Cours de M2
Théorie de Hodge
Université de Strasbourg, Hiver 2022

Exercices, Formes différentielles, feuille No. 1

1 Formes différentielles

Exercice 1.1. *(formes multilinéaires alternées)*

1. *Montrer que* $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$.
2. *Montrer que* $\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg \alpha} \beta \wedge \alpha$.
3. *Si* α *est une forme* k*-multilinéaire alternée, et si* $v_1, \dots, v_k$ *est une famille liée alors* $\alpha(v_1, \dots, v_k) = 0$.
4. *Montrer que* $e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*(e_1, \dots, e_n) = 1$.
5. *Soit* $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *une application linéaire. Montrer que* $A^* dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = det(A) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.
6. *Si* α, β *sont des formes multilinéaires alternées sur* $\mathbf{R}^n$ *et* $V \in \mathbf{R}^n$, *alors*
$$\iota_V(\alpha \wedge \beta) = (\iota_V \alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \iota_V \beta.$$
(Mise en garde : ce n'est pas simple).

Exercice 1.2. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n. *On dit qu'une forme* p*-linéaire alternée sur* E *est décomposable si c'est le produit extérieur de* p *formes linéaires (elle est indécomposable sinon).*

1. *Lorsque* $k = n$ *ou* $k = n - 1$, *montrer que toute forme* k*-linéaire alternée sur* E *est décomposable. Indication pour* $k = n - 1$ *: si* ω *est une forme* $(n-1)$*-linéaire alternée non-nulle, étudier le noyau de l'application*
$$\begin{array}{ccc} E^* & \to & \Lambda^n E^* \\ \theta & \mapsto & \theta \wedge \omega \end{array}.$$
On pourra prendre une base $(e_i^*)_{1 \le i \le n-1}$ *de ce noyau, la compléter en une base* $(e_i^*)_{1 \le i \le n}$ *de* E^* *et décomposer* ω *comme somme de produits extérieurs des* e_i^*.
2. *Lorsque* $n = 3$, *montrer que toute forme* k*-linéaire alternée est décomposable (pour tout* k*).*
3. *Donner un exemple de forme bilinéaire alternée non décomposable sur* $\mathbf{R}^4$.
4. *Soit* θ *une forme linéaire sur* E. *Montrer qu'une forme* p*-linéaire alternée* α *peut s'écrire sous la forme*
$$\alpha = \theta \wedge \beta$$
(où β *est une forme* $(p-1)$*-linéaire) si et seulement si* $\alpha \wedge \theta = 0$.

Exercice 1.3. *Soit* U_1 *et* U_2 *des ouverts de* $\mathbf{R}^n$, α *une forme différentielle sur* U_2, V *un champs de vecteurs sur* U_2 *et* $f : U_1 \to U_2$ *une application différentiable. (On suppose* f, α, V *de classe* C^∞.*) Montrer les propriétés suivantes.*

1. $d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha)$,
2. *(si* f *est un difféomorphisme local)* $f^*(\iota_V \alpha) = \iota_{f^*V} f^*\alpha$ *(comprendre la définition de* f^*V *fait partie de l'exercie),*
3. $(f \circ g)^*\alpha = g^*(f^*\alpha)$,
4. $L_V d\alpha = dL_V\alpha$.

Exercice 1.4. *(formes différentielles et fonctions holomorphes)*

1. *On rappelle que* $dz = (dx + idy)$. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$. *Pour une application* C^∞ $f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \simeq \mathbb{C} \to \mathbf{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, *calculer* $d(fdz)$ *et montrer que* f *est holomorphe si et seulement si* $d(fdz) = 0$.
2. *Montrer que si* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ *est de classe* $\mathbb{C}^1$,
$$\int_{[0,1]} \gamma^*(fdz) = \int_0^1 f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt =: \int_\gamma f(z)dz.$$
3. *Montrer que si* $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *est holomorphe, alors pour tout lacet* $\gamma : [0,1] \to \Omega$ *contractile dans* Ω *(c'est-à-dire homotope à un lacet constant dans* Ω*),*
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$
4. *Montrer qu'une* 1*-forme* α *sur* Ω *dont l'intégrale sur tout lacet contractile est nulle est fermée. En déduire que* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *est holomorphe si et seulement si*
$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$
pour tout lacet contractile dans Ω.

Exercice 1.5. *Soit* ω *la* n*-forme sur* $\mathbf{R}^{n+1}$ *définie par la formule :*
$$\omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i dx_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$
Montrer que pour tout $A \in \mathrm{SL}(\mathbf{R}^{n+1})$ *on a* $A^*\omega = \omega$ *et que, à multiplication par une constante près,* ω *est la seule* n*-forme sur* $\mathbf{R}^{n+1}$ *ayant cette propriété.*

Indication : si $\mathrm{vol} = dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n$, *on a* $\omega = \iota_V \mathrm{vol}$ *où* V *est le champ de vecteurs radial défini par :* $V(x) = x$. *Utiliser la seconde question du troisième exercice.*

2 Quelques résultats de topologie différentielle

Exercice 2.1. *(homotopies entre difféomorphismes) Soit* M *une variété orientable et* Ω *une forme volume sur* M. *Toutes les applications considérées dans ce qui suit sont* C^∞. *Une homotopie entre deux applications* $f_0, f_1 : M \to M$ *est une application* $F : M \times [0,1] \to M$ *telle que* $F(\cdot, 0) = f_0$ *et* $F(\cdot, 1) = f_1$.

1. *Soit* $f : M \to M$ *un difféomorphisme homotope à* Id *et* $F : M \times [0,1] \to M$ *une homotopie entre* Id *et* f. *Calculer de deux façons différentes*
$$\int_{M\times[0,1]} d(F^*\Omega)$$
et en déduire que f *préserve l'orientation.*
On s'intéresse maintenant à des cas particuliers de la situation précédente.
2. *Montrer que* $-\mathrm{Id} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ *renverse l'orientation. Montrer en général que* $-\mathrm{Id} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *renverse l'orientation si et seulement si* n *est pair.*
3. *Montrer que* $-\mathrm{Id} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *et* $\mathrm{Id} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *sont homotopes si et seulement si* n *est impair.*

Exercice 2.2. *(théorème de Brouwer) Soit* $B \subset \mathbf{R}^n$ *la boule fermée de rayon* 1 *et* $S := \partial B$ *la sphère. Soit* $f : B \to B$ *une application de classe* C^1. *On suppose par l'absurde que* f *n'a pas de point fixe.*

1. *En utilisant l'absence de point fixe pour f, construire une application $g : B \to S$ telle que* $g_{|S} = \mathrm{Id}$.
2. *Soit λ une forme volume sur S. En utilisant la formule de Stokes pour la forme $g^*\lambda$, trouver une contradiction.*

Exercice 2.3. *(théorème de la boule de billard chevelue) Soit $X : \mathbb{S}^{2k} \to \mathbb{S}^{2k}$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur une sphère de dimension paire. On veut montrer que X a un zéro. On raisonne par l'absurde et on suppose donc que X ne s'annule pas.*

1. *Montrer que sous cette hypothèse, il existe un champ de vecteur unitaire de classe C^1 sur $\mathbb{S}^{2k}$, que l'on note V.*
2. *Soit*
$$\begin{array}{cccc} F: & [0,1] \times \mathbb{S}^{2k} & \to & \mathbb{R}^{2k+1} \\ & (t,x) & \mapsto & \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)V(x) \end{array}$$
Montrer que F est à valeurs dans $\mathbf{R}^{2k+1}$.
3. *Montrer que F fournit une homotopie entre* Id *et* $-\mathrm{Id}$. *En déduire une contradiction.*