cdot)}\right] + v\left[\left.\frac{\partial G_s}{\partial y}\right|_{(0,1,\theta)}\right].$$

Usamos fuertemente que G_s es un mapeo suave en las tres variables. Para simplificar los cálculos primero evaluamos G_s en $(x,1,\theta)$, después derivamos $G_s(x,1,\theta)$ respecto a x y finalmente evaluamos dicha derivada en $(0,1,\theta)$, con lo cual obtenemos

$$\left.\frac{\partial G_s}{\partial x}\right|_{(0,1,\cdot)} = \frac{i}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+s\right)(e^{2i\theta}-1)+(e^{2i\theta}+1)\right]. \tag{6.39}$$

De manera análoga, evaluamos G_s en $(0, y, \theta)$, a continuación derivamos $G_s(0, y, \theta)$ respecto a y y finalmente evaluamos en $(0, 1, \theta)$, con lo cual el otro valor deseado es

$$\left.\frac{\partial G_s}{\partial y}\right|_{(0,1,\theta)} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} + s\right)(e^{2i\theta} + 1) + (e^{2i\theta} - 1)\right]. \tag{6.40}$$

Finalmente, usamos (6.39) y (6.40) para obtener explícitamente el valor de la diferencial de F_s en i:

$$\begin{aligned} d_iF_s(u + iv) = &\frac{iu}{2}\left[\left(\frac{1}{2} + s\right)(e^{2i\theta} - 1) + (e^{2i\theta} + 1)\right] \\ &+ \frac{v}{2}\left[\left(\frac{1}{2} + s\right)(e^{2i\theta} + 1) + (e^{2i\theta} - 1)\right] \end{aligned} \tag{6.41}$$

Es claro a partir de (6.41) que d_iF_s no es un mapeo $\mathbb{C}$-lineal, por lo tanto, F_s *no es un mapeo holomorfo*. Esto responde de manera negativa la Pregunta 6.3.

Para concluir, mientras se escribía este texto, B. Duchesne, J. Lécureux y M. B. Pozzetti calcularon la constante que relaciona el pullback (bajo F_s) de la forma de Kähler en $\mathscr{O}$ con la forma de Kähler del semiplano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ y obtuvieron que su valor es cero (ver [17, Appendix A]), lo cual mejora los resultados obtenidos en esta sección.

6.4. Líneas de investigación abiertas

En esta sección se presentan algunos problemas adicionales relacionados con las construcciones realizadas en este capítulo.

Sabemos que $\mathscr{O}$ admite una métrica riemanniana h_s, la cual está inducida por la forma hermitiana B_s de signatura $(2, \infty)$, luego, al considerar g_{hyp} es la métrica riemanniana usual de $\mathbb{H}^2$, se puede ver que el pullback de h_s mediante F_s es un múltiplo escalar de g_{hyp}, es decir, $F^*h_s = c_s g_{hyp}$, con $c_s \in \mathbb{R}$, por lo cual de manera natural surge el siguiente problema.

Pregunta 6.4. *¿Cuál es el valor de c_s?, o bien, ¿c_s es independiente de s?*

Por la Proposición 2.9 sabemos que, en el caso de representaciones de $\mathrm{PO}(1, n)^\circ$ en $\mathrm{O}(1, \infty)$, la función $f_s : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^\infty$ definida por (2.9) es la única función $\mathrm{PO}(1, n)^\circ$-equivariante, por lo cual surge la pregunta para representaciones en espacios de índice mayor a 1.

Problema 6.5. *Si $\pi : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{O}(2, \infty)$ es una representación irreducible, ¿existe un único punto K-fijo en $X_2(\mathscr{H})$? Además, ¿el (los) mapeo(s) inducido(s) por la representación π es (son) holomorfo(s)?, ¿o bien es (son) un mapeo(s) lagrangiano(s)?*

A continuación usamos el concepto de longitud de traslación (ver Definición 2.10) para plantear el siguiente problema. Ya que f_s se define en términos de la representación π_s, podemos considerar la longitud de traslación de $\pi_s(g)$ en $X_2(\mathscr{H})$ para cada $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Problema 6.6. *Dado $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, ¿cuál es la longitud de traslación $\ell_{\pi_s}(g)$ de $\pi_s(g)$ al considerarla como isometría de $X_2(\mathscr{H})$? De hecho, debe cumplirse que la función ℓ_{π_s} es un múltiplo de la función de longitud de traslación en $\mathbb{H}^2$, es decir, existe una constante $c(s) > 0$ tal que $\ell_{\pi_s} = c(s)\ell_{\mathbb{H}^2}$, ¿cuál es el valor de $c(s)$ en términos de s?*

Referencias

[1] T. Y. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Linear operators in spaces with an indefinite metric*, Pure and applied mathematics, John Wiley and Sons, Great Britain, 1989. – citado en p. VII

[2] B. Bekka, P. de la Harpe and A. Valette, *Kazhdan's property* (T), New mathematical monographs 11, Cambridge University Press, USA, 2008. – citado en p. 10, 11, 12, 37, 52, 56, 57

[3] J. Bognár, *Indefinite inner product spaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge, Band 78, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1974. – citado en p. VII, 3, 23, 24, 25

[4] M. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of nonpositive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 319, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1999. – citado en p. 3, 13, 17

[5] K. S. Brown, *Buildings*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag New York, USA, 1989. – citado en p. 55

[6] F. Bruhat, *Sous-groupes compacts maximaux des groupes semi-simples p-adiques*, in Séminaire Bourbaki : annés 1962/63 - 1963/64, exposés 241-276, Séminaire Bourbaki, no. 8 (1964), Talk no. 271, 413-423. – citado en p. 57

[7] M. Burger and A. Iozzi, *Bounded cohomology and totally real subspaces in complex hyperbolic geometry*, Ergodic Theory Dynam. Systems **32**, No. 2 (2012), 467–478. – citado en p. 3

[8] M. Burger, A. Iozzi and N. Monod, *Equivariant embeddings of trees into hyperbolic spaces*, Int. Math. Res. Not. No. 22 (2005), 1331–1369. – citado en p. VII, VII, 1, 2, 3, 4, 32, 55

[9] É. Cartan, *Sur le groupe de la géométrie hypersphérique*, Comment. Math. Helv. Band 4 (1932), 158–171. – citado en p. 33

[10] T. Ceccherini-Silberstein, F. Scarabotti and F. Tolli, *Harmonic Analysis on Finite Groups: Representation Theory, Gelfand Pairs and Markov Chains*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 108, Cambridge University Press, Cambridge, 2008. – citado en p.

[11] T. Delzant and P. Py, *Kähler groups, real hyperbolic spaces and the Cremona group*, Compos. Math. **148**, No. 1 (2012), 153–184. – citado en p. 13, 18, 59

[12] G. van Dijk, *Introduction to harmonic analysis and generalized Gelfand pairs*, Studies in Mathematics 36, de Gruyter, Berlin, 2009. – citado en p. 5

[13] C. Drutu and M. Kapovich, *Geometric group theory*, Colloquium Publications Vol. 63, AMS, Providence, RI, 2018. – citado en p. 52, 53

[14] B. Duchesne, *Des espaces de Hadamard symétriques de dimension infinie et de rang fini*, tesis de doctorado, Université de Genève, Julio 2011. – citado en p. VIII, VIII, 1, 40, 63

[15] B. Duchesne, *Infinite dimensional non-positively curved symmetric spaces of finite rank*, Int. Math. Res. Not. No. 7 (2013), 1578–1627. – citado en p. VIII

[16] B. Duchesne, *Superrigidity in infinite dimension and finite rank via harmonic maps*, Groups Geom. Dyn. 9 (2015), 133–148. – citado en p. 44

[17] B. Duchesne, J. Lécureux and M. B. Pozzetti, *Boundary maps and maximal representations on infinite dimensional Hermitian symmetric spaces*, preprint arXiv:1810.10208 (2018). – citado en p. VIII, 69

[18] J. Faraut, *Analyse harmonique sur les espaces riemanniens symétriques de rang un*, CIMPA, Ecole d'été "Analyse harmonique", Université de Nancy 1, Nancy, 1980. – citado en p. 5

[19] J. Faraut, *Analysis on Lie Groups: An Introduction*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 110, Cambridge University Press, Cambridge, 2008. – citado en p. 5, 6

[20] G.B. Folland, *A course in abstract harmonic analysis*, CRC Press, USA, 1995. – citado en p. 46, 47

[21] A. Friedman, *Foundations of modern analysis*, Dover Publications, New York, 1982. – citado en p. 46

[22] M. Gromov, Asymptotic invariants of infinite groups. In: *Geometric group theory, Vol. 2*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, 1–295. – citado en p. VIII

[23] A. J. Hahn and O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 291, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1989. – citado en p. 57

[24] R. S. Ismagilov, *Unitary representations of the Lorentz group in spaces with indefinite metric*, Izv. Acad. Nauk: SSRR 30 (1966), 497–522. – citado en p. 23, 29

[25] K. D. Johnson and N. R. Wallach, *Composition series and intertwining operators for the spherical principal series. I*, Trans. Amer. Math. Soc. 229 (1977), 137–173. – citado en p. vii, vii, 13, 14, 16, 18

[26] A. W. Knapp, *Representation theory of semisimple groups: an overview based on examples*, Princeton Mathematical Series 36, Princeton University Press, 1986. – citado en p. 13, 54

[27] S. Lang, *Fundamentals of differential geometry*, Graduate Texts in Mathematics 191, Springer-Verlag, New York, 1999. – citado en p. 63

[28] S. Lang, $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$, Graduate Texts in Mathematics 191, Springer-Verlag, New York, 1985. – citado en p. 13

[29] H. Matsumoto, *Analyse harmonique dans les systèmes de Tits bornologiques de type affine*, Lecture Notes in Mathematics 590, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1977. – citado en p. 57

[30] N. Monod, *Notes on functions of hyperbolic type*, preprint arXiv:1807.04157 (2018). – citado en p. 3, 37, 38

[31] N. Monod and P. Py, *An exotic deformation of the hyperbolic space*, Amer. J. Math. 136, No. 5 (2014), 1249–1299. – citado en p. vii, viii, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 28, 37, 40, 41, 59

[32] N. Monod and P. Py, *Self-representations of the Möbius group*, Annales Henri Lebesgue, 2 (2019), 259–280. – citado en p. 3

[33] M. A. Naĭmark, *On commuting unitary operators in spaces with indefinite metric*, Acta Sci. Math. (Szeged) 24 (1963), 177–189. – citado en p. 23

[34] P. Py and A. Sánchez, *Hyperbolic spaces, principal series and* $\mathrm{O}(2,\infty)$, Arch. Math., 114 (2020), 97–105. – citado en p. ix

[35] F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier–Villars, Paris y Akadémiai Kiadó, Budapest, 5éme. éd., 1968. – citado en p. 46

[36] P. J. Sally Jr., *Analytic continuation of the irreducible unitary representations of the universal covering group of* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, Mem. Amer. Math. Soc., no. 69, American Mathematical Society, Providence, RI, 1967. – citado en p. VII, 13, 16, 18

[37] P. J. Sally Jr., *Intertwining operators and the representations of* $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, J. Functional Analysis 6 (1970), 441–453. – citado en p. VII, VII, 13, 16, 18

[38] P. J. Sally Jr., *An introduction to p-adic fields, harmonic analysis and the representation theory of* SL_2, Letters in Mathematical Physics 46 (1998), 1–47. – citado en p. 56

[39] Z. Sasvári, *New proof of Naimark's theorem on the existence of non-positive invariant subspaces for commuting families of unitary operators in Pontryagin spaces*, Mh. Math. 109 (1990), 153–156. – citado en p. 23

[40] I. Satake, *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields*, Publications Mathématiques de lÍHÉS, Vol. 18 (1963), 5–69. – citado en p. 57

[41] M. Simonnet, *Measures and probabilities*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1996. – citado en p. 5

[42] D. Toledo, *Projective varieties with non-residually finite fundamental group*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, Vol. 77 (1993), 103–119. – citado en p. 59

[43] M. Vergne, *Sur les intégrales d'entrelacement de R. A. Kunze et E. M. Stein*, Séminaire Bourbaki 12 (1969/1970), no. 369, 87-106. – citado en p. 16

[44] E. B. Vinberg, *Linear representations of groups*, Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, Vol. 2, Birkhäuser Basel, Germany, 1989. – citado en p. 17

[45] N. R. Wallach, *Application of the higher osculating spaces to the spherical principal series*, J. Differential Geometry 5 (1971), 405–413. – citado en p. 13, 15

[46] N. R. Wallach, *Real Reductive Groups. I*, Pure Appl. Math., vol. 132, Academic Press, Boston, MA, 1988. – citado en p. 13

[47] A. Weil, *Basic number theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 144, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1974. – citado en p. 56