Cours de M2
Théorie de Hodge
Université de Strasbourg, Hiver 2022

Exercices, spectre des opérateurs auto-adjoints compacts, feuille No. 3

Dans tout ce qui suit H désigne un espace de Hilbert et $A : H \to H$ un endomorphisme auto-adjoint compact. Autrement dit, A vérifie :

— $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle \ \forall u, v \in H$,

— $A(B(0,1))$ est relativement compact dans H.

L'espace $\mathcal{L}(H)$ est muni de la norme d'opérateur associée à la norme Hilbertienne sur H :

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Le spectre d'un opérateur est défini par

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A - \lambda \mathrm{Id} \ \text{ n'est pas inversible}\}.$$

L'ensemble des valeurs propres de A est

$$\mathrm{VP}\,(A) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists x \neq 0,\ Ax = \lambda x\}.$$

Le but de ce TD est de montrer le résultat suivant :

Théorème 0.1. *Soit H un espace de Hilbert et $A : H \to H$ un opérateur auto-adjoint compact. Les espaces propres de H associés aux valeurs propres non-nulles sont de dimension finie, et les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont deux-à-deux orthogonaux. De plus,*

— *Soit A possède un nombre fini de valeurs propres non-nulles, et alors $\bigoplus_{\lambda \in VP(A)} E_\lambda = H$, la somme directe étant orthogonale. Alors A est diagonalisable dans une base hilbertienne de H.*

— *Soit A possède un nombre infini dénombrable de valeurs propres non-nulles, et alors celles-ci forment une suite qui tend vers 0. Dans ce cas, il existe une base Hilbertienne de H formée de vecteurs propres de A.*

Dans tous les cas, il existe une base hilbertienne $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de H de vecteurs propres de A, associés à des valeurs propres $\lambda_n \in \mathbb{R}$, et λ_n tend vers 0.

Exercice 1. Généralités sur le spectre.

1. *Prouver que $VP(A) \subset \sigma(A)$.*
2. *Prouver que si A est inversible et continu, alors A^{-1} est continue (indication : théorème de l'application ouverte).*
3. *Prouver que si A est inversible, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A + h$ est inversible pour $\|h\| < \varepsilon$.*
4. *En déduire que $\sigma(A)$ est fermé dans $\mathbb{R}$.*
5. *Trouver un espace de Hilbert et un opérateur continu $T : H \to H$ tel que $\sigma(T) \neq VP(T)$ (En l'absence d'idée, on pourra considérer $H = \ell^2(\mathbb{R})$).*

Exercice 2. *Soit $A : H \to H$ un opérateur auto-adjoint compact et $\lambda \in \sigma(A) - \{0\}$. On veut montrer que $\lambda \in VP(A)$. On raisonne par contradiction, et on suppose que $A - \lambda Id$ est injective, mais pas surjective. On pose $H_1 = Im(A - \lambda Id)$, $H_2 = A - \lambda Id(H_1)$, ...*

1. *Montrer que $H_n \subsetneq H_{n-1} \subsetneq \cdots \subsetneq H_1 \subsetneq H$.*
2. *Montrer que les H_i sont des sous-espaces vectoriels fermés. Indication : il suffit de le faire pour H_1. Pour celui-ci, considérer une suite $y_n = (A - \lambda Id)x_n$ qui converge et distinguer selon que x_n est bornée ou non. Le fait que A est compact est évidemment essentiel.*
3. *Construire une suite $x_n \in H_n$ telle que $\|x_n\| = 1$ et $x_n \perp H_{n+1}$.*
4. *Soit $n > m$. En remarquant que $(A-\lambda Id)(x_n - x_m) + \lambda x_n \in E_{m+1}$, montrer que $\|Ax_n - Ax_m\| \geq |\lambda|$. Indication : écrire $A = \lambda Id + (A - \lambda Id)$.*
5. *En déduire une contradiction lorsque $\lambda \neq 0$, et donc que $\lambda \in VP(A)$.*

Exercice 3. *Soit $A : H \to H$ un opérateur auto-adjoint compact.*

1. *Montrer que $\forall \lambda \in \sigma(A) - \{0\}$, $\ker(A - \lambda Id)$ est de dimension finie.*

Soit $\lambda_n \in \sigma(A) - \{0\}$, $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{R}$.

2. *En supposant les λ_n distinctes, montrer que les sous-espaces $E_n := \ker(A - \lambda_n Id)$ sont deux-à-deux orthogonaux.*
3. *En déduire l'existence de $x_n \in E_n$ de norme 1 tels que $x_n \perp \bigoplus_{k \neq n} E_k$.*
4. *Montrer que $\|Ax_n - Ax_m\| \geq \min\{|\lambda_n|, |\lambda_m|\}\|x_n - x_m\|$.*
5. *En déduire que $\lambda = 0$, autrement dit que $\sigma(A) - \{0\}$ est discret.*
6. *En déduire qu'un tel opérateur a un nombre au plus dénombrable de valeurs propres.*

Exercice 4. Bilan. *À partir des exercices 1, 2 et 3, montrer que l'ensemble des valeurs propres Λ d'un opérateur auto-adjoint compact A est un ensemble dénombrable borné de $\mathbb{R}$, dont la seule valeur d'adhérence possible est 0. Ses espaces propres E_λ, $\lambda \in \Lambda - \{0\}$ sont de dimensions finies. En définissant H' comme l'adhérence de $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ dans H, H' est un espace de Hilbert et $A_{|H'}$ admet une base de Hilbert de diagonalisation. Il reste donc à montrer que $H = H'$ pour obtenir le théorème 0.1. Montrer que la restriction de A à l'orthogonal de H' dans H est un opérateur auto-adjoint compact de H', qui est un Hilbert, dans lui-même sans valeur propre.*

Il suffit donc à présent de montrer qu'un opérateur auto-adjoint compact d'un espace de Hilbert a toujours une valeur propre pour obtenir le théorème 0.1.

Exercice 5. *Soit $A : H \to H$ un opérateur auto-adjoint compact non nul.*

1. *Montrer que la fonction $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ n'est pas nulle.*

Quitte à remplacer A par $-A$, on peut supposer que $\lambda := \inf_{\|x\|=1}\langle Ax, x\rangle < 0$. On veut montrer que $\lambda \in \sigma(A)$. On pose $a(u, v) := \langle Au - \lambda u, v\rangle$.

2. *Montrer que $a(u, v)$ est une forme bilinéaire symétrique positive et continue.*
3. *En utilisant l'inégalité de Cauchy-Scwhartz et la continuité, montrer l'existence d'une constante C telle que*
$$\forall v, \qquad a(u, v) \leq Ca(u, u)^{\frac{1}{2}}\|v\|$$
4. *En déduire que $\|Au - \lambda u\| \leq C\sqrt{\langle Au - \lambda u, u\rangle}$.*

Soit alors u_n de norme 1 telle que $\langle Au_n, u_n\rangle \to \lambda$. Quitte à extraire, on peut supposer que Au_n converge vers $v \in H$.

5. *En remarquant que* $\langle Au_n - \lambda u_n, u_n \rangle \to 0$*, montrer que* $\|Au_n - \lambda u_n\|$ *tend vers* 0*, puis que* v *est un vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* λ*.*

Exercice 6. *Appliquer la théorie précédente à l'opérateur* $\Delta^{-1} : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$*.*