Cours de M2
Théorie de Hodge
Université de Strasbourg, Hiver 2022

Exercices, variétés complexes, feuille No. 4

Exercice 0.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ (avec $n \geq 2$). Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que f ne s'annule pas sur l'ensemble $\{z = (z_1, \ldots, z_n) \in U | z_1 \neq 0 \,\mathrm{ou}\, z_2 \neq 0\}$. Montrer que f ne s'annule pas sur U.*

Exercice 0.2. *Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que toutes les dérivées partielles de f (de n'importe quelle ordre) sont des fonctions holomorphes.*

Exercice 0.3. *(inégalités de Cauchy) Soit $p \in \mathbb{C}^n$ et $f : \Delta(p, (r_1, \ldots, r_n)) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que $|f|$ est bornée par M sur $\Delta(p, (r_1, \ldots, r_n))$. Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice, on note $\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}$. Montrer qu'on a l'inégalité :*

$$|\partial^\alpha f(p)| \leq M \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j!}{r_j^{\alpha_j}}.$$

Exercice 0.4.

1. *(principe du maximum) Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit p_0 un point de U. On suppose que $|f|$ admet un maximum local en p_0. Montrer que f est constante au voisinage de p_0.*
2. *Soit X une variété complexe compacte et connexe. Montrer que toute fonction holomorphe sur X est constante.*
3. *Soit X une sous-variété complexe et compacte de $\mathbb{C}^N$. Montrer que X est une union finie de points.*

Exercice 0.5. *Si $\Delta(p, (r_1, \ldots r_n)) \subset \mathbb{C}^n$ est un polydisque on note Γ son "bord distingué" discuté en cours, c'est-à-dire :*

$$\Gamma = \partial\Delta(p_1, r_1) \times \cdots \times \partial\Delta(p_n, r_n)$$

et

$$K := \overline{\Delta(p, (r_1, \ldots r_n))}.$$

Soit $f : K \to \mathbb{C}$ une fonction continue, holomorphe sur $\Delta(p, (r_1, \ldots r_n))$. Montrer que

$$|f| : K \to \mathbb{R}_+$$

atteint son maximum sur Γ. Autrement dit on a :

$$\sup_K |f| = \sup_\Gamma |f|.$$

Observez que le principe du maximum ne donne à priori que l'égalité $\sup_K |f| = \sup_{\partial K} |f|$. Si vous êtes curieux, vous pouvez googler l'expression "bord de Shilov" pour en savoir plus.

Exercice 0.6. *(une boule n'est pas un polydisque) Soit B une boule de $\mathbb{C}^n$ (qui est muni de la norme euclidienne standard). Fixons un point $q \in \partial B$. Montrer qu'il existe une fonction continue $f : \overline{B} \to \mathbb{C}$, holomorphe sur B, tel que $|f| : \overline{B} \to \mathbb{R}_+$ atteint son maximum au point q et seulement en ce point.*

Exercice 0.7.

1. *Procurez-vous un fichier (pdf, djvu) ou une version papier du livre "Characteristic classes", de Milnor et Stasheff.*

2. *Lire les chapitres 2 et 13 de ce livre. Assurez-vous que vous comprenez la définition d'un fibré vectoriel réel ou complexe sur un espace topologique. Lorsque la base est une variété (resp. une variété complexe) assurez-vous que vous comprenez la notion de fibré C^0, C^∞ (resp. holomorphe).*
3. *Soit L_1 et L_2 deux fibrés vectoriels complexes sur un espace topologique X. Assurez-vous que vous comprenez la définition des fibrés vectoriels $L_1 \oplus L_2$, $L_1 \otimes L_2$, L_1^*.*
4. *On suppose que L_1 est un fibré vectoriel complexe de rang 1 sur un espace topologique X. Montrer que $L_1 \otimes L_1^*$ est isomorphe au fibré trivial $X \times \mathbb{C}$. En déduire que l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels complexes de rang 1 sur X forme un groupe abélien.*
5. *On considère maintenant $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$. Soit $L = \{(v,p) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n, v \in p\}$. Montrer que L a naturellement la structure d'un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur $\mathbb{P}^n$.*
6. *On note $O(-k) = L^{\otimes k}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe une application naturelle de $(\mathbb{C}^{n+1})^*$ dans l'espace des sections holomorphes de $O(1)$ et que cette application est injective.*
7. *On montre maintenant que cette application est surjective. Soit s une section holomorphe de $O(1)$ et $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$ la projection canonique. Montrer que $s \circ \pi$ "définit" naturellement une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ puis que cette fonction s'étend en une fonction holomorphe $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$. Étudier son développement de Taylor à l'origine et montrer que f est linéaire. Conclure.*
8. *Montrer que L n'admet aucune section holomorphe non-nulle. Pour cela on pourra considérer une section holomorphe s de L, utiliser que chaque forme linéaire $\varphi \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$ définit une section de $L^* = L^{-1}$ et voir que $\varphi(s)$ est naturellement une fonction holomorphe sur $\mathbb{P}^n$.*
9. *(optionnel) Soit k un entier ≥ 2. Montrer que l'espace des sections holomorphes de $O(k)$ s'identifie naturellement à l'espace des polynômes homogènes de degré k en les variables $z_1, \ldots, z_{n+1}$. Montrer que le fibré $O(-k)$ n'admet pas de section holomorphe non-triviale.*

Exercice 0.8. *(formes de type (p,q)) On note $\Lambda^k(\mathbb{C}^n)^*$ l'espace des formes k-linéaires alternées sur $\mathbb{C}^n$. Si $I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ est un multi-indice de longueur k on note $dz_I = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{i_k}$. De même on note $d\overline{z}_I = d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{i_k}$.*

1. *Soient $p, q \geq 0$ des entiers tels que $p + q = k$. On dit qu'un élement $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{C}^n)^*$ est de type (p,q) si α est combinaison linéaire d'éléments de la forme $dz_I \wedge d\overline{z}_J$ où I est un multi-indice de longueur p et J un multi-indice de longueur q. On note $\Lambda^{p,q}(\mathbb{C}^n)^*$ l'espace des formes de type (p,q). Montrer que*
$$\Lambda^k(\mathbb{C}^n)^* = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}(\mathbb{C}^n)^*.$$
Si α est de type (p,q) et $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire, montrer que $A^*\alpha$ est de type (p,q). En particulier on peut définir un élement de type (p,q) de $\Lambda^k V^*$ pour tout espace vectoriel complexe V (de dimension finie) et on a la décomposition
$$\Lambda^k V^* = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} V^*.$$
2. *Soit X une variété complexe et α une k-forme lisse à valeurs complexes sur X. On dit que α est de type (p,q) si pour tout point $x \in X$, $\alpha_x \in \Lambda^{p,q}(T_xX)^*$. Montrer que α est de type (p,q) si et seulement si pour toute carte holomorphe $\varphi : U \subset X \to V \subset \mathbb{C}^n$, $(\varphi^{-1})^*\alpha$ est de type (p,q) sur V i.e.*
$$(\varphi^{-1})^*\alpha = \sum_{|I|=p, |J|=q} a_{IJ} dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$
où les a_{IJ} sont des fonctions C^∞.
3. *Si α est une forme de type (p,q) (sur une variété complexe ou un ouvert de $\mathbb{C}^n$) montrer que $d\alpha$ s'écrit de manière unique comme somme d'une forme de type $(p+1,q)$ et d'une forme de type $(p,q+1)$. On "appelle" $\partial\alpha$ la composante de type $(p+1,q)$ et $\overline{\partial}\alpha$ la composante de type $(p,q+1)$. On a donc $d\alpha = \partial\alpha + \overline{\partial}\alpha$. Si α est une k-forme quelconque, on écrit*
$$\alpha = \sum_{p+q=k} \alpha^{p,q}$$

et on définit $\partial\alpha = \sum_{p+q=k} \partial\alpha^{p,q}$ et $\overline{\partial}\alpha = \sum_{p+q=k} \overline{\partial}\alpha^{p,q}$.

4. Montrer que les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ vérifient $\partial^2 = 0$, $\overline{\partial}^2 = 0$ et $\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$.

Exercice 0.9. *(un théorème de Cartan) On va démontrer le théorème suivant dû à Cartan.*

Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert borné et $f : U \to U$ une application holomorphe. S'il existe un point $p \in U$ tel que $f(p) = p$ et $df(p) = \mathrm{Id}$ alors f est l'identité sur U.

Pour démontrer ce théorème on peut supposer que $p = 0$, ce que l'on fait.

1. Montrer qu'on peut écrire
$$f(z) = \sum_{j \geq 0} f_j(z) \tag{1}$$
où f_j est un polynôme homogène de degré k et où la série converge uniformément sur un certain polydisque centré à l'origine. Que dire de f_0 et f_1 ?

2. On suppose $f \neq \mathrm{Id}$ et on considère un entier $k \geq 2$ minimal tel que $f_k \neq 0$. On considère les itérés $f^p = f \circ \cdots \circ f$ (p fois) de f. On écrit f^p comme somme de polynômes homogènes comme dans la décomposition (1) de f. Décrire les premiers termes de cette décomposition pour f^p.

3. Conclure en utilisant les inégalités de Cauchy (ou une version vectorielle adéquate de ces inégalités).

4. Le théorème reste-t-il vrai si U n'est pas borné ?

Exercice 0.10. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2$. Savez-vous ce qu'est une fonction méromorphe sur U ? Attention la définition est plus compliquée qu'en dimension 1. En particulier, une fonction méromorphe sur U n'est pas la même chose qu'une fonction holomorphe $U \to \mathbb{P}^1$.*