Cours de M2
Théorie de Hodge
Université de Strasbourg, Hiver 2022

Exercices, cohomologie de De Rham, feuille No. 2

Quelques références (dont nous nous sommes inspirés) pour trouver plus d'exercices ou de détails sur certains des exercices ci-dessous.

1. Le cours de Patrick Massot à Orsay, voir
`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~pmassot/enseignement/mat553/poly.pdf`
ou
`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~pmassot/enseignement/mat553/`.
2. Le livre de Lafontaine : *Introduction aux variétés différentielles.*
3. Le livre de Bott et Tu : *Differential forms in algebraic topology.*

On utilisera les résultats qui suivent.

1. Soit M une variété. Si X est un champ de vecteurs sur M et α une forme différentielle sur M on a : $L_X\alpha = (i_X d + di_X)\alpha$.
2. Si $(f_t)_{0\leq t\leq 1}$ est une isotopie sur M, engendrée par un champ de vecteurs dépendant du temps X_t, on a
$$\frac{d}{dt} f_t^*\alpha = f_t^* L_{X_t}\alpha.$$
Lorsque $(f_t)_{0\leq t\leq 1}$ provient d'un flot (c'est-à-dire lorsque $X_t = X$ ne dépend pas du temps) on a donc que la forme différentielle $f_t^*\alpha$ ne dépend pas de t si et seulement si $L_X\alpha = 0$.

Exercice 0.1. *(cohomologie de De Rham du tore, degré 1, première méthode) On considère le tore $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Le but de cet exercice est de calculer sa cohomologie de De Rham en degré 1. Par abus de notation on note encore dx_i la 1-forme sur T^n induite par la forme dx_i sur $\mathbb{R}^n$. On note γ_i la sous-variété (c'est une courbe) de dimension 1 de T^n qui est l'image dans T^n de la courbe $t \mapsto te_i$ $(0 \leq t \leq 1)$, e_i étant le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

1. *Quelle est l'intégrale de dx_i sur γ_j (où $i, j \in \{1, \dots, n\}$) ?*
2. *Soit α une 1-forme fermée sur T^n. Montrer qu'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que la 1-forme*
$$\beta := \alpha - \sum_{j=1}^{n} a_j dx_j$$
ait une intégrale nulle sur chacune des courbes γ_i $(1 \leq i \leq n)$.
3. *Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Montrer qu'il existe un ouvert U_i contenant γ_i tel que β soit exacte sur U_i. Montrer ensuite qu'il existe un voisinage ouvert de l'union de toutes les courbes γ_i sur lequel β est exacte.*
4. *Montrer que le complémentaire W de l'union des γ_i dans T^n est difféomorphe à une boule. En déduite que β est exacte sur W, puis que β est exacte sur tout T^n. En déduire une base du groupe $H^1_{dR}(T^n, \mathbb{R})$.*
5. *En écrivant T^3 comme union de trois copies de T^2 et d'une boule, calculer $H^2_{dR}(T^3, \mathbb{R})$ par une méthode similaire. Pouvez-vous généraliser cette méthode pour calculer $H^k_{dR}(T^n, \mathbb{R})$ pour tous k et n ?*

Exercice 0.2. *(cohomologie de De Rham du tore, deuxième méthode) On considère encore le tore $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Le but de cet exercice est de calculer sa cohomologie de De Rham par une autre méthode. On fera usage de la structure de groupe naturelle de T^n. Si $v \in T^n$, on note*
$$tr_v : T^n \to T^n$$
la translation par v. On note X_v le champ de vecteurs constant égal à v sur T^n (dans la trivialisation naturelle du fibré tangent de T^n). On note ϕ_v^t le flot associé de sorte que $tr_v = \phi_v^1$.

1. *Soit α une forme différentielle fermée sur T^n. Établir la formule :*

$$tr_v^*\alpha - \alpha = \int_0^1 (\phi_v^t)^*(di_{X_v}\alpha).$$

2. *On dit qu'une forme différentielle α sur T^n est invariante par translation si $tr_v^*\alpha = \alpha$ pour tout $v \in T^n$. Si α est une forme différentielle sur T^n montrer que la forme*

$$\int_T tr_v^*\alpha \, dv$$

   est invariante par translation. Ici on fait un abus de notation et on note dv une n-forme partout non-nulle sur T^n et invariante par translation. Une telle forme est induite par une forme constante (non-nulle) sur $\mathbb{R}^n$.

3. *Montrer que toute forme différentielle fermée sur T^n est cohomologue à une forme invariante par translation. Montrer également que tout forme invariante est fermée.*
4. *Montrer que les formes différentielles invariantes par translations sur T^n forment une algèbre A (pour le cup produit), isomorphe à l'algèbre extérieure de $\mathbb{R}^n$.*
5. *Soit α une forme invariante par translation et non-nulle sur T^n. Montrer que la classe de cohomologie de De Rham de α est non-nulle (en l'intégrant sur un sous-tore bien choisi).*
6. *Montrer que l'application naturelle $A \to H^*_{dR}(T^n)$ est un isomorphisme d'algèbres.*

Exercice 0.3. *(n-formes à support compact dans $\mathbb{R}^n$, on suit le livre de Lafontaine) Soit α une n-forme (lisse) à support compact sur $\mathbb{R}^n$. Nous allons démontrer que α admet une primitive à support compact si et seulement si α est d'intégrale nulle. Il est toujours vrai que α admet une primitive (sans restriction sur le support) car la cohomologie de De Rham de $\mathbb{R}^n$ est nulle en degré > 0.*

Pour cela nous allons démontrer l'énoncé plus général suivant, qui permet de faire fonctionner une preuve par récurrence. Soit $\alpha(u)$ une n-forme sur $\mathbb{R}^n$, à support compact dans $]0,1[^n$, dépendant de manière C^∞ d'un paramètre $u \in U \subset \mathbb{R}^k$ (où U est ouvert). Si

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(u) = 0$$

pour tout u, alors il existe une famille de $(n-1)$-formes sur $\mathbb{R}^n$, dépendant de manière C^∞ de $u \in U$, à support compact, telles que $\alpha(u) = d(\beta(u))$.

1. *Démontrer le résultat lorsque $n = 1$.*
2. *Continuer la preuve par récurrence sur n. Voir le livre de Lafontaine p. 231-232 pour plus de détails.*

Exercice 0.4. *Nous étudions maintenant un analogue global de l'exercice précédent. Soit M une variété compacte orientée de dimension n.*

1. *Rappeler pourquoi l'intégrale*

$$\int_M \alpha$$

   d'une n-forme α sur M ne dépend que de la classe de cohomomologie de De Rham de α. On note $I : H^n_{dR}(M) \to \mathbb{R}$ l'application (linéaire) induite par l'intégration.

2. *Rappeler pourquoi I est surjective. Dans la suite de l'exercice on montre que I est injective. C'est donc un isomorphisme.*
3. *Soit U un ouvert non-vide quelconque de M. Expliquer pourquoi il existe une n-forme à support compact dans U et dont l'intégrale sur M vaut 1.*
4. *On fixe maintenant un atlas fini $(U_i)_{1\leq i\leq p}$ de M. On fixe une n-forme σ à support compact dans U_0 et d'intégrale 1. On va montrer que pour toute n-forme α sur M il existe un réel t et une $(n-1)$-forme β sur M tels que $\alpha - t\sigma = d\beta$. Expliquer pourquoi il suffit de traiter le cas où α est à support dans l'un des U_i.*

5. *On suppose maintenant que α est à support compact dans U_i. Si $i = 0$, que pouvez-vous dire ? En général expliquer pourquoi il existe une suite finies d'indices $(i_s)_{1 \le s \le m}$ avec $i_1 = i$ et $i_m = 0$ tel que $U_{i_s} \cap U_{i_{s+1}} \neq \emptyset$. Pour chaque entier $k \in \{1, \dots, m-1\}$ on fixe une n-forme σ_k à support compact dans $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}}$ et d'intégrale 1.*
6. *Montrer qu'il existe un réel t_1 tel que $\alpha - t_1\sigma_1$ soit la différentielle d'une forme à support compact dans U_{i_1}. Expliquer pourquoi $\sigma_1 - \sigma_2$ est la différentielle d'une forme à support compact dans U_{i_2}.*
7. *Faites un dessin, itérez puis concluez !*

Exercice 0.5. *Calculer la cohomologie de De Rham (en tous degrés) de $\mathbb{R}^2$ privé de deux points.*

Exercice 0.6. *On rappelle que $\mathbb{CP}^n$ est l'espace des droites complexes de $\mathbb{C}^{n+1}$, autrement dit le quotient de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ par la relation d'équivalence $v \simeq w$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $w = \lambda v$. On note $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ la projection naturelle.*

1. *Vérifier que vous savez ce qu'est une "carte affine standard" de $\mathbb{CP}^n$, un "hyperplan à l'infini" et que vous comprenez les changements de carte entre les cartes affines standards.*
2. *Soit h_0 la métrique hermitienne standard de $\mathbb{C}^{n+1}$:*
$$h_0(u, v) = \sum_{i=1}^{n+1} u_i \overline{v_i}.$$
On définit une métrique hermitienne h sur $\mathbb{CP}^n$ de la manière suivante. Soit $p \in \mathbb{C}^{n+1}$ un vecteur tel que $h_0(p, p) = 1$. Vérifier que $d\pi_p$ admet $\mathbb{C}p$ pour noyau. On peut donc identifier $p^\perp$ et $T_{[p]}\mathbb{CP}^n$ via $d\pi_p$. En transportant la restriction de h_0 à $p^\perp \times p^\perp$ on obtient un produit scalaire $h_{[p]}$ sur $T_{[p]}\mathbb{CP}^n$. Montrer qu'il ne dépend que de $[p]$ (d'où la notation) et pas du choix du représentant de cette droite de norme 1 pour h_0.
3. *Montrer que h est bien une métrique hermitienne lisse. Quelle est son expression dans une carte affine ? On note ω_0 sa partie imaginaire.*
4. *Montrer que ω_0 est fermée.*
5. *Soit α une 2-forme fermée sur $\mathbb{CP}^2$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\beta = \alpha - a\omega_0$ soit d'intégrale nulle sur la droite à l'infini $\{z_1 = 0\}$.*
6. *Montrer que β est exacte sur le complémentaire de $\{z_1 = 0\}$ ainsi que sur un voisinage de $\{z_1 = 0\}$.*
7. *En déduire que β est exacte sur tout $\mathbb{CP}^2$. On pourra admettre que $H^2_{dR}(S^3, \mathbb{R}) = 0$ pour le moment. En déduire que $H^2_{dR}(\mathbb{CP}^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \cdot [\omega_0]$.*
8. *En déduire par récurrence le calcul de $H^2_{dR}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{R})$ pour tout n (utiliser un hyperplan à l'infini, qui s'identifie naturellement à $\mathbb{CP}^{n-1}$).*
9. *On a donc calculé le groupe $H^2_{dR}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{R})$ pour tout n. Savez-vous comment calculer les groupes $H^k_{dR}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{R})$ pour les autres valeurs de k ?*

Exercice 0.7. *(Mayer-Vietoris et bons recouvrements, directement inspiré de Bott et Tu) On note $\Omega^*(M)$ l'algèbre des formes différentielles sur une variété M. Soit $r_{M,O}$ l'application $\Omega^*(M) \to \Omega^*(O)$ de restriction d'une forme de M à O.*

1. *Soit M une variété recouverte par deux ouverts U et V. Montrer que la suite*
$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{(r_{M,U}, r_{M,V})} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{r_{U,U\cap V} - r_{V,U\cap V}} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$
est exacte.
2. *En déduire une suite exacte longue :*
$$\cdots \longrightarrow H^q(U \cap V) \longrightarrow H^{q+1}(M) \longrightarrow H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V) \longrightarrow H^{q+1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots.$$
Plus de détails chez Bott et Tu, pages 22-23.

3. *Soit M une variété. On dit qu'un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ est un bon recouvrement de M si toutes les intersections finies*

$$U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_r}$$

sont des ouverts de M difféomorphes à $\mathbb{R}^n$. En particulier tous les U_α sont difféomorphes à $\mathbb{R}^n$. On peut montrer que toute variété riemannienne possède un bon recouvrement. Savez-vous pourquoi ? (indices : géométrie riemannienne, convexité).

4. *Démontrer qu'une variété possédant un bon recouvrement fini a une cohomologie de De Rham de dimension finie en tout degré. En particulier une variété compacte a une cohomologie de De Rham de dimension finie en tout degré (indice : utiliser Mayer-Vietoris et faire une récurrence sur le nombre d'ouverts dans le recouvrement).*

Exercice 0.8. *(cohomologie de De Rham des sphères)*

1. *Calculer la cohomologie de De Rham du cercle unité de $\mathbb{R}^2$.*
2. *En utilisant une récurrence et Mayer-Vietoris, calculer la cohomologie de De Rham de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour tout n.*