

## Exercices, variétés kählériennes (ou pas), feuille No. 5

**Exercice 0.1.** (Propriétés générales des variétés kählériennes) Soit  $(X^{2n}, \omega, J)$  une variété kählérienne fermée.

1. Rappeler ou démontrer qu'une variété complexe est orientable, et que la structure complexe induit une orientation naturelle.
2. Montrer que si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base complexe de  $T_x X$  et si  $f_1 := J e_1, \dots, f_n := J e_n$  alors :

$$\omega_x^{2n}(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n) > 0.$$

En déduire que

$$\int_X \omega^n > 0.$$

3. En déduire que  $\omega$  n'est pas exacte.
4. Soit à présent  $\Sigma^{2k}$  une sous-variété complexe de  $X$ . Montrer que  $\Sigma$  admet une structure de kähler, et que, lorsque  $\Sigma$  est compacte,  $[\Sigma] \neq 0 \in H_{2k}(X, \mathbb{Z})$ .
5. Prouver de deux façons différentes qu'il n'existe pas de sous-variétés holomorphes fermées (= compactes sans bord) dans  $\mathbb{C}^n$  autres que les unions finies de points.

**Exercice 0.2.** (L'espace  $\mathbb{C}^n$ ) On considère sur  $\mathbb{C}^n$  la base canonique complexe  $(e_1, \dots, e_n)$  et la base canonique réelle  $(e_1, i e_1, \dots, e_n, i e_n)$ . Pour  $z \in \mathbb{C}^n$ , on écrit  $z = (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + i y_1, \dots, x_n + i y_n)$ . On définit alors

$$\lambda_{st} := \frac{1}{\pi} (x_1 dy_1 + \dots + x_n dy_n),$$

$$\omega_{st} := \frac{1}{\pi} (dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n).$$

1. Vérifier que  $d\lambda_{st} = \omega_{st}$ .
2. Montrer que

$$\int_{B^{2n}(1)} \omega_{st}^n = 1.$$

3. On pose  $\frac{\partial}{\partial \theta}(p) := \left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} e^{2i\pi\theta} \cdot p$ . Montrer que  $\lambda_{st}(\frac{\partial}{\partial \theta}) = 1$ .

**Exercice 0.3.** (L'espace projectif complexe  $\mathbb{P}^n$ ) On rappelle que

$$\mathbb{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim_1 = S^{2n+1} / \sim_2$$

où  $z \sim_1 \lambda z$  et  $z \sim_2 e^{2i\pi\theta} z$  ( $\lambda \in \mathbb{C}^*, \theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ). On note  $\pi_1, \pi_2$  les projections associées sur  $\mathbb{P}^n$  et  $[z_0 : \dots : z_n]$  la classe de  $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  sous la relation d'équivalence  $\sim_1$ .

1. Rappeler ou montrer que les applications

$$\begin{aligned} \phi_i : \quad U_i &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ [z_0 : \dots : z_n] &\longmapsto \left( \frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right) \end{aligned}$$

fournissent un atlas holomorphe de  $\mathbb{P}^n$ .

2. Montrer que la structure complexe  $J_{st}$  sur  $\mathbb{C}^{n+1}$  est invariante par multiplication par  $\lambda \in \mathbb{C}$ . En déduire une structure presque-complexe  $J$  sur  $\mathbb{P}^n$ , que l'on décrira.

3. Montrer que  $\phi_i^* J_{st} = J$ , et en déduire que  $J$  est une structure complexe (presque-complexe intégrable). Soit  $T^{\mathbb{C}} S^{2n+1} := TS^{2n+1} \cap J_{st} TS^{2n+1}$ ,  $\tilde{J} := J_{st}|_{T^{\mathbb{C}} S^{2n+1}}$ ,  $\phi_\theta : z \mapsto e^{2i\pi\theta} z$ ,  $\frac{\partial}{\partial\theta}(p) = \frac{d}{d\theta}|_{\theta=0} \phi_\theta(p)$  le vecteur défini dans l'exercice ci-dessus, et  $N(p)$  le vecteur unitaire sortant normal à  $S^{2n+1}$  en  $p$ .

4. Montrer que  $T_p^{\mathbb{C}} S^{2n+1} = \langle \frac{\partial}{\partial\theta}(p), N(p) \rangle^\perp$ .

5. Montrer que  $\phi_\theta^* \tilde{J} = \tilde{J}$ .

6. Montrer que  $d\pi_2 : (T_z^{\mathbb{C}} S^{2n+1}, \tilde{J}) \rightarrow (T_{\pi_2(z)} \mathbb{P}^n, J)$  est un isomorphisme.

7. Montrer que  $\phi_\theta^* g_{st}|_{S^{2n+1}} = g_{st}$ , puis que  $\phi_\theta^* \omega_{st}|_{T^{\mathbb{C}} S^{2n+1}} = \omega_{st}$  (on rappelle que  $\omega_{st}$  est la forme symplectique standard sur  $\mathbb{C}^{n+1}$ ).

8. En déduire que  $\omega := \pi_* \omega_{st}$  est une deux-forme différentielle bien définie sur  $\mathbb{P}^n$ , et que  $\omega_{FS}(\cdot, J\cdot)$  est une métrique riemannienne sur  $\mathbb{P}^n$ .

9. Soient  $U, V, W$  des champs de vecteurs qui commutent sur un voisinage de  $p \in \mathbb{P}^n$  et  $\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}$  des relevés de  $U, V, W$  dans  $T^{\mathbb{C}} S^{2n+1}$   $\phi_\theta$ -invariants. Montrer que  $\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}$  commutent. En utilisant que

$$d\omega(U, V, W) = U \cdot \omega(V, W) - V \cdot \omega(U, W) + W \cdot \omega(U, V),$$

démontrer que  $d\omega_{FS} = 0$  en  $p$ , puis que  $\omega_{FS}$  est fermée sur  $\mathbb{P}^n$ .

10. En déduire que  $(\mathbb{P}^n, \omega_{FS}, J)$  est une variété kählérienne. Faire le lien avec la définition de la métrique kählérienne sur  $\mathbb{P}^n$  vue dans le TD no. 2.

11. Montrer que

$$\int_{\mathbb{P}^n} \omega_{FS}^n = \int_{S^{2n+1}} \omega_{st} \wedge \lambda_{st} = 1.$$

**Exercice 0.4.** (L'espace projectif, suite) Sur  $\mathbb{C}^{n+1}$ , on note  $(e_0, \dots, e_n)$  la base canonique. On rappelle que  $\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$  et que  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$  est la projection naturelle. On définit  $\mathbb{P}^k := \pi(\langle (e_0, \dots, e_k) \rangle - \{0\}) \subset \mathbb{P}^n$ . On rappelle que  $H_{2k+1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = 0$  et  $H_{2k}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \langle [\mathbb{P}^k] \rangle$ .

1. En utilisant la question 4 de l'exercice 2, montrer que la restriction à  $\mathbb{P}^k$  de la forme de kähler  $\omega_{FS}(n)$  définie ci-dessus sur  $\mathbb{P}^n$  coïncide avec  $\omega_{FS}(k)$ .

2. En déduire que

$$\int_{\mathbb{P}^k} \omega_{FS}^k = 1$$

3. En déduire que  $[\omega_{FS}] \in H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$  (ceci signifie que son intégrale sur n'importe quelle variétés fermée est dans  $\mathbb{Z}$ ).

4. En déduire aussi que pour toute variété holomorphe fermée  $\Sigma \subset \mathbb{P}^n$  de dimension  $2k$ , on a

$$\int_{\Sigma} \omega_{FS}^k \in \mathbb{N}_*.$$

5. Montrer qu'une variété projective fermée (c'est-à-dire biholomorphe à une sous-variété de  $\mathbb{P}^N$  pour un certain  $N$ ) a des sous-variétés complexes de toutes les dimensions. Indication : on procédera par récurrence en produisant des hypersurfaces. Pour celles-ci, on intersectera  $\Sigma$  par la projection d'hyperplans complexes génériques (théorème de Sard).

**Exercice 0.5.** (Un tore (kählérien) non algébrique) Sur  $\mathbb{C}^2$ , on pose  $e_1 := {}^t(\frac{1}{\sqrt{\pi}}, 0)$ ,  $e_2 := {}^t(0, \frac{1}{\sqrt{\pi}})$ ,  $f_1 := ie_1$ ,  $f_2 := ie_2$ , de sorte que  $(e_1, e_2)$  est la base standard de  $\mathbb{C}^2$ , et  $(e_2, e_2, f_1, f_2)$  est une base de  $\mathbb{C}^2$  vu comme espace vectoriel réel. On a également les fonctions  $z_1, z_2, x_1, x_2, y_1, y_2$ .

1. Vérifier que  $(e_1, f_1, e_2, f_2)$  est une base symplectique de  $\mathbb{C}^2$ .

Soient  $p, q, r, s \in \mathbb{R}$  linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ , et tels que  $pq - rs \notin \mathbb{Q}$ . On pose  $v_1 := e_1$ ,  $v_2 := e_2$ ,  $v_3 := pf_1 + qf_2$ ,  $v_4 := rf_1 + sf_2$   $\Lambda := \mathbb{Z}\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$  et  $T := \mathbb{C}^2 / \Lambda$ .

2. Montrer que les formes  $dx_1, dx_2, dy_1, dy_2$  définies sur  $\mathbb{C}^2$  définissent des formes sur  $T$ . Montrer qu'il en est de même des champs de vecteurs  $e_1, e_2, f_1, f_2$ .
3. Montrer que  $T$  est une variété kählérienne.

On se propose de démontrer que  $T$  n'est pas projective, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de plongement holomorphe de  $T$  dans  $\mathbb{P}^N$ . Ainsi,  $T$  fournit un exemple de variété kählérienne non-projective. On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'il existe un plongement holomorphe  $\Phi : T \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ . On définit une nouvelle forme de Kähler sur  $T$  par  $\omega := \Phi^* \omega_{FS}$ , où  $\omega_{FS}$  est la forme de Kähler sur  $\mathbb{P}^N$  définie dans les exercices précédents.

4. Montrer que  $\omega \in H^2(T, \mathbb{Z})$ .
5. En reprenant le TD 2, montrer qu'il existe une autre forme de Kähler  $\omega'$  sur  $T$ , avec  $[\omega'] = [\omega] \in H^2(T, \mathbb{Z})$ , telle que

$$\omega' = \alpha dx_1 \wedge dy_1 + \beta dx_2 \wedge dy_2 + \gamma dx_1 \wedge dy_2 + \gamma' dx_2 \wedge dy_1 + \delta dx_1 \wedge dx_2 + \delta' dy_1 \wedge dy_2,$$

où  $\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \delta, \delta' \in \mathbb{C}$  sont des constantes.

6. En utilisant le fait que  $\omega'$  est de Kähler, montrer que  $\gamma = \gamma'$  et  $\delta = \delta'$ .
7. On note  $T_{i,j} := \langle v_i, v_j \rangle / \Lambda$ . Montrer que  $T_{i,j}$  est une sous-variété de dimension 2 de  $T$ . En déduire que

$$\int_{T_{i,j}} \omega' \in \mathbb{Z}.$$

8. En déduire que  $\delta, (ps - qr)\delta, p\alpha + q\gamma, r\alpha + s\gamma, q\beta + p\gamma, r\gamma + s\beta$  sont tous des nombres entiers relatifs.
9. En prenant en compte les conditions d'irrationalité imposées à  $p, q, r, s$ , en déduire que  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ . (On pourra introduire la matrice  $A := \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ ).

**Exercice 0.6.** Soit  $X$  une variété complexe munie d'une métrique kählérienne  $h = g - i\omega$ .

1. Montrer que le produit extérieur avec  $\omega$  est injectif sur les 1-formes si  $\dim_{\mathbb{C}} X \geq 2$ .
2. Soit  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction lisse. On suppose que la métrique  $\phi h$  est kählérienne et que  $X$  est connexe. Montrer que  $\phi$  est constante.

**Exercice 0.7.** Soit  $X$  une variété complexe et  $L \rightarrow X$  un fibré en droite holomorphe muni d'une métrique hermitienne  $h$ .

1. Soit  $U$  un ouvert de  $X$  et  $s_1$  et  $s_2$  deux sections holomorphes partout non-nulles de  $L$  sur  $U$ . Montrer que

$$\partial \bar{\partial} h(s_1, s_2) = \partial \bar{\partial} h(s_2, s_2)$$

sur  $U$ . Montrer que cette 2-forme sur  $U$  est de type  $(1, 1)$ , on la note  $\omega_{h,U}$ . Cette forme existe dès qu'il existe une section holomorphe sans zéros sur  $U$ .

2. Montrer qu'il existe une  $(1, 1)$ -forme  $\omega_h$  sur  $X$  ayant la propriété que pour tout ouvert  $U \subset X$  tel qu'il existe une section holomorphe partout non-nulle de  $L$  sur  $U$ ,  $\omega_h = \omega_{h,U}$  sur  $U$ . Autrement dit, les formes  $\omega_{h,U}$  se recollent en une forme globale sur  $X$ . Cette forme est appelée forme de courbure de la métrique  $h$ .
3. Montrer que  $\omega_h$  est fermée.
4. Montrer que la classe de cohomologie de  $\omega_h$  ne dépend que de  $L$  et pas de  $h$ .
5. (à relire après avoir vu la théorie de Hodge des variétés kählériennes et le lemme du  $\partial \bar{\partial}$ ) On suppose  $X$  kählérienne compacte. Soit  $\omega$  une  $(1, 1)$ -forme réelle cohomologue à  $\omega_h$ . Montrer qu'il existe une métrique  $h'$  sur  $L$  telle que  $\omega = \omega_{h'}$ .

**Exercice 0.8.** Soit  $X$  une variété complexe et  $(E, h) \rightarrow X$  un fibré vectoriel holomorphe muni d'une métrique hermitienne. On note  $E_x$  la fibre de  $E$  au-dessus d'un point  $x \in X$ .

1. Définir naturellement  $\mathbb{P}(E)$  et vérifier que c'est une variété complexe munie d'une submersion holomorphe  $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ . On note  $(x, D \subset E_x)$  un point arbitraire de  $\mathbb{P}(E)$ . Ici  $D \subset E_x$  est une droite complexe.

2. On considère le fibré tiré en arrière  $\pi^*E \rightarrow \mathbb{P}(E)$ . La fibre au-dessus de  $(x, D \subset E_x)$  s'identifie à  $E_x$ . Soit  $S$  le sous-fibré en droites de  $\pi^*E \rightarrow \mathbb{P}(E)$  dont la fibre au-dessus de  $(x, D \subset E_x)$  s'identifie à  $D$ . On note  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$  le dual de  $S$ . Montrer que  $h$  induit naturellement des métriques hermitiennes sur les fibrés  $\pi^*E$ ,  $S$ ,  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ .
3. Montrer que la forme de courbure, notée  $\omega_E$  de la métrique correspondante sur  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$  (qui est une 2-forme sur  $\mathbb{P}(E)$ ) est en restriction à chaque fibre

$$\mathbb{P}(E)_x \simeq \mathbb{P}(E_x)$$

la forme de "Fubini-Study" de  $\mathbb{P}(E_x)$  induite par  $h_x$ . (Cette question se ramène à un calcul sur  $\mathbb{P}^n$ ,  $x$  ne varie pas!)

4. On suppose  $X$  kählérienne compacte. Soit  $\omega$  une forme de Kähler sur  $X$ . Montrer que la forme

$$\omega_E + C\pi^*\omega$$

est kählérienne sur  $\mathbb{P}(E)$  si  $C > 0$  est une constante suffisamment grande.

**Exercice 0.9.** Soit  $X$  une variété complexe et  $D \subset X$  une hypersurface lisse. Prenons un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $X$  et des fonctions holomorphes  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $U_i \cap D = \{f_i = 0\}$  et telles que  $f_i$  est une submersion le long de  $\{f_i = 0\}$ .

1. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$  telles que  $f_j = f_i g_{ij}$  sur  $U_i \cap U_j$ .
2. On définit un fibré en droite holomorphe  $L \rightarrow X$  de la façon suivante. On considère l'union disjointe

$$\bigsqcup U_i \times \mathbb{C} \tag{1}$$

et on identifie  $(z, v) \in U_i \cap U_j \times \mathbb{C} \subset U_i \times \mathbb{C}$  à  $(z, g_{ij}(z)v) \in U_i \cap U_j \times \mathbb{C} \subset U_j \times \mathbb{C}$ .

3. Vérifiez que vous comprenez cette définition, c'est-à-dire que le quotient de l'espace (1) par la relation d'équivalence engendrée par les identifications ci-dessus est bien l'espace total d'un fibré en droite holomorphe sur  $X$ .
4. Vérifiez que  $L$  est trivial sur le complémentaire de  $D$ .
5. Vérifiez que la 1-forme holomorphe  $df_i$  sur  $U_i$  définit (sur  $U_i \cap D$ ) une section holomorphe partout non-nulle du dual du fibré normal de  $D$  dans  $X$ . Indice : quel est le noyau de  $(df_i)_p$  pour  $p \in U_i \cap D$  ?
6. Vérifier que le fibré  $L$  restreint à  $D$  est isomorphe au dual du fibré normal de  $D$  dans  $X$ .

Remarques : le fibré  $L$  décrit ci-dessous est aussi connu sous le nom de  $\mathcal{O}_X(-D)$ , l'isomorphisme décrit dans la dernière question est une incarnation possible de la formule d'adjonction.

**Exercice 0.10.** Soit  $(X, \omega)$  une variété kählérienne et  $Y$  une sous-variété complexe compacte. On note  $\pi : X_Y \rightarrow Y$  l'éclaté de  $X$  le long de  $Y$ . On rappelle que la préimage  $\pi^{-1}(Y)$  s'identifie naturellement à l'espace total du fibré  $\mathbb{P}(N_Y) \rightarrow Y$  où  $N_Y$  est le fibré normal de  $Y$ . On rappelle aussi (voir exercice 8) qu'il existe un fibré en droite naturel noté  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_Y)}(1)$  sur  $\mathbb{P}(N_Y)$ .

1. Vérifiez que le fibré en droite  $L := \mathcal{O}_{X_Y}(-\pi^{-1}(Y))$  (avec les notations de la remarque ci-dessus...) restreint à  $\pi^{-1}(Y) \simeq \mathbb{P}(N_Y)$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_Y)}(1)$ . Si besoin voir page 82-83 du livre de C. Voisin (édition française).
2. Soit  $\lambda$  une forme réelle fermée de type  $(1, 1)$  sur  $X_Y$ , nulle en dehors d'un voisinage compact de  $\pi^{-1}(Y)$  et dont la restriction aux fibres de  $\pi : \pi^{-1}(Y) \rightarrow Y$  est strictement positive. Montrer alors que  $\lambda + C\pi^*\omega$  est une forme de Kähler sur  $X_Y$  si  $C > 0$  est une constante suffisamment grande.
3. Pour conclure il reste à montrer l'existence d'une forme  $\lambda$  comme dans la question précédente. On note  $s$  une section holomorphe partout non-nulle de  $L := \mathcal{O}_{X_Y}(-\pi^{-1}(Y))$  définie hors de  $\pi^{-1}(Y)$ . On fixe une métrique  $h^*$  sur le vectoriel  $N_Y \rightarrow Y$ . On rappelle que cette métrique induit une autre métrique notée  $h^{**}$  sur le fibré  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_Y)}(1)$  de forme de courbure notée  $\omega_*$ . La forme  $\omega_*$  est donc une  $(1, 1)$  forme fermée sur l'espace total de  $\mathbb{P}(N_Y)$ , qui est positive sur les fibres de  $\mathbb{P}(N_Y) \rightarrow Y$ . Montrer qu'il existe une métrique hermitienne  $h_L$  sur  $L$  telle que  $h(s, s) = 1$  hors d'un voisinage de  $\pi^{-1}(Y)$  et telle que  $h_L$  coïncide avec  $h^{**}$  sur  $\pi^{-1}(Y) \simeq \mathbb{P}(N_Y)$ .
4. Montrer que la forme de courbure  $\lambda$  de  $h_L$  a les propriétés désirées. Conclure.