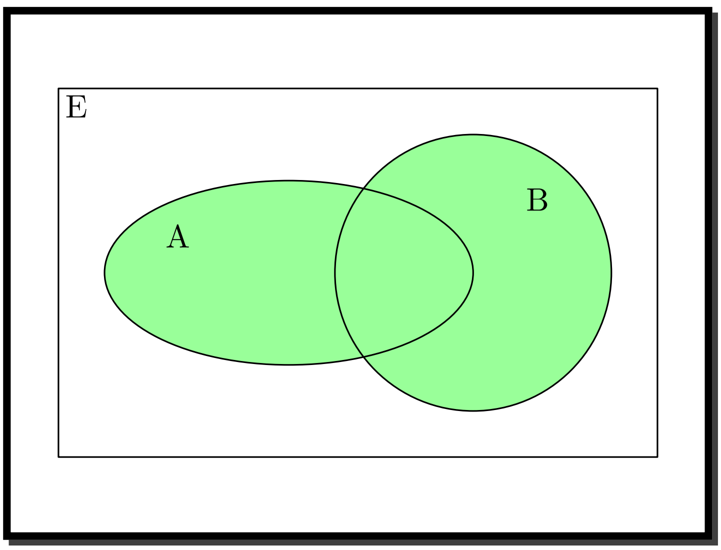
Université Grenoble Alpes

UE MAT101

Langage mathématique
Algèbre et géométrie élémentaires



Portail Mathématiques-Informatique

27 septembre 2020

TABLE DES MATIÈRES

AVERTISSEMENT AU LECTEUR

Ce polycopié est destiné aux étudiants de l'Unité d'Enseignement MAT101. Cette unité d'enseignement est obligatoire pour les étudiants entrant en première année de license à l'Université Grenoble Alpes par le portail Mathématiques et Informatique.

Ce polycopié est disponible en intégralité sur les serveurs d'enseignement (Chamilo et Moodle), sur lesquels on mettra également les différents chapitres et sous-chapitres en fichiers indépendants.

Ce polycopié est un outil pédagogique qui vient *complérer* le cours. Le point de vue du cours et celui du polycopié peuvent différer offrant deux façons d'aborder une même notion mathématique.

Ce texte reprend les notions mathématiques à la base mais s'appuie, notamment pour les exemples, sur les programmes de l'enseignement secondaire.

Les chapitres de ce polycopié se décomposent de la façon suivante :

1. Le cours contient les notions à assimiler. Il convient d'en apprendre les définitions et les énoncés des résultats principaux. Les démonstrations données doivent être *comprises*. Elles servent de modèle pour les exercices de raisonnement. C'est en comprenant les démonstrations, qu'on apprend à en rédiger. La plupart des démonstrations sont à connaître. Quelques-unes sont particulièrement compliquées : il est plus important de les comprendre que de les apprendre par cœur.

2. La fiche de révision est un support qui résume les notions indispensables. Après avoir travaillé votre cours, lisez la fiche de révision : vous devez être capable de réciter chaque définition ou résultat de cette fiche sans la moindre hésitation (y compris l'énoncé des hypothèses éventuelles), sinon cela veut dire que vous devez relire attentivement le cours. C'est aussi un support pour vous aider à résoudre les exerices.

3. La partie exercices comprend des exercices dont la difficulté est évaluée avec une, deux ou trois $*$. Les exercices $(*)$ sont censés être faciles, en général pour vérifier que les notions importantes sont comprises. Les exercices $(**)$ sont de difficulté moyenne, c'est le niveau attendu à l'examen. Les exercices $(* * *)$ sont plus avancés, pour les étudiants les plus intéressés. Un certain nombre d'exercices seront traité en travaux dirigés. Un certain nombre de solutions d'exercices seront aussi disponible en ligne, sur le site du cours.
4. La partie complément est réservée aux lecteurs curieux qui veulent en savoir plus, notamment sur l'histoire des notions abordées.

Le polycopié comprend aussi les annales des années précédentes. Attention néanmoins, le programme a évolué à la fois pour se rapprocher de ce qui est vu au lycée, et pour se concentrer sur des notions qui nous semblent fondamentales. Certains exercices d'annales sont donc hors-programme désormais, et, à l'inverse, certains exercices pourraient apparître qui ne ressemblent pas à des exerices d'annales. Néanmoins les annales sont corrigées, ce qui permettra aux étudiants de voir des exemples de rédaction satisfaisante.

PROGRAMME

Pré-requis pour cette UE : Programme de mathématiques du lycée, Terminale S.

Programme résumé :
A– Langage mathématique et notion de raisonnement.

- Vocabulaire de la théorie naïve des ensembles, ensemble, appartenance, complémentaire, intersection, réunion, inclusion, égalité, égalité de couples, de n-uplets.
- Éléments de logique : Logique de base, conjonction, disjonction, négation en termes de tables de vérité. Le sens de l'implication, de l'équivalence.
- Exemples de raisonnements : raisonnement direct, raisonnement par l'absurde, par disjonction de cas, raisonnement par récurrence, avec des exemples tirés du secondaire.
- Fonctions et applications : domaine de départ et d'arrivée, domaine de définition, graphe, image directe, image réciproque, restriction, composition, injections, surjections, bijections, notion de cardinal dans le cas fini (factorielle, coefficients binômiaux).
- Utilisation des quantificateurs : sens de « quel que soit », « il existe », illustration sur la définition de la limite d'une suite ou d'une application, opérations élémentaires sur les limites (somme, produit, composition, la notion de limite sera approfondie au deuxième semestre). Notion d'effectivité dans un raisonnement d'existence (sur les exemples traités).

B– Les bases du calcul algébrique dans $\mathbf{R}$ *et* $\mathbf{C}$

- Révisions sur les nombres entiers, rationnels et réels. Intervalles de $\mathbf{R}$. Manipulation d'inégalités.

- Nombres complexes : forme algébrique, addition, multiplication, conjugaison, norme, forme polaire, interprétation géométrique des nombres complexes, les formules d'Euler et de Moivre (formules d'addition pour cos et sin), racines carrées d'un nombre complexe, équation du second degré à coefficients complexes, représentation complexe des homothéties, translations, rotations, symétries dans le plan complexe.
- Manipulation des symboles $\sum$ et $\prod$ illustrée par les formules à connaître : identités remarquables, formule du binôme de Newton, somme des premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique. Preuve d'identités par récurrence. Fonctions polynomiales. *C– Géométrie du plan et de l'espace*
  - Géométrie vectorielle et affine : vecteurs, addition, multiplication par un scalaire, vecteurs colinéaires, vecteurs indépendants, représentation des vecteurs en coordonnées cartésiennes, représentations paramétriques et implicites de droites et de plans,
  - Eléments de géométrie euclidienne : le produit scalaire et sa représentation en coordonnées cartésiennes, cosinus d'un angle de deux vecteurs, bases orthonormées directes ou indirectes, produit vectoriel et sa représentation en coordonnées cartésiennes, définition du déterminant.
  - Détermination des coordonnées d'un point ou d'un vecteur dans un repère orthonormé. Projection d'un point et d'un vecteur de l'espace sur un plan, d'un vecteur du plan sur une droite.

Compétences visées :

Ce cours est destiné à tous les étudiants qui s'engagent vers l'informatique ou les mathématiques. Il couvre les pré-requis fondamentaux pour ces deux champs disciplinaires. En ce qui concerne la partie logique et langage mathématique, l'objectif est le renforcement des connaissances relative aux règles de la logique. Les exemples sont fournis par les nombres entiers, réels ou complexes introduits au collège et lycée. Pour les parties B et C, le but est l'apprentissage des notions de base de l'algèber et de la géométrie indispensables pour les cours de physique, de mathématiques et d'informatique.

Les compétences à acquérir sont la capacité à rédiger un raisonnement élémentaire, la maîtrise de la notion d'ensemble et d'application et la capacité à utiliser les quantificateurs dans des situations simples, l'utilisation des vecteurs, droites et plans en petite dimension et la maîtrise des nombres complexes.

Nombres et ensembles

Pierre Dehornoy, d'après Agnès Coquio, Eric Dumas, Emmanuel Peyre et Bernard Ycart

Ce chapitre est une prise de contact avec la notion d'ensemble, et un chapitre de révision concernant les différents types de nombres : entiers naturels, entiers relatifs, rationnels, réels et complexes.

Les nouveautés les plus importantes concernent les ensembles et les polynômes complexes.

Cours

1.1. Ensembles. —

Définition 1.1

Un *ensemble* est une collection d'objets mathématiques, différents les uns des autres, appelés *éléments* de l'ensemble. Deux ensembles coïncident si et seulement si ils ont les mêmes éléments.

Un ensemble est souvent décrit à l'aide des symboles d'accolades $\{,\}$. Selon les cas, il y a trois façons de les utiliser pour une telle description (notations 1.2, 1.9, 1.12 ci-dessous).

Notation 1.2

On peut décrire un ensemble en *extension*, c'est-à-dire en faisant la liste de tous ses éléments, séparés par des virgules.

Exemple 1.3. — $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ est un ensemble dont les éléments sont les nombres $1, 2, 3, 4$, et 5.

{`vrai`, `faux`} est un ensemble contenant deux éléments, appelés `vrai` et `faux`.

L'ordre d'apparition n'a pas d'importance. Chaque élément n'apparaît qu'une fois. S'il apparaissait plusieurs fois, ça ne changerait rien : l'ensemble resterait le même. Ainsi $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{4, 3, 2, 5, 1\} = \{1, 2, 3, 1, 3, 4, 5\}$.

Notation 1.4

On utilise le symbole $\in$ pour dire qu'un élément appartient à un ensemble, et $\notin$ pour dire qu'il n'appartient pas à l'ensemble.

Exemple 1.5. — On a $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tandis que $6 \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

On abuse parfois de notations en notant "$2, 3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$" au lieu de "$2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$", c'est-à-dire qu'on regroupe plusieurs appartenances en une seule.

Remarque 1.6. — Les ensembles étant aussi des objets mathématiques, on peut faire des ensembles d'ensembles. Ainsi $\{1, \{2\}, \{3, 4\}\}$ est un ensemble qui contient trois objets : le nombre 1 et les deux ensembles $\{2\}$ et $\{3, 4\}$.

Définition 1.7

On dit qu'un ensemble A est un *sous-ensemble* d'un ensemble B si tous les éléments de A sont aussi dans B. On note alors $A \subset B$. On dit aussi que A est *inclus* dans B.

Si A n'est pas un sous-ensemble de B, on note $A \not\subset B$.

Il y a un ensemble qui ne contient aucun élément. On l'appelle *ensemble vide*, et on le note $\emptyset$.

Si un ensemble de contient qu'un élément, on dit que c'est un *singleton*.

Exemple 1.8. — On a $\{2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tandis que $\{2, 6\} \not\subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

On a aussi $\emptyset \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tandis que $\{1, 2, 3, 4, 5\} \not\subset \emptyset$.

L'ensemble $\{2\}$ est un singleton, dont l'unique élément est le nombre 2.

Notation 1.9

On peut décrire un ensemble comme l'ensemble des éléments d'un autre ensemble satisfaisant une propriété supplémentaire. On utilise une barre pour séparer l'ensemble de départ de la propriété qu'on ajoute. On dit qu'on définit l'ensemble en *compréhension*.

On reviendra sur la notion de propriété plus tard, mais pour le moment, l'exemple suivant devrait suffire.

Exemple 1.10. — $\{x \in \{1,2,3,4,5\} \mid x \leqslant 3\}$ est le sous-ensemble de $\{1,2,3,4,5\}$ constitué des nombres inférieurs ou égaux à 3. C'est donc l'ensemble $\{1,2,3\}$.

Dans la description précédente, la barre verticale a le sens de « satisfaisant ». Ainsi on peut lire $\{x \in \{1,2,3,4,5\} \mid x \leqslant 3\}$ comme « l'ensemble des nombres x dans $\{1,2,3,4,5\}$ satisfaisant $x \leqslant 3$ ».

Remarque 1.11. — Résoudre une équation, c'est en général déterminer un ensemble. Ainsi trouver les solutions en nombres réels de l'équation $x^2+x-1=0$, c'est déterminer l'ensemble $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2+x-1=0\}$.

Notation 1.12

On peut décrire un ensemble en appliquant une fonction aux éléments d'un ensemble existant. On décrit d'abord la fonction appliquée à une variable, puis on met un point-virgule, puis on décrit l'ensemble de départ de la fonction. On dit qu'on définit l'ensemble en *fonction*.

On reviendra sur les notions de variable et de fonction plus tard, mais l'exemple suivant devrait éclairer.

Exemple 1.13. — $\{2n+1\,;\, n \in \{1,2,3\}\}$ est l'ensemble obtenu en partant de $\{1,2,3\}$ et en appliquant la fonction $n \mapsto 2n+1$. C'est donc l'ensemble $\{3,5,7\}$.

Dans la description précédentele point-virgulie a le sens de « où ». Ainsi on peut lire $\{2n+1\,;\, n \in \{1,2,3\}\}$ comme « l'ensemble des nombres de la forme $2n+1$, où n appartient à l'ensemble $\{1,2,3\}$ ».

Définition 1.14

Étant donné deux ensembles A et B, leur *union*, notée $A \cup B$, est l'ensemble qui contient tous les éléments de A et tous les éléments de B.

Leur *intersection*, notée $A \cap B$, est l'ensemble qui contient les éléments qui sont à la fois dans A et dans B.

Exemple 1.15. — On a $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$.

Définition 1.16

Étant donné deux ensembles A et B, leur *différence*, notée $A - B$, est l'ensemble qui contient tous les éléments de A qui ne sont pas dans B.

Lorsque B est un sous-ensemble de A, la différence $A - B$ est aussi appelée *complémentaire* de B dans A. Si l'ensemble A est suffisamment clair d'après le contexte, on note ${}^cB$ le complémentaire de B dans A.

Exemple 1.17. — On a $\{1, 2, 3, 4\} - \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$.

Les opérations sur les ensembles vérifient un certain nombre de propritétés qui sont parfois utiles.

Théorème 1.18 (admis)

Soient A, B et C trois ensembles. Les égalités ensemblistes suivantes sont toujours vraies.

- Commutativité :

$$\Big(A \cap B\Big) = \Big(B \cap A\Big) . \tag{1}$$

$$\Big(A \cup B\Big) = \Big(B \cup A\Big) . \tag{2}$$

- Associativité :

$$\Big(A \cap (B \cap C)\Big) = \Big((A \cap B) \cap C\Big) . \tag{3}$$

(4) $$\Big(A \cup (B \cup C)\Big) = \Big((A \cup B) \cup C\Big)\ .$$

- Distributivité :

(5) $$\Big(A \cap (B \cup C)\Big) = \Big((A \cap B) \cup (A \cap C)\Big)\ .$$

(6) $$\Big(A \cup (B \cap C)\Big) = \Big((A \cup B) \cap (A \cup C)\Big)\ .$$

- Complémentaires : soient A et B des parties d'un ensemble E. Alors :

(7) $$E - (E - A) = A\ ,$$

(8) $$E - (A \cup B) = (E - A) \cap (E - B)\ ,$$

(9) $$E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B)\ .$$

Pour mieux comprendre ces opérations ensemblistes, il est commode de visualiser E par un rectangle et les sous-ensembles de E par des « patates » hachurées dessinées dans ce rectangle. Le résultat s'appelle un *diagramme de Venn*, plutôt qu'un sac de patates (figure 1). Nous conseillons au lecteur de visualiser les égalités ensemblistes du

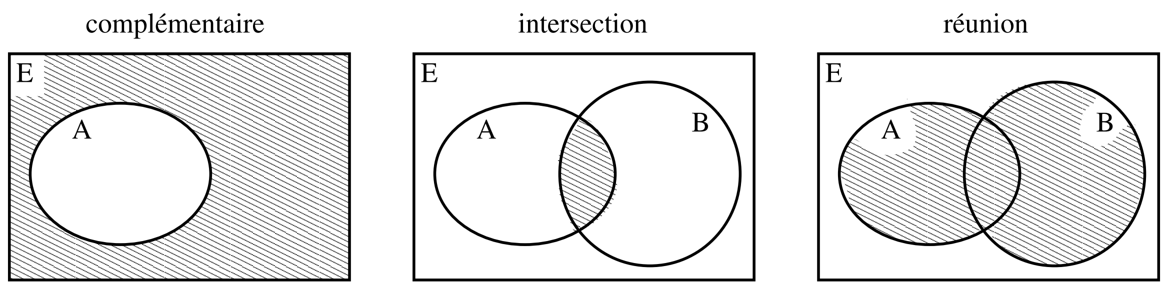


FIGURE 1. Diagrammes de Venn pour le complémentaire, l'intersection et la réunion.

théorème 1.18 sur des diagrammes de Venn. À titre d'exemple, nous avons représenté sur la figure 2 le diagramme de Venn qui illustre la formule

$$(E - A) \cup (E - B) = E - (A \cap B).$$

En effet, sur cette figure seule l'intersection $A \cap B$ n'est point hachurée. On prendra néanmoins garde au fait que ce diagramme, s'il illustre parfaitement la formule, n'en constitue pas une *preuve*.

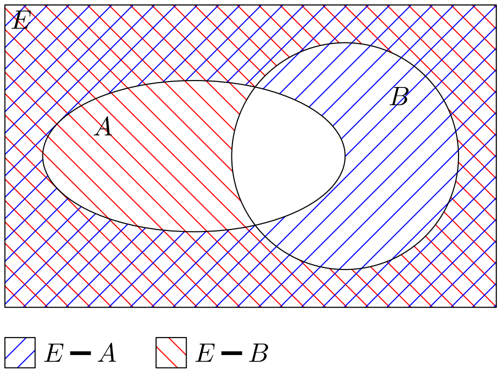


FIGURE 2. $(E - A) \cup (E - B) = E - (A \cap B)$

Remarque 1.19. — Un diagramme de Venn correspondant à un certain nombre de parties doit montrer toutes les intersections possibles, ce qui complique l'utilisation des diagrammes de Venn au-delà d'un petit nombre de parties. Ainsi un diagramme de Venn pour trois parties peut ressembler au premier dessin de la figure 3. Le deuxième dessin de cette figure représente la construction de A. W. F. Edwards donnant un diagramme de Venn correspondant à cinq parties de l'ensemble E.

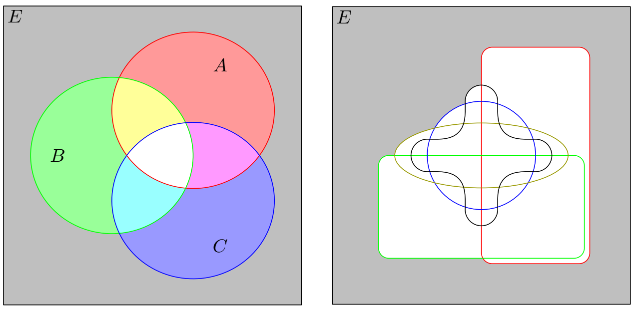


FIGURE 3. Diagrammes de Venn pour trois ou cinq parties.

Finissons cette partie en introduisant une notation qui permet de faire des intersections ou des unions toutes en même temps.

Notation 1.20

Soit E un ensemble, tel qu'à chaque élément x de E on associe un ensemble E_x. Alors on définit $\bigcup_{x\in E} E_x$ comme la réunion de tous les ensembles E_x, et $\bigcap_{x\in E} E_x$ comme l'intersection de tous les ensembles E_x.

Exemples 1.21. — On a $\bigcup_{x\in\{0,1,2\}} \{2x+1, 2x+2\} = \{1,2\} \cup \{3,4\} \cup \{5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$.

On a $\bigcap_{x\in\{0,1,2\}} \{x-1, x, x+1\} = \{-1,0,1\} \cap \{0,1,2\} \cap \{1,2,3\} = \{1\}$.

Remarquer que dans les exemples ci-dessus, on n'a pas besoin de préciser d'ordre dans lequel on effecture les unions (ou les intersections), en vertu de l'associativité de l'union et de l'intersection dans le théorème 1.18.

1.2. Nombres entiers naturels. — On admet l'existence des nombres entiers naturels $0, 1, 2, \dots$

Notation 1.22

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et $\mathbf{N}^*$ l'ensemble $\mathbf{N} - \{0\}$ des entiers naturels non nuls.

On rappelle qu'il y a deux opérations définies pour toutes les paires d'entiers naturels, appelées *addition* et *multiplication*, notées $+$ et $\times$. Le nombre 0 est dit *neutre vis-à-vis de l'addition*, puisque pour tout nombre entier naturel n, on a $n+0=0+n=n$. De même le nombre 1 est *neutre vis-à-vis de la multiplication*, puisque pour tout nombre entier naturel n on a $n\times 1 = 1\times n = n$.

Il y a sur les entiers naturels une *relation d'ordre*, notée $\leqslant$. Formellement il s'agit d'une fonction prenant deux entiers et rendant `vrai` ou `faux` selon que le premier nombre est infrieur ou égal au second, ou pas. Plutôt que de noter $\leqslant (x,y) = \texttt{vrai}$, on note $x \leqslant y$, et plutôt que de noter $\leqslant (x,y) = \texttt{faux}$, on note $x > y$.

L'ordre $\leqslant$ satisfait $0 \leqslant 1$, et se comporte bien vis-à-vis de l'addition et la multiplication des entiers naturels : si a, b, c, d sont quatre entiers naturels, avec $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, on a $a+c \leqslant b+d$ et $a\times c \leqslant b\times d$.

On note aussi $a < b$ si on a $a \leqslant b$ et $a \neq b$, et on note $a \geqslant b$ si on a $b \leqslant a$.

Notons aussi que l'ordre sur les entiers est *total*, ce qui signifie que deux entiers quelconques peuvent être comparés. En effet, étant donné $a, b \in \mathbf{N}$, on a toujours $a < b$, $a = b$, ou $a > b$.

Lorsque a et b sont deux entiers naturels satisfaisant $b \leqslant a$, on peut définir leur *différence*, notée $a-b$, comme l'entier naturel c tel que $b + c = a$.

La division est un peu spéciale : partant de deux entiers naturels a, b, le résultat de la *division euclidienne* de a par b est la paire (q, r) d'entiers naturels tels que $a = b \times q + r$ et $0 \leqslant r < b$. On dit que q est le *quotient* de la division euclidienne de a par b, et que r est le *reste*.

1.3. Nombres entiers relatifs. — Le premier défaut des nombres naturels est que la différence n'y est définie que lorsque le premier nombre est supérieur ou égal au second. Pour y remédier, on associe à tout nombre entier naturel non nul n un nombre *opposé* (on dit aussi *inverse pour l'addition*), noté $-n$.

Notation 1.23

On note $\mathbf{Z}$ l'ensemble $\mathbf{N} \cup \{-n\,;\, n \in \mathbf{N}^*\}$. Ses éléments sont appelés entiers relatifs. On note $\mathbf{Z}^*$ l'ensemble $\mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$.

Ainsi $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$. On a l'inclusion $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$. L'addition, la multiplication et la soustraction s'étendent facilement à $\mathbf{Z}$. Dans $\mathbf{Z}$, l'addition, la soustraction et la multiplication sont définies pour toutes les paires de nombres.

De façon pédante, on dit que $\mathbf{Z}$ est la *complétion* de $\mathbf{N}$ pour l'addition. Cela signifie qu'on a ajouté juste ce qu'il faut pour que tout nombre ait maintenant un inverse pour l'addition. En effet, pour tout entier relatif a, il existe un nombre b (en fait égal à $-a$) tel que $a + b = 0$. De façon toute aussi pédante, on dit que 0 est *neutre pour l'addition*, puisque pour tout entier relatif a on a $a + 0 = a$; et on dit que 1 est *neutre pour la multiplication*, puisque pour tout entier relatif a on a $a \times 1 = a$.

La relation d'ordre $\leqslant$ des entiers naturels s'étend aux entiers relatifs. Elle est toujours bien compatible avec l'addition au sens où si a, b, c, d sont des entiers relatifs avec $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$. Les entiers relatifs positifs ou nuls sont les entiers naturels, c'est-à-dire $\{z \in \mathbf{Z} \,|\, z \geqslant 0\} = \mathbf{N}$. Les entiers relatifs strictement négatifs sont le complémentaire des entiers naturels dans les entiers relatifs, c'est-à-dire $\{z \in \mathbf{Z} \,|\, z < 0\} = \mathbf{Z} \smallsetminus \mathbf{N}$. La relation d'ordre sur $\mathbf{Z}$ est aussi totale.

Par contre, la relation d'ordre se comporte moins bien vis-à-vis de la multiplication, il faut veiller aux questions de signe : le produit de deux nombres de même signe est positif, le produit de deux nombres de signes opposés est négatif.

Introduisons une notation qui sera pratique pour la combinatoire.

Définition 1.24

Un *intervalle* de $\mathbf{Z}$ est un ensemble de la forme $\{z \in \mathbf{Z} \mid m \leqslant z \leqslant n\}$, avec m et n deux entiers relatifs. Dans ce cas on note $[\![m, n]\!] = \{z \in \mathbf{Z} \mid m \leqslant z \leqslant n\}$.

Exemple 1.25. — On a $[\![-3, 2]\!] = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$.

Noter qu'avec la notation $[\![m, n]\!]$, on suppose en général $m \leqslant n$, mais si jamais on a $m > n$, on a simplement $[\![m, n]\!] = \emptyset$.

1.4. Nombres rationnels. — Tout comme on a obtenu les nombres entiers relatifs en ajoutant ce qu'il faut pour que tout nombre ait un opposé, on peut définir l'ensemble des nombres rationnels comme la complétion de $\mathbf{Z}$ vis-à-vis de la multiplication. Autrement dit, le fait que la division euclidienne donne souvent des restes est un défaut de $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$ qu'on va résoudre avec les nombres rationnels.

Définition 1.26

Un nombre rationnel est le quotient de deux nombres relatifs, le second étant non nul, c'est donc un nombre de la forme $\dfrac{p}{q}$, où $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}^*$.

Deux nombres rationnels $\dfrac{p_1}{q_1}, \dfrac{p_2}{q_2}$ sont déclarés égaux si et seulement si on a $p_1 q_2 = p_2 q_1$.

On dit qu'un nombre rationnel $\dfrac{p}{q}$ est strictement positif si p et q sont non nuls et de même signe, et qu'il est strictement négatif si p et q sont non nuls et de signes opposés.

Notation 1.27

On note $\mathbf{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, et $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} - \{0\}$ l'ensemble des nombres rationnels non nuls. On note aussi $\mathbf{Q}_+$ l'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls, soit $\mathbf{Q}_+ = \{x \in \mathbf{Q} \,|\, x \geqslant 0\}$, et $\mathbf{Q}_- = \{x \in \mathbf{Q} \,|\, x \leqslant 0\}$.

Rappelons que l'addition dans $\mathbf{Q}$ peut être définie par la formule $\dfrac{p_1}{q_1} + \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}$ et la multiplication par la formule $\dfrac{p_1}{q_1} \times \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{p_1p_2}{q_1q_2}$.

Dans $\mathbf{Q}$, tout nombre non nul $\dfrac{p}{q}$ a un opposé (le nombre $\dfrac{-p}{q}$) et un inverse pour la multiplication (le nombre $\dfrac{q}{p}$).

La relation d'ordre $\leq$ des entiers relatifs s'étend aux nombres rationnels, en un ordre total encore.

1.5. Nombres réels. — Dans le monde des rationnels on peut faire beaucoup de calculs. Le besoin d'avoir plus de nombres vient de la résolution d'équations polynomiales. Ainsi l'équation $x^2 - 2 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbf{Q}$, alors que l'intuition suggère qu'elle pourrait avoir une solution quelque part entre $1,4$ et $1,5$. On pourrait travailler avec l'ensemble des nombres dits *algébriques*, c'est-à-dire les nombres qui sont solutions d'une équation polynomiale à coefficients entiers (ou rationnels, ce qui ne changerait rien). Mais un nombre comme π n'est ni rationnel, ni algébrique (c'est un théorème difficile à démontrer). Il est naturel d'étendre un peu plus l'ensemble $\mathbf{Q}$, et on arrive à l'ensemble $\mathbf{R}$.

Contrairement à $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$ qui sont faciles à définir à partir de $\mathbf{N}$, il n'est pas facile de définir proprement $\mathbf{R}$. Plusieurs constructions existent, par exemple par les coupures de Dedekind ou par les suites de Cauchy. Lors de l'apprentissage de la notion de *série* en 2e année, il sera possible de donner une construction naturelle à partir de l'écriture décimale. Nous ne le ferons pas tout de suite. Nous retiendrons donc un énoncé un peu vague :

Théorème 1.28 (vague et admis)

Il existe un ensemble $\mathbf{R}$ qui contient les nombres rationnels, tel que tout élément de $\mathbf{R}$ peut être représenté par une suite de chiffres (finie avant la virgule, finie ou infinie après la virgule) et un signe, et réciproquement toute suite de chiffres (finie avant la virgule, finie ou infinie après la virgule) avec un signe donne un nombre réel. Sur cet ensemble il y a quatre opérations $+, -, \times, /$, et une relation d'ordre total $\leqslant$.

Rappelons que l'inégalité $x \leqslant y$ est vérifiée si et seulement si $y - x$ est un nombre réel positif ou nul. D'autre part on note $x < y$ si on a $x \leqslant y$ et $x \neq y$. On en déduit les propriétés suivantes :

a) pour tous $x, y, z \in \mathbf{R}$, si on a $(x < y$ et $y < z)$, alors on a $x < z$;

b) pour tous $x, y, z \in \mathbf{R}$, on a $x < y$ si et seulement si on a $x + z < y + z$;

c) pour tous $x, y, z \in \mathbf{R}$, si on a $(x < y$ et $0 < z)$, alors on a $xz < yz$;

d) pour tous $x, y, z \in \mathbf{R}$, si on a $(x < y$ et $z < 0)$, alors on a $xz > yz$;

e) pour tous $x, x', y, y' \in \mathbf{R}$, si on a $(x < y$ et $x' < y')$, alors on a $x + x' < y + y'$.

Dans l'énoncé d), ne pas oublier que la multiplication par un nombre négatif renverse le sens des inégalités.

Le théorème précédent ne définit pas de façon unique l'ensemble $\mathbf{R}$. Pour cela, il faut ajouter une propritété supplémentaire. Une possibilité est de dire que $\mathbf{R}$ possède la *propriété de la borne supérieure*, à savoir que si un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ admet un majorant (c'est-à-dire un nombre réel plus grand que tous les éléments de l'ensemble), alors il admet un plus petit majorant (c'est-à-dire un majorant inférieur ou égal à tous les autres majorants), et que $\mathbf{R}$ est le plus petit ensemble contenant $\mathbf{Q}$ et ayant cette propriété de la borne supérieure. Nous reviendrons sur cette propriété qui n'est pas essentielle pour le moment.

Notons également que $\mathbf{R}$ est *archimédien* : pour tout nombre réel positif x, il existe un entier naturel n tel qu'on a l'inégalité $nx > 1$.

Définition 1.29 (Valeur absolue et partie entière)

On appelle *partie entière* la fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{Z}$ qui consiste à associer à un nombre réel x le plus grand nombre entier relatif qui lui est inférieur. On la note $\lfloor x \rfloor$.

On appelle *valeur absolue* la fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}_+$ qui associe à un nombre réel x le nombre x si $x \geqslant 0$ et le nombre $-x$ si $x < 0$. On la note $|x|$.

Exemples 1.30. — Ainsi on a $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -\pi \rfloor = -4$. On a aussi $|\pi| = \pi$ et $|-\pi| = \pi$.

Définition 1.31

Un intervalle de $\mathbf{R}$ est un sous-ensemble J de $\mathbf{R}$ satisfaisant la propriété suivante : si x, y sont deux éléments de J satisfaisant $x \leqslant y$, alors tous les nombres réels z tels que $x \leqslant z \leqslant y$ sont dans J.

La propriété suivante est très importante, c'est une des raisons qui fait qu'on préfère souvent $\mathbf{R}$ à $\mathbf{Q}$, et qui fait par exemple que le théorème des valeurs intermédiaires est vrai dans $\mathbf{R}$ et non dans $\mathbf{Q}$.

Théorème 1.32 (admis)

Tous les intervalles de $\mathbf{R}$ sont d'un des types suivants :

- $[a, b] := \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, où $a, b \in \mathbf{R}$,
- $[a, b[:= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}$, où $a, b \in \mathbf{R}$,
- $]a, b] := \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\}$, où $a, b \in \mathbf{R}$,
- $]a, b[:= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$, où $a, b \in \mathbf{R}$,
- $[a, +\infty[:= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x\}$, où $a \in \mathbf{R}$,
- $]a, +\infty[:= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}$, où $a \in \mathbf{R}$,
- $]-\infty, b] := \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant b\}$, où $b \in \mathbf{R}$,
- $]-\infty, b[:= \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$, où $b \in \mathbf{R}$,
- $]-\infty, +\infty[:= \mathbf{R}$

Cette propriété peut se démontrer à partir du fait que $\mathbf{R}$ est archimédien, mais c'est une démonstration compliquée. On l'admettra donc.

Remarque 1.33. — Pour les questions de convergence de suites ou de fonctions il sera important de remarquer les égalités suivantes : pour a un réel et ε (« epsilon ») un réel positif, on a

$$\big\{x \in \mathbf{R} \,\big|\, |x - a| < \varepsilon\big\} =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[,$$
$$\big\{x \in \mathbf{R} \,\big|\, |x - a| \leq \varepsilon\big\} = [a - \varepsilon, a + \varepsilon].$$

Noter que la barre signifiant « satisfaisant » est un peu plus grande que celle de la valeur absolue.

1.6. Ensembles produits. — En faisant de la géométrie dans $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ à l'aide de coordonnées, on ne considère pas des nombres, mais des couples ou des triplets de nombres. On formalise cela avec la notion d'ensemble-produit.

Définition 1.34

Pour n un entier naturel, un *n-uplet* est une collection ordonnée de n objets mathématiques. On le note à l'aide de parenthèse : si $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont des objets, on peut former le n-uplet $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Deux n-uplets $(u_1, \dots, u_n)$, $(v_1, \dots, v_n)$ sont déclarés égaux si on a simultanément $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots,$ et $u_n = v_n$.

Un 2-uplet est aussi appelé un *couple*, un 3-uplet un *triplet*.

Attention, ici n considère des *n-uplets* de la forme $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ et non des ensembles de la forme $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, la différence tient au fait que l'ordre compte dans un n-uplet, et non dans un ensemble. Par exemple on a $(1, 2) \neq (2, 1)$, tandis que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. De plus, un n-uplet peut contenir deux fois le même élément. Ainsi $(1, 1, 3)$ est un triplet de nombres, différent du couple $(1, 3)$.

Définition 1.35

Étant donnés deux ensembles E et F, l'*ensemble-produit* $E \times F$ est l'ensemble dont les éléments sont les couples de la forme (e, f) où e parcourt tous les éléments de E et f tous les éléments de F, c'est-à-dire $E \times F := \{(e, f)\,;\, e \in E, f \in F\}$.

Pour n un entier naturel, étant donnés n ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$, l'*ensemble-produit* $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est l'ensemble dont les éléments sont les n-uplets de la forme $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ où u_i parcourt tous les éléments de E_i, c'est-à-dire $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n := \{(u_1, u_2, \dots, u_n)\,;\, u_1 \in E_1, u_2 \in E_2, \dots, u_n \in E_n\}$.

Exemples 1.36. — On a $\{1, 2, 3\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$.

On a $\{3, 4\} \times \{x, y\} \times \{2, 3\} = \{(3, x, 2), (3, x, 3), (3, y, 2), (3, y, 3), (4, x, 2), (4, x, 3), (4, y, 2), (4, y, 3)\}$.

1.7. Nombres complexes. — Les nombres complexes sont nés de la nécessité de donner un sens à la racine carrée de nombres négatifs, pour résoudre les équations algébriques. Dans l'ensemble des réels, l'équation $x^2 = 1$ a deux solutions, $+1$ et -1, mais l'équation $x^2 = -1$ n'en a pas, puisque le carré de tout nombre réel est positif ou nul. Les nombres complexes naissent en ajoutant une solution à l'équation $x^2 = -1$. Le miracle est qu'avec ce seul ajout, tous les polynômes complexes ont alors des racines.

Définition 1.37

On définit un nombre i (imaginaire) qui satisfait l'équation $\mathrm{i}^2 = -1$.

On appelle *nombre complexe* tout nombre de la forme $z = a + ib$, où a et b sont deux réels quelconques. Le réel a est appelé *partie réelle* de z, notée $\mathrm{Re}(z)$, et le réel b est appelé *partie imaginaire* de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbf{C}$.

L'addition et la multiplication des réels s'étendent aux nombres complexes sans difficulté particulière.

- *addition :* $(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$,
- *multiplication :* $(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + \mathrm{i}(bc + ad)$.

On représente ces nombres par les points d'un plan muni de deux axes orthogonaux. L'axe horizontal porte les réels (qui sont les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle). L'axe vertical porte les nombres dits imaginaires purs, ceux dont la partie réelle est nulle. Le point correspondant au nombre $a + ib$ est placé à la verticale du réel a et à l'horizontale de l'imaginaire pur ib (figure 4). On dit que le nombre $a + ib$ est l'*affixe* du point qui le représente. Le point d'affixe 0 est l'*origine*, et on le note O.

Pour définir l'argument d'un nombre complexe, on admet l'existence des deux fonctions *sinus* et *cosinus*, définies de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, 2π-périodiques, sin étant impaire et cos paire, satisfaisant $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$, et satisfaisant la règle usuelle de géométrie : si ABC est un triangle rectangle en B tel que l'angle en A mesuré en radians vaut $\theta \in [0, \pi/2]$, alors on a $AB = AC \times \cos(\theta)$ et $BC = AC \times \sin(\theta)$.

Définition 1.38

Soit θ un nombre réel, on définit le nombre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ comme $\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle

1. *module de z* le nombre réel positif ou nul $\sqrt{a^2 + b^2}$. On le note $|z|$.

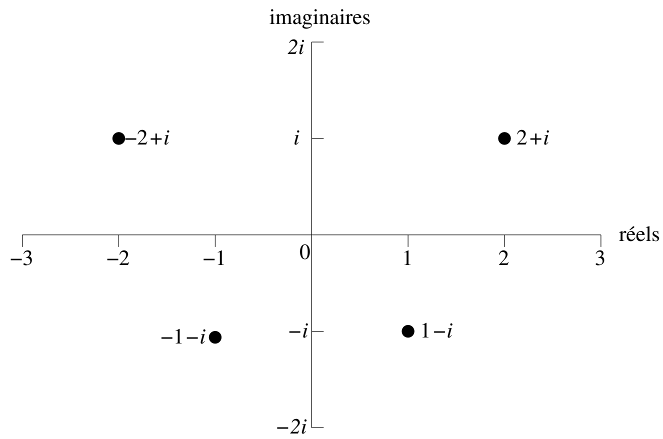


FIGURE 4. Le plan complexe.

2. *argument de z si z est non nul* tout réel θ tel que $\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\theta)$. On le note $\arg(z)$. Il est donc défini à 2π près.
3. *décomposition polaire* de z l'écriture $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
4. *conjugué de z* le nombre complexe de même partie réelle et de partie imaginaire opposée. On le note $\overline{z}$.

$$\overline{z} = a - \mathrm{i}b \ .$$

Observez que le conjugué d'un nombre complexe $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est : $\overline{z} = \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, et un argument de $\overline{z}$ est $-\theta$.

Voici quelques exemples.

nombre	module	argument	décomposition polaire	conjugué
i	1	$\pi/2$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$	$-\mathrm{i}$
$1+\mathrm{i}$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$	$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$	$1-\mathrm{i}$
$-1+\mathrm{i}$	$\sqrt{2}$	$3\pi/4$	$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3\pi/4}$	$-1-\mathrm{i}$
$1+\mathrm{i}\sqrt{3}$	2	$\pi/3$	$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$	$1-\mathrm{i}\sqrt{3}$
$\sqrt{3}-\mathrm{i}$	2	$11\pi/6$	$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,11\pi/6}$	$\sqrt{3}+\mathrm{i}$
$-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$	$2\pi/3$	$2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi/3}$	$-\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{6}$

Dans le plan complexe, le module est la longueur du segment joignant l'origine au point représentant z. Un argument est une mesure de l'angle entre l'axe des réels et ce segment, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (le sens trigonométrique). Le conjugué est le symétrique par rapport à l'axe horizontal des réels (figure 5).

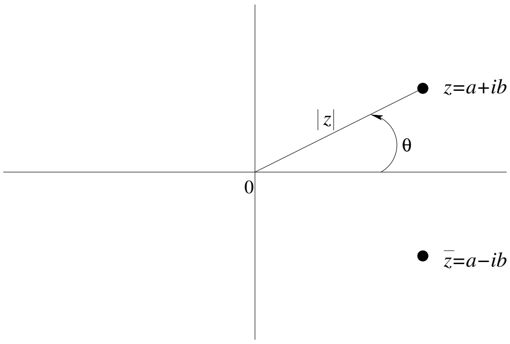


FIGURE 5. Module, argument et conjugué d'un nombre complexe.

Observez qu'un nombre et son conjugué ont le même module et que leur produit est le carré de ce module.

$$z\,\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2 \,.$$

Il est fréquent dans les calculs d'utiliser un conjugué pour simplifier le résultat et le mettre sous la forme $a + ib$. Si z_1 et z_2 sont deux complexes, leur quotient s'écrit :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{z_2\,\overline{z_2}} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{|z_2|^2} \,.$$

Voici un exemple.

$$\frac{1+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(1+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{3+\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2} \,.$$

L'utilisation de la notation exponentielle $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ sera justifiée en 2e année, quand vous verrez une définition très naturelle d'une fonction exponentielle $\exp : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. En attendant, on admet l'existence d'une fonction exponentielle $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^*$ qui est strictement croissante, et satisfait $\exp(x + x') = \exp(x) \times \exp(x')$.

Définition 1.39

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle *exponentielle complexe de* z et on note e^z (ou $\exp(z)$) le nombre complexe :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a\big(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)\big) \,,$$

où e^a est l'exponentielle réelle de a.

Observez que l'exponentielle complexe coïncide avec l'exponentielle réelle si la partie imaginaire est nulle. Si la partie réelle est nulle, le nombre $\cos(b)+\mathrm{i}\sin(b)$ est un nombre complexe de module 1 (car $\cos^2(b)+\sin^2(b)=1$). Dans le cas général, le module de e^{a+ib} est e^a et b est un argument (les autres étant les nombres de la forme $b+2k\pi$, avec $k\in\mathbf{Z}$).

La périodicité modulo 2π des fonctions sinus et cosinus induit la périodicité modulo $2\mathrm{i}\pi$ de l'exponentielle complexe : pour tout réel b et pour tout entier k,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(b+2k\pi)}$$

Ainsi,

$$\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}=1\ ,\quad \mathrm{e}^{(2k+1)\pi\mathrm{i}}=-1\ ,\quad \mathrm{e}^{(\pi/2+2k\pi)\mathrm{i}}=\mathrm{i}\ ,\quad \mathrm{e}^{(-\pi/2+2k\pi)\mathrm{i}}=-\mathrm{i}\ .$$

L'exponentielle complexe conserve la propriété fondamentale de l'exponentielle réelle qui est de transformer les sommes en produits.

Théorème 1.40 (multiplicativité de l'exponentielle complexe)

Soient z et z' deux nombres complexes. On a

$$\mathrm{e}^{z+z'}=\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}\ .$$

Démonstration. — Posons $z=a+\mathrm{i}b$ et $z'=c+\mathrm{i}d$. Par définition de l'exponentielle,

$$\mathrm{e}^{z+z'}=\mathrm{e}^{(a+c)+\mathrm{i}(b+d)}=\mathrm{e}^{a+c}\big(\cos(b+d)+\mathrm{i}\sin(b+d)\big)\ .$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'} &= \Big(\mathrm{e}^a\big(\cos(b)+\mathrm{i}\sin(b)\big)\Big)\Big(\mathrm{e}^c\big(\cos(d)+\mathrm{i}\sin(d)\big)\Big)\\ &= \mathrm{e}^{a+c}\big(\cos(b)+\mathrm{i}\sin(b)\big)\big(\cos(d)+\mathrm{i}\sin(d)\big)\ ,\end{aligned}$$

car $\mathrm{e}^a\mathrm{e}^c=\mathrm{e}^{a+c}$ (propriété de l'exponentielle réelle). Les formules trigonométriques suivantes sont supposées connues :

$$\cos(b+d)=\cos(b)\cos(d)-\sin(b)\sin(d)\quad\text{et}\quad\sin(b+d)=\sin(b)\cos(d)+\cos(b)\sin(d)\ .$$

On en déduit immédiatement que :

$$\big(\cos(b)+\mathrm{i}\sin(b)\big)\big(\cos(d)+\mathrm{i}\sin(d)\big)=\cos(b+d)+\mathrm{i}\sin(b+d)\ .$$

□

Le fait que $\mathrm{e}^{inx}=\cos(nx)+\mathrm{i}\sin(nx)$ conduit à la *formule de Moivre* (ou de "De Moivre") :

Corollaire 1.41 (formule de Moivre)

Pour tout x dans $\mathbf{R}$ et n dans $\mathbf{N}$, on a
$$(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)$$

Cette formule est utile pour exprimer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x), \sin(x)$. Voici un exemple.

$$\begin{aligned}
\cos(2x) + \mathrm{i}\sin(2x) &= (\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^2 \\
&= \cos^2(x) + 2\mathrm{i}\cos(x)\sin(x) + \mathrm{i}^2\sin^2(x) \\
&= \cos^2(x) - \sin^2(x) + \mathrm{i}2\cos(x)\sin(x) \\
&= (2\cos^2(x) - 1) + \mathrm{i}(2\cos(x)\sin(x))
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

Les fonctions sinus et cosinus s'expriment à l'aide de l'exponentielle complexe par les *formules d'Euler*. Celles-ci découlent simplement de la définition $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

Proposition 1.42 (formules d'Euler)

Soit θ un nombre réel. Alors on a
$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2i}.$$

On les utilise pour *linéariser* des puissances de sinus et cosinus, afin de calculer leurs primitives. Voici un exemple.

$$\begin{aligned}
\sin^4(x)\cos^6(x) &= \frac{1}{2^{10}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^6 \\
&= \frac{1}{1024}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})^4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^2 \\
&= \frac{1}{1024}(\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x}-4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+6-4\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-8\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}) \\
&= \frac{1}{1024}(\mathrm{e}^{10\mathrm{i}x}-4\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}+6\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x} \\
&\qquad +2\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x}-8\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+12-8\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}+2\mathrm{e}^{-8\mathrm{i}x} \\
&\qquad +\mathrm{e}^{6\mathrm{i}x}-4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+6\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}-4\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-10\mathrm{i}x}) \\
&= \frac{1}{512}\big(6+2\cos(2x)-8\cos(4x)-3\cos(6x)+2\cos(8x)+\cos(10x)\big)
\end{aligned}$$

D'où une primitive de $\sin^4(x)\cos^6(x)$:

$$\frac{3x}{256}+\frac{\sin(2x)}{512}-\frac{\sin(4x)}{256}-\frac{\sin(6x)}{1024}+\frac{\sin(8x)}{2048}+\frac{\sin(10x)}{5120}\,.$$

L'observation de la parité permet de prévoir a priori que la linéarisation ne contiendra que des $\cos(kx)$. En effet, $\sin(x)$ est une fonction impaire et $\cos(x)$ une fonction paire. Donc si on remplace x par $-x$, $\sin^n(x)\cos^m(x)$ sera inchangé si n est pair, changé en son opposé si n est impair. Dans le premier cas, la linéarisation ne contiendra que des cosinus, dans le second cas, elle ne contiendra que des sinus.

1.8. Polynômes. — Dans cette partie on revient sur la notion de polynôme et de racine de polynôme. En général il est important de préciser dans quel ensemble vivent les coefficients d'un polynôme. Pour que les définitions marchent, il est nécessaire qu'on sache faire des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions dans un tel ensemble[1]. Ce qui est important c'est que $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ sont des exemples de tels ensembles. Par commodité on va donc considérer des polynômes dont les coefficients sont des nombres complexes. Parfois ils seront en plus supposés réels, ou même entiers relatifs, mais ce sera alors précisé.

Étant donné un entier naturel non nul d, pour tout nombre complexe x, on note x^d le produit de d copies de x. Ainsi $x^d = x \times x \times \cdots \times x$, avec d fois x et $d-1$ signes $\times$. Par convention on pose $x^0 = 1$, de sorte que pour tous entiers naturels d, d' on a $x^d \times x^{d'} = x^{d+d'}$.

1. Le terme mathématique pour désigner un tel ensemble est *corps*.

Définition 1.43

Étant donné un entier naturel d et des éléments $a_0, a_1, \ldots, a_d \in \mathbf{C}$, la fonction P qui à un nombre complexe x associe le nombre $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_d x^d$ est appelé *polynôme à coefficients dans* $\mathbf{C}$. Par un léger abus, on dit dans ce cas que $P(x)$ est un polynôme en x. [a]

Lorsqu'on impose que les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_d$ soient réels (*resp.* rationnels, *resp.* entiers relatifs), on dit que le polynôme est à coefficients dans $\mathbf{R}$ (*resp.* $\mathbf{Q}$, *resp.* $\mathbf{Z}$).

Lorsque a_d est différent de 0, le nombre d est appelé *degré* du polynôme P, noté $\deg(P)$. Dans ce cas, le nombre a_d est appelé *coefficient dominant* de P, noté $\mathrm{dom}(P)$.

Si tous les coefficients sont nuls, alors P est appelé *polynôme nul*. Par convention il est de degré 0.

a. En fait le polynôme est plutôt la somme formelle $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_d x^d$ où x est une variable, et la fonction décrite est appelée *fonction polynomiale*, mais cette distinction est sans importance pour cette année.

Lorsque $P(x)$ est simplement de la forme $a_d x^d$, on dit que P est un *monôme*. Un polynôme est donc une somme d'un nombre fini de monômes.

Exemples 1.44. — $x^2 - 1$ est un polynôme en x, à coefficients entiers, de degré 2.
$y^3 - \pi y + \sqrt{2}$ est un polynôme en y, à coefficients réels, de degré 3.
$5x^4$ est un monôme en x, à coefficient entier, de degré 4.
Les polynômes de degré 0 sont les fonctions constantes.

Comme nous le rappellerons dans le chapitre 2, que la variable soit x, y ou n'importe quelle autre lettre n'a pas d'importance. Ce qui importe c'est qu'un polynôme est une fonction qui prend une variable et rend un nombre, en ne faisant intervenir que des additions et des multiplications.

Définition 1.45

Étant donné P un polynôme à coefficients dans $\mathbf{C}$, un nombre a dans E tel que $P(a) = 0$ est appelé *racine* de P.

Exemple 1.46. — $x^2 - 1$ est un polynôme en x qui a deux racines dans $\mathbf{Z}$, à savoir les nombres 1 et -1.

$x^2 - 2$ est un polynôme en x qui n'a pas de racine dans $\mathbf{Z}$ ni dans $\mathbf{Q}$, mais qui a deux racines dans $\mathbf{R}$, à savoir les nombres $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

$x^2 + 1$ est un polynôme en x qui n'a aucune racine ni dans $\mathbf{Z}$, ni dans $\mathbf{Q}$, ni dans $\mathbf{R}$.

On peut additionner, soustraire, ou multiplier deux polynômes. L'addition et la soustraction se font terme à terme. Ainsi

$$(x^3 + x^2 + x + 1) + (x^3 + 2x^2 - x - 2) = 2x^3 + 3x^2 - 1,$$

tandis que

$$(x^3 + x^2 + x + 1) - (x^3 + 2x^2 - x - 2) = -x^2 + 2x + 3.$$

La multiplication se fait en *développant*, comme par exemple

$$\begin{aligned}(3x^2 + x - 1) \times (x^2 + 2x - 1) &= 3x^2 \times (x^2 + 2x - 1) \\ &\quad + x \times (x^2 + 2x - 1) - 1 \times (x^2 + 2x - 1) \\ &= (3x^4 + 6x^3 - 3x^2) + (x^3 + 2x^2 - x) - (x^2 + 2x - 1) \\ &= 3x^4 + (6+1)x^3 + (-3+2-1)x^2 + (-1-2)x - (-1) \\ &= 3x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 3x + 1\end{aligned}$$

Théorème 1.47 (Division euclidienne des polynômes)

Étant donné deux polynômes A et B à coefficients dans $\mathbf{C}$. Alors il existe deux uniques polynômes Q et R à coefficients dans $\mathbf{C}$ avec $\deg(R) < \deg(B)$ tels que

$$A = BQ + R.$$

On dit que Q est le *quotient de la division euclidienne de A par B*, tandis que R est le reste. Lorsque $R(x) = 0$, on dit que le polynôme B *divise* le polynôme A.

Nous ne démontrerons pas ce théorème, mais donnerons un algorithme de calcul à la fin de cette partie. Contentons-nous d'abord de quelques exemples.

Exemples 1.48. — Si $A(x) = x^2 - 3x + 2$ et $B(x) = x + 1$, alors on vérifie qu'on a $x^2 - 3x + 2 = (x - 4)(x + 1) + 6$. Ainsi le quotient de la division de A par B est le polynôme $Q(x) = x - 4$ et le reste le polynôme constant $R(x) = 6$.

Si $A(x) = x^2 - 3x + 2$ et $B(x) = x - 1$, alors on vérifie qu'on a $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$. Ainsi le quotient de la division de A par B est le polynôme $Q(x) = x-2$ et le reste le polynôme constant $R(x) = 0$.

Si $A(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ et $B(x) = x^2 + 1$, alors on vérifie qu'on a $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2+1) - 2x - 2$. Le quotient de la division de A par B est donc le polynôme $Q(x) = x - 1$ et le reste le polynôme $R(x) = -2x - 2$.

Proposition 1.49

Soit $P(x)$ un polynôme en x à coefficients dans $\mathbf{C}$, et a un nombre complexe, alors le polynôme $x - a$ divise $P(x)$ si et seulement si a est une racine de P.

Démonstration. — Comme le polynôme $x - a$ est de degré 1 en x, quand on écrit la division euclidienne de $P(x)$ par le polynôme $x - a$, on obtient un quotient $Q(x)$ de degré $\deg(P) - 1$ et un reste $R(x)$ de degré 0, c'est-à-dire une constante. Notons r cette constante. On a alors

$$P(x) = Q(x) \times (x - a) + r.$$

Si a est une racine de P, alors par définition on a $P(a) = 0$. On a donc $Q(a)\times(a-a)+r = 0$, et donc $r = 0$. On a alors $P(x) = Q(x) \times (x - a)$, et donc $x - a$ divise P.

Réciproquement, si $x - a$ divise P, alors le reste r est nul, donc on $P(a) = Q(a) \times (a - a) = Q(a) \times 0 = 0$, et donc a est une racine de P. □

La division euclidienne des polynômes permet donc de trouver des racines de polynômes compliqués dont on connaît certaines racines.

Exemples 1.50. — On considère le polynôme $P(x) = x^2 - 7x + 6$. On voit que 1 est une racine évidente. En divisant $P(x)$ par $x - 1$, on trouve $P(x) = (x-6)(x-1)$, et donc on voit que 6 est l'autre racine de P.

On considère le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 - 19x - 20$. En essayant quelques valeurs on voit que -1 est une racine de P. En divisant $P(x)$ par $x + 1$, on trouve $P(x) = (x^2+x-20)(x+1)$. Or on sait (et on le reverra dans la partie suivante) que x^2+x-20 a pour racines 4 et -5, donc les racines de P sont $-1, 4$ et 5.

Corollaire 1.51 (Factorisation des polynômes)

Soit P un polynôme à coefficients complexes (ou réels) de degré d et de coefficient dominant a_d. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des racines distinctes de P, alors on a

$$P(x) = a_d(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)\,.$$

Exemple 1.52. — Pour $P(x) = x^3+2x^2-19x-20$, on vient de voir que les racines sont $-1, 4$, et 5. Or le coefficient dominant de P est 1, donc on a $P(x) = (x+1)(x-4)(x-5)$.

Un point n'a pas été expliqué : comment calculer la division d'un polynôme A par un polynôme B ? En fait, c'est la même chose que pour les entiers à l'aide de l'*algorithme d'Euclide* vu à l'école primaire ! Présentons d'abord un exemple, puis nous donnerons la forme générale de cet algorithme.

Exemple 1.53. — Ici on divise $x^3 + x^2 - 1$ par $x - 1$. Le but est de faire décroitre le degré de $x^3 + x^2 - 1$. Pour cela on cherche par quoi multiplier $x - 1$ pour compenser le terme dominant x^3. La réponse est x^2 car $x^2 \times (x - 1) = x^3 - x^2$. On commence donc le quotient par x^2 et on retranche $x^3 - x^2$ à $x^3 + x^2 - 1$. Il reste $2x^2 - 1$. Et on recommence : pour compenser le terme $2x^2$, il faut multiplier $x - 1$ par $2x$, ce qui donne $2x^2 - 2x$. On ajoute donc $2x$ au quotient, et on retranche $2x^2 - 2x$ à $2x^2 - 1$. Il reste $2x - 1$. Dernière étape : pour compenser le $2x$ il faut multiplier $x - 1$ par 2, ce qui donne $2x - 2$. On ajoute 2 au quotient, et on retranche $2x - 2$ à $2x - 1$. Il reste 1. Ainsi le quotient est $x^2 + 2x + 2$, et le reste 1, de sorte qu'on a $x^3 + x^2 - 1 = (x^2 + 2x + 2)(x - 1) + 1$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & & -1 & x \quad -1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2 \; +2x \; +2 \\ \cline{1-2}
& 2x^2 & & -1 & \\
& -2x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3}
& & 2x & -1 & \\
& & -2x & +2 & \\ \cline{3-4}
& & & +1 &
\end{array}$$

Voici l'algorithme d'Euclide en général. Comme dans le cas de la division des entiers, lorsqu'on fait la division de $A(x)$ par $B(x)$, on commence « par la gauche », c'est-à-dire qu'on cherche d'abord à compenser les termes de plus haut degré de $A(x)$, et on diminue le degré jusqu'à ce qu'il reste soit de degré plus petit que le degré de $B(x)$.

[Algorithme d'Euclide étendu]

Entrées : deux polynômes à coefficients complexes $A(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et $B(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ de degré respectifs $m, n \in \mathbf{N}$, avec B non nul.
Sorties : un polynôme-quotient $Q(x)$ et un polynôme-reste $R(x)$ tels que $A = QB + R$ et le degré de R est strictement inférieur à celui de B
Algorithme :
  $R(x) := A(x)$
  pour $i = m - n, m - n - 1, \ldots, 0$, faire :
    si $\deg(R) = n + i$:
      alors $q_i := \mathrm{dom}(R)/\mathrm{dom}(B)$ et $R(x) := R(x) - q_i x^i B(x)$
      sinon $q_i := 0$
  retourner $Q(x) := q_{m-n}x^{m-n} + q_{m-n-1}x^{m-n-1} + \cdots + q_1 x + q_0$ et $R(x)$.

1.9. Équations polynômiales complexes. — Soient a, b, c trois réels. L'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ admet toujours des solutions, éventuellement complexes.

1. si $b^2 - 4ac > 0$ l'équation admet deux racines réelles,
$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ;$$
2. si $b^2 - 4ac = 0$ l'équation admet une racine réelle « double »,
$$r = \frac{-b}{2a} ;$$
3. si $b^2 - 4ac < 0$ l'équation admet deux racines complexes,
$$r_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a} .$$

Ce résultat n'est pas étonnant, et vous le connaissez déjà. Le miracle est que les complexes permettent de résoudre non seulement les équations du second degré, mais toutes les équations algébriques quel que soit leur degré. Le théorème suivant a été énoncé par d'Alembert en 1746. Plusieurs preuves ont été par la suite proprosée, mais contenaient toutes des trous. Une preuve presque complète a été proposée par Gauss en 1799, mais elle contenait encore un trou, comblé en 1920 par Ostrowki. La première preuve complète est dûe à Argand en 1806. Il est partout connu comme le *théorème fondamental de l'algèbre*.

Théorème 1.54 (D'Alembert-Gauss)

Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$ à coefficients complexes. Le polynôme P est un produit de n facteurs de degré 1, à coefficients dans $\mathbf{C}$.

En d'autres termes, l'équation $P(x) = 0$ a toujours n solutions ; certaines solutions peuvent être multiples, et elles sont comptées avec leur ordre de multiplicité. On traduit cette propriété en disant que $\mathbf{C}$ est *algébriquement clos*.

Concrètement, peut-on trouver les racines d'un polynôme à coefficients complexes ? S'il est de degré 2, 3, ou 4, la réponse est oui.

Théorème 1.55

Soit a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Notons δ un nombre complexe satisfaisant $\delta^2 = b^2 - 4ac$. Alors le polynôme du second degré à coefficients complexes $az^2 + bz + c$ a pour racines

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}\,.$$

Le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé *discriminant* du polynôme. Si la forme trigonométrique de Δ est $\rho e^{i\theta}$, on peut prendre $\delta = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$. On a alors :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\iff a(z + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{\Delta}{4a} = 0 \\ &\iff (z + \tfrac{b}{2a})^2 = \tfrac{\Delta}{4a^2} = \left(\tfrac{\delta}{2a}\right)^2 \\ &\iff z = \tfrac{-b\pm\delta}{2a} \end{aligned}$$

On en déduit la factorisation du polynome $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Il reste une étape à combler pour pouvoir écrire les racines d'un polynôme du second degré, à savoir calculer un nombre δ tel que $\delta^2 = \Delta$.

Remarque 1.56. — *Calcul des racines carrées :* Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On veut trouver les nombres complexes $\delta = x + iy$ tels que $\delta^2 = z$. Comme $|\delta|^2 = |z|$, on est ramené à résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

En sommant les deux premières, on obtient l'égalité

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2},$$

ainsi que

$$y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2},$$

On en déduit deux valeurs possibles pour x et deux pour y. Il reste à remarquer que le signe de xy est donné par celui de b, ce qui donne deux possibilités pour le couple (x, y).

Pour les équations de degré 3 et 4, des formules générales existent, mais elles sont compliquées. À partir du degré 5, il n'y a plus de formule générale, comme l'ont démontré Niels Abel et Évariste Galois au début du XIXe siècle.

Un autre type d'équations complexes peut néanmoins être résolu en général, celles consistant à chercher une racine n-ième. On suppose pour cela qu'on sait extraire une racine n-ième dans $\mathbf{R}_+$. Dans la pratique on ne le fera que sur des exemples simples. En général les fonctions log et exp le permettent, puisque si ρ est un réel positif et n un entier positif, alors la racine n-ième de ρ est donnée par $\exp(\ln(\rho)/n)$.

Théorème 1.57 (Racines n-ièmes complexes)

Soit $z_0 = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe écrit sous forme polaire et n un entier naturel. Alors l'équation $z^n = z_0$ admet pour solutions les n nombres $\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\theta/n}$, $\sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\theta+2\pi)/n}$, $\sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\theta+4\pi)/n}, \dots, \sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\theta+2(n-1)\pi)/n}$.

En particulier les nombres de la forme

$$e^{i(2k\pi/n)}\ , \quad \text{pour } k = 0, \dots, n-1\ ,$$

sont les solutions de $z^n = 1$. On les appelle les *racines n-ièmes de l'unité* (figure 6).

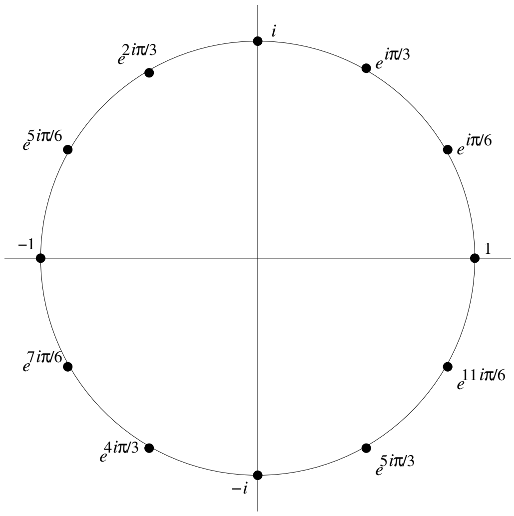


Figure 6. Racines douzièmes de l'unité.

Fiche de révision

1.1. Ensembles. —

- $\{1, 2, 3, 4, 5\}$: ensemble dont les éléments sont les nombres $1, 2, 3, 4$, et 5.
- $\{x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \,|\, x \leq 3\}$: sous-ensemble de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ constitué des nombres inférieurs ou égaux à 3, c'est-à-dire l'ensemble $\{1, 2, 3\}$
- $\{2n + 1\,;\, n \in \{1, 2, 3\}\}$: ensemble obtenu en partant de $\{1, 2, 3\}$ et en appliquant la fonction $n \mapsto 2n + 1$, c'est-à-dire $\{3, 5, 7\}$

$\in$	appartient $1 \in \{1, 2, 3\}$	$\notin$	n'appartient pas $4 \notin \{1, 2, 3\}$		
$\subset$	inclus $\{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$	$\not\subset$	non inlus $\{2, 4\} \not\subset \{1, 2, 3\}$	$\emptyset$	ensemble vide
$\cup$	union $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$	$\cap$	intersection $\{2, 3\} \cap \{1, 2\} = \{2\}$	$\boldsymbol{-}$	différence $\{1, 2, 3\} \boldsymbol{-} \{2, 3\} = \{1\}$

1.2. Nombres. —

- $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$: ensemble des nombres entiers naturels
  $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \boldsymbol{-} \{0\} = \{1, 2, \ldots\}$
- $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$: ensemble des nombres entiers relatifs
- $\mathbf{Q} = \{\frac{p}{q} \,|\, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}^*\}$: ensemble des nombres rationnels
- $\mathbf{R}$: ensemble des nombres réels
- $\lfloor x \rfloor$: partie entière de x
- $|x|$: valeur absolue de x
- $[\![-2, 3]\!]$: ensemble des nombres entiers entre -2 et 3
- $[\sqrt{2}, \pi[$: ensemble des nombres réels entre $\sqrt{2}$ (inclus) et π (exclu)
- $\{x \in \mathbf{R} \,\big|\, |x - a| < \varepsilon\} =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$

1.3. Polynômes. —

- $x^2 - 1$: polynôme en x, à coefficients entiers, de degré 2.
- $y^3 - \pi y + \sqrt{2}$: polynôme en y, à coefficients réels, de degré 3.
- racine de P : nombre a tel que $P(a) = 0$
- "a racine de P" est équivalent à "il existe Q de degré $\deg(P) - 1$ tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$"

Division euclidienne. A, B deux polynômes.
Il existe Q (quotient) et R (reste) avec $\deg(R) < \deg(B)$ tels que

$$A = BQ + R.$$

Si $R = 0$, B *divise* A.
Exemple (exécution de l'algorithme de division euclidienne des polynômes)

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & & -1 & x \quad -1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2 \; +2x \; +2 \\ \cline{1-2}
 & 2x^2 & & -1 & \\
 & -2x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3}
 & & 2x & -1 & \\
 & & -2x & +2 & \\ \cline{3-4}
 & & & +1 &
\end{array}$$

$Q(x) = x^2 + 2x + 2$ quotient, $R(x) = +1$ reste

1.4. Nombres complexes. —

— *nombre complexe* : tout nombre de la forme $z = a + \mathrm{i}b$, avec $a, b \in \mathbf{R}$.

$\mathrm{Re}(z) = a$: *partie réelle* de z

$\mathrm{Im}(z) = b$: *partie imaginaire* de z

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$: *module de* z

$\arg(z) = \theta$ tel que $\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\theta)$: *argument de* z

$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$: *décomposition polaire* de z

$\overline{z} = a - \mathrm{i}b$: *conjugué* de z

— $\mathbf{C}$: ensembles des nombres complexes.

— *addition :* $(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$,

— *multiplication :* $(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + \mathrm{i}(bc + ad)$.

— $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a\big(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)\big)$: exponentielle complexe

$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'} .$$

Exemples

nombre	module	argument	décomposition polaire	conjugué
i	1	$\pi/2$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$	$-\mathrm{i}$
$1+\mathrm{i}$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$	$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$	$1-\mathrm{i}$
$-1+\mathrm{i}$	$\sqrt{2}$	$3\pi/4$	$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3\pi/4}$	$-1-\mathrm{i}$
$1+\mathrm{i}\sqrt{3}$	2	$\pi/3$	$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$	$1-\mathrm{i}\sqrt{3}$
$\sqrt{3}+\mathrm{i}$	2	$\pi/6$	$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$	$\sqrt{3}-\mathrm{i}$

Formule de Moivre.

$$(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^n = \cos(nx)+\mathrm{i}\sin(nx)$$

Formules d'Euler.

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\ , \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2i}\ .$$

1.5. Équations polynômiales complexes. —
Équation de degré 2 :

$a, b, c \in \mathbf{C}, a \neq 0$, $\delta :=$ racine carrée complexe de b^2-4ac (discriminant).
Alors az^2+bz+c a pour racines

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}\ .$$

Calcul des racines carrées : $z = a+ib$: nombre complexe.
Pour trouver $\delta = x+\mathrm{i}y$ tel que $\delta^2 = z$ on résoud

$$\begin{cases} x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

On obtient l'égalité

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}, \qquad y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2},$$

signe de xy $=$ signe de b

Racines n-ièmes complexes

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k\pi/n)}$, avec $k = 0, \dots, n-1$: *racines n-ièmes de l'unité*
Pour $z_0 = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, l'équation $z^n = z_0$ admet pour solutions

$$\sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/n},\ \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2\pi)/n},\ \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+4\pi)/n}, \dots,\ \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2(n-1)\pi)/n}$$

Exercices

Ensembles, nombres entiers, rationnels et réels

Exercice 1.1. (*)

Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

1. $\{1,2,3\} \cup \{4,5,6\}$,
2. $\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\}$,
3. $\{1,2,3\} \cup \{1,3,4\}$,
4. $\{1,2,3\} \cap \{4,5,6\}$,
5. $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}$,
6. $(\{1,2\} \cup \{1,3\}) \cap \{3,4\}$,
7. $(\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}) \cup \{5,6\}$,
8. $(\{1,2\} \cup \{3,4\}) \cap \{2,4\}$,
9. $(\{1,\{2\}\} \cup \{2,3\}) \cap \{\{2\},\{3\}\}$,
10. $(\{1,\{2\}\} \cap \{\{2\},\{3\}\}) \cap \{\{2\},3\}$,
11. l'ensemble des nombres entiers compris entre $\sqrt{2}$ et 2π.

Exercice 1.2. (*)

On note A l'ensemble $\{1,2,3\}$ et B l'ensemble $\{-1,0,1\}$. Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

1. $A \cap B$,
2. $A \cup B$,
3. $A - B$,
4. $B - A$,
5. $\{x+2; x \in A\}$,
6. $\{2x; x \in B\}$,
7. $\{\frac{1}{x}; x \in A\}$,
8. $\{x+y; x \in A, y \in B\}$,
9. $\{x+y; x \in A, y \in A\}$,
10. $\{x+x; x \in A\}$,
11. $\{xy; x \in A, y \in B\}$,
12. $\{x \in A \,|\, x \geq 2\}$,
13. $\{x \in B \,|\, x \geq 2\}$,
14. $\{y \in A \,|\, y \leq 5\}$,
15. $\{z \in A \cup B \,|\, z \geq 0\}$,

Exercice 1.3. (*/)**

Écrire le plus simplement possible les ensembles suivants.

1. $[0,1] \cup [1,2]$,
2. $[0,1] \cap [1,2]$,
3. $[0,1] \cap \mathbf{Z}$,
4. $\{3n+2; n \in \{1,2,3\}\}$,
5. $\{2n+1; n \in [\![2,5]\!]\}$,
6. $\{3n+2; n \in \{1,2,3\}\} \cup \{4n+3; n \in \{1,2,3,4\}\}$,
7. $\{3n+2; n \in \{1,2,3\}\} \cap \{4n+3; n \in \{1,2,3,4\}\}$,
8. $\{2n+1; n \in \mathbf{Z}\} \cup \{2n; n \in \mathbf{Z}\}$,
9. $\{2n+1; n \in \mathbf{Z}\} \cap \{2n; n \in \mathbf{Z}\}$,
10. $\left\{\frac{p}{q}; p \in \{1,2,3,4\}, q \in \{1,2,3,4\}\right\}$,

11. $\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}\{n\}$,
12. $\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*}[n,n+1[$,
13. $\bigcup_{x\in\mathbf{R}}\{x^2\}$,
14. $\bigcup_{x\in[0,1]}]x-1,x+1[$,
15. $\bigcap_{x\in[0,1]}]x-1,x+1[$,
16. $\bigcap_{x\in[0,1]}[x-1,x+1]$,
17. $\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*}\left[0,\frac{1}{n}\right]$,
18. $\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*}\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$,
19. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,\lfloor x\rfloor=3\}$,
20. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,2\leq\lfloor x\rfloor\leq 6\}$,
21. $\{x\in\mathbf{Q}\,|\,|x|\leq 3\}$,
22. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x|=\lfloor x\rfloor\}$.

Exercice 1.4. (*)
Écrire les ensembles suivants comme intervalles ou réunions d'intervalles :

1. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,2\leq x<6\}$,
2. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x|<0,5\}$,
3. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x-2|<0,1\}$,
4. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x-5|\leq 0,01\}$,
5. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x-0,1|<0,2\}$,
6. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2<3\}$,
7. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^4\geq 1\}$,
8. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2-x\geq 0\}$.

Exercice 1.5. (*/)**
Représenter les sous-ensembles de $\mathbf{R}$ suivants

1. $[0,1[$,
2. $[0,1[\cup]2,3]$,
3. $[0,2]\cap]1,3[$,
4. $[0,2]\cap\mathbf{Z}$,
5. $[0,2]\cup\{3,4\}$,
6. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,2<x\leq 4\}$,
7. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x|<1\}$,
8. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x-3|<\frac{1}{2}\}$,
9. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x-1,5|>0,5\}$,
10. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2\leq 0\}$,
11. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,x(x-2)\leq 3\}$,
12. $\{x\in\mathbf{R}\,|\,\sin(x)>0\}$,
13. $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\left[n,n+\frac{1}{2}\right]$,

Exercice 1.6. (*)
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Pourquoi ?

— Le produit de 3 nombres réels est négatif si et seulement si l'un d'entre eux est négatif, les deux autres étant positifs.

— Le produit de n nombres réels est positif si et seulement si un nombre pair d'entre eux sont négatifs, les autres étant positifs.

Exercice 1.7. (**)

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont inclus dans lesquels ?

1. $[0,1]$,
2. $]-1,1[$,
3. $[0,\frac{1}{2}]$,
4. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^2 - x = 0\}$,
5. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x| < \dfrac{1}{5}\}$,
6. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x - 0,2| < 0,1\}$,
7. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0\}$.

Exercice 1.8. (**)

Les ensembles suivants coïncident-ils ?

1. $\{1,1,2\}$ et $\{2,1\}$;
2. $\{1,(1,2)\}$ et $\{(1,1)\}$;
3. $\{(1,1),(1,2)\}$ et $\{(1,1),(2,1)\}$;
4. $\{\{1\},\{1,2\}\}$ et $\{\{1\},\{2,1\}\}$;
5. $\{0,1,2,3\}$ et $\{x \in \mathbf{Z} \,|\, x \leqslant 3\}$;
6. $\{0,1,2,3\}$ et $\{x \in \mathbf{N} \,|\, x \leqslant 3\}$;
7. $[\![1,3]\!] \times [\![0,3]\!]$ et $\{(x,y) \in \mathbf{N}^2 \,|\, 1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 3\}$;
8. $\{(x,y) \in \mathbf{N}^2 \,|\, 0 \leqslant x < y \leqslant 3\}$ et $\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}$.

Exercice 1.9. (**)

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Simplifier l'expression $(A \cap B \cap C) \cup ({}^cA \cap B \cap C) \cup {}^cB \cup {}^cC$.
2. Démontrer que $(A \cap {}^cB) \cap {}^cC = A \cap {}^c(B \cup C) = (A \cap {}^cC) \cap {}^cB$.
3. A-t-on toujours $(A \cup B) \cap ({}^cA \cup {}^cC) \cap {}^cB \cap ({}^cA \cup B \cup C) = \emptyset$?

   Remarque informatique : Étant donné des sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un ensemble E et un ensemble F formé à partir de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ à l'aide des opérations $\cup, \cap$, et ^{c}, répondre à la question « F est-il toujours vide ? » est un exemple de problème très difficile à résoudre en pratique : le temps nécessaire à un ordinateur pour y répondre est en général exponentiel en n (c'est-à-dire de l'ordre de 2^n).

Trouver un algorithme qui réponde à cette question en temps polynomial (c'est-à-dire de l'ordre de n^5 ou n^{18}) est le problème le plus important de l'informatique théorique aujourd'hui. On l'appelle $P \stackrel{?}{=} NP$.

Nombres complexes et polynômes

Exercice 1.10. (*)

Mettre sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants.

1. $\dfrac{3+6\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$,
2. $\dfrac{5+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$,
3. $\dfrac{-2}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$,
4. $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2 + \dfrac{3+6\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$,
5. $\dfrac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$,
6. $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}-\sqrt{3}(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}\right)^2$.

Exercice 1.11. (*)

Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants.

1. $1+\mathrm{i}$,
2. $3+3\mathrm{i}$,
3. $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$,
4. $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$,
5. $\sqrt{3}+\mathrm{i}$,
6. $-\dfrac{4}{3}\mathrm{i}$,
7. $1+\mathrm{i}(1+\sqrt{2})$,
8. $(1+\sqrt{2})-\mathrm{i}$,
9. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$,
10. $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3$,
11. $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^4$,
12. $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^5+(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^5$,
13. $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$,
14. $\dfrac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2-2\mathrm{i}}$.

Exercice 1.12. (*)

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. tout nombre réel a pour argument 0.
2. tout nombre réel strictement négatif a pour argument π.
3. tout nombre imaginaire pur non nul a pour argument $\pi/2$ ou $3\pi/2$.
4. le conjugué d'un nombre imaginaire pur est égal à son opposé.
5. si deux nombres complexes ont le même argument alors leur produit est réel.
6. le produit de deux nombres imaginaires purs est réel.
7. si deux nombres complexes non nuls ont le même argument alors leur quotient est réel.

8. si deux nombres complexes non nuls ont le même module alors leur quotient a pour module 1.

Exercice 1.13. (*)

Soit z un nombre complexe non nul. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. le module de z est égal au module de son conjugué.
2. l'argument de z est l'opposé de l'argument de son conjugué.
3. le produit de z par une racine n-ième de l'unité a le même module que z.
4. l'argument de $-z$ est l'opposé de l'argument de z.
5. si la partie imaginaire de z est positive, alors son argument est compris entre 0 et π.
6. l'argument de z^2 est le double de l'argument de z.
7. l'argument de $z/\overline{z}$ est égal à l'argument de z^2.

Exercice 1.14. (**)

Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants (θ est un paramètre réel).

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$,
2. $1 + \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$,
3. $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.

Exercice 1.15. (**)

Calculer les racines carrées, sous forme algébrique, des nombres suivants

1. -1,
2. i,
3. $1 + \mathrm{i}$,
4. $-1 - \mathrm{i}$,
5. $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$,
6. $3 + 4\mathrm{i}$,
7. $8 - 6\mathrm{i}$,
8. $7 + 24\mathrm{i}$,
9. $3 - 4\mathrm{i}$,
10. $24 - 10\mathrm{i}$.

Exercice 1.16. (**)

1. Calculer les racines carrées de $(1 + \mathrm{i})/\sqrt{2}$ sous forme algébrique.

   En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$, exprimées à l'aide des quatre opérations standards et du signe $\sqrt{\ }$.
2. Calculer les racines carrées de $(\sqrt{3} + \mathrm{i})/2$ sous forme algébrique.

   En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 1.17. (**)
Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes, en donnant les solutions sous forme algébrique

1. $z^2 + z + 1 = 0$,
2. $z^2 - z + 1 = 0$,
3. $z^2 + 2z + 4 = 0$,
4. $z^2 + 4z + 5 = 0$,
5. $4z^2 - 2z + 1 = 0$,
6. $z^2 + (1+2\mathrm{i})z + \mathrm{i} - 1 = 0$,
7. $z^2 - (3+4\mathrm{i})z - 1 + 5\mathrm{i} = 0$,
8. $z^2 - (1-\mathrm{i})z - \mathrm{i} = 0$,
9. $z^2 - (11-5\mathrm{i})z + 24 - 27\mathrm{i} = 0$.

Exercice 1.18. (**)
Soit $z \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$. Trouver deux nombres réels p, q tels que $z^2 + pz + q = 0$.

Exercice 1.19. (**)
Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes, en donnant les solutions sous la forme que vous voulez

1. $z^3 = \mathrm{i}$
2. $z^3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{4}$,
3. $z^3 = 2 - 2\mathrm{i}$,
4. $z^4 = 1$,
5. $z^4 = (-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2$,
6. $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.

Exercice 1.20. (**)
Calculer le quotient et le reste de la division de A par B dans les cas suivants :

1. $A(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ et $B(x) = x - 1$,
2. $A(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ et $B(x) = x^2 + 1$,
3. $A(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ et $B(x) = x + 1$,
4. $A(x) = x^5 - 2x^3 - x^2 + x$ et $B(x) = x^2 - 1$.

Exercice 1.21. (**)
Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes.

1. $z^3 - 5z^2 + 6z = 0$,
2. $z^3 - 2z + 1 = 0$,
3. $z^3 - z^2 + 3z + 5 = 0$,
4. $z^3 - 2z + 4 = 0$.

Exercice 1.22. (**)
Montrer les égalités suivantes, en utilisant la formule de Moivre

1. $\cos(4x) = 8\cos(x)^4 - 8\cos(x)^2 + 1$,
2. $\sin(4x) = 8\cos(x)^3\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x)$.

Exercice 1.23. (**)

Linéariser les expressions suivantes (c'est-à-dire les écrire comme sommes d'expressions de type $a\cos(kx)$ et $b\sin(kx)$, avec $a, b \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}$).

1. $\cos(x)^3$,
2. $\sin(x)^3$,
3. $\cos(x)^4$,
4. $\sin(x)^4$,
5. $\cos(x)^2\sin(x)^2$,
6. $\cos(x)\sin(x)^3$,
7. $\cos(x)^3\sin(x)$,
8. $\cos(x)^3\sin(x)^2$,
9. $\cos(x)^2\sin(x)^3$,
10. $\cos(x)\sin(x)^4$.

Exercice 1.24. (***)

On note $\mathscr{G} = \{m^2 + n^2\,;\,(m,n) \in \mathbf{Z}^2\}$.

1. Donner un exemple d'entier naturel qui est dans $\mathscr{G}$ et un exemple d'entier naturel qui n'est pas dans $\mathscr{G}$.
2. En utilisant la formule $|zz'|^2 = |z|^2|z'|^2$ pour $z, z' \in \mathbf{C}$, montrer que $\mathscr{G}$ est stable par produit, c'est-à-dire que si $p, q \in \mathscr{G}$, alors $pq \in \mathscr{G}$.
3. En déduire que 221 est dans $\mathscr{G}$.

Exercice 1.25. (***)

Le but de l'exerice est d'exprimer $\cos(\frac{2\pi}{5})$ à l'aide des opération usuelles. On en déduira une façon de construire un pentagone régulier à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

1. Soit P le polynome défini par $P(z) = z^5 - 1$. Quelles sont les racines complexes de P, exprimées sous forme polaire ?
2. Soit Q le polynome défini par $Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$. Montrer qu'on $Q(z) \times (z-1) = P(z)$. En déduire que les racines complexes de Q sont les nombres $\cos(\frac{2\pi}{5}) + i\,\sin(\frac{2\pi}{5})$, $\cos(\frac{2\pi}{5}) - i\,\sin(\frac{2\pi}{5})$, $\cos(\frac{4\pi}{5}) + i\,\sin(\frac{4\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5}) - i\,\sin(\frac{4\pi}{5})$.
3. Pourquoi l'inverse de $\cos(\frac{2\pi}{5}) + i\,\sin(\frac{2\pi}{5})$ est-il le nombre $\cos(\frac{2\pi}{5}) - i\,\sin(\frac{2\pi}{5})$? et pourquoi l'inverse de $\cos(\frac{4\pi}{5}) + i\,\sin(\frac{4\pi}{5})$ est-il le nombre $\cos(\frac{4\pi}{5}) - i\,\sin(\frac{4\pi}{5})$?
4. En utilisant l'égalité $Q(z) = z^2(z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2})$, montrer que si z est racine de Q, alors $(z + z^{-1})$ est racine du polynôme R défini par $R(y) = y^2 + y - 1$.
5. Déterminer les racines de R et montrer qu'elles sont réelles. On les note y_1, y_2 avec $y_1 > 0$.

6. En utilisant les questions 3, 4, 5 et 6, montrer qu'on a $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos(\frac{4\pi}{5}) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.
7. Étant donné un segment dont la longueur est 1, comment construire un segment dont la longueur est $\sqrt{5}$ à l'aide d'une règle non graduée, d'une équerre, et d'un compas ? (penser à Pythagore)
8. En déduire comment construire un segment dont la longueur est $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
9. En déduire comment construire à partir d'un repère orthonormé le point de coordonnées $(\cos(\frac{2\pi}{5}), \sin(\frac{2\pi}{5}))$ à la règle et au compas.
10. Comment construire un pentagone régulier à la règle et au compas ?

Compléments

Ce paragraphe de compléments est réservé à une seconde lecture, son contenu ne fait pas partie du programme de l'unité d'enseignement.

1.1. L'ensemble de tous les ensembles

... n'existe pas ! Un ensemble E n'est défini que si pour tout objet x la proposition $x \in E$ est vraie ou fausse. Un ensemble peut contenir des ensembles, des ensembles d'ensembles, des balayettes et des ratons-laveurs, n'importe quoi pourvu que la règle du « tiers exclu » soit respectée : $x \in E$ est soit vrai soit faux, mais pas les deux à la fois.

Proposition 1.58

L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

Démonstration. — C'est un exemple de démonstration par l'absurde, que nous verrons plus en détail au chapitre 3. Supposons que l'ensemble de tous les ensembles existe, et notons-le E. Notons A l'ensemble

$$A = \{\, x \in E \,|\, x \notin x \,\}$$

Comme E contient tous les ensembles, A appartient à E. Est-ce que A appartient à A ?

- si $A \in A$ alors par définition de A, $A \notin A$,
- si $A \notin A$ alors par définition de A, $A \in A$.

L'assertion $A \in A$ ne peut pas être vraie et fausse en même temps, c'est donc que l'hypothèse de départ (E existe) était fausse. □

Des versions plus prosaïques de ce paradoxe sont connues depuis l'antiquité. Par exemple :

Epiménide le Crétois a dit : tous les Crétois sont des menteurs

ou bien

Le barbier rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes.

D'autres notions, apparemment claires, ne sont pas définies parce qu'elles conduisent à une contradiction. Par exemple :

Le plus petit nombre qu'on ne puisse pas définir en moins de vingt mots (la phrase ci-dessus comporte quinze mots).

1.2. Ensembles quotients. — Bertrand Russel (1872–1970) a dit « Les mathématiques sont nées au moment où l'on s'est rendu compte qu'il y avait quelque chose de commun entre un couple de faisans et une paire de claques ».

À la base des mathématiques, comme de toute activité intellectuelle se trouvent les concepts. Concept en mathématiques se dit classe d'équivalence : cela désigne une boîte fictive dans laquelle nous pouvons ranger toutes sortes d'objets, pourvu qu'ils aient une propriété commune. Une fois la boîte remplie, et dûment pourvue d'une étiquette nommant la propriété qu'elle représente, on peut oublier son contenu et ne plus garder que l'étiquette qui pourra d'ailleurs devenir un nouvel objet. Cette faculté d'abstraire des propriétés communes est essentiellement humaine. C'est l'arme qui nous a permis de prendre une telle avance dans la lutte darwinienne pour la survie de l'espèce. C'est sans doute parce que l'homme préhistorique voyait un rapport entre un bras qui frappe et une branche qui tombe qu'il a été capable d'inventer la massue. C'est aussi la base du langage. Tout mot est une classe d'équivalence : « bleu » ou « table » ne sont que des boîtes pouvant contenir des objets différents. Le miracle est que ces classes d'équivalence soient transmissibles : que deux humains différents puissent être globalement d'accord sur les contenus de leurs boîtes.

En mathématiques, les relations d'équivalence servent à fabriquer toutes sortes d'ensembles. Nous n'en donnerons qu'un exemple, la construction de l'ensemble $\mathbf{Q}$ des rationnels à partir de l'ensemble des entiers.

Un rationnel est le rapport de deux nombres entiers, l'un entier relatif, l'autre entier naturel non nul.

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q}\,,\ (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \right\}$$

Deux couples d'entiers peuvent représenter le même rationnel.

$$\forall p \in \mathbf{Z}\,,\ \forall q \in \mathbf{N}^* \quad \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff pq' = qp'$$

Oublions maintenant les rationnels et supposons que nous ne connaissions que l'ensemble $E = \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$. Considérons la relation $\mathscr{R}$ définie sur E de la façon suivante.

$$(p,q)\mathscr{R}(p',q') \iff pq' = qp'\ .$$

Il est facile de vérifier qu'elle est réflexive (c'est-à-dire qu'on a $p\mathscr{R}p$), symétrique (c'est-à-dire qu'on a $p\mathscr{R}q$ si et seulement si on a $q\mathscr{R}r$) et transitive (c'est-à-dire que si on a $p\mathscr{R}q$ et $q\mathscr{R}r$, alors on a $p\mathscr{R}r$) : c'est ce qu'on appelle une *relation d'équivalence.*

L'ensemble quotient $E/\mathscr{R}$ est par définition l'ensemble des classes d'équivalence, c'est-à-dire qu'on identifie les éléments de E qui sont équivalents par $\mathscr{R}$. Ici l'ensemble-quotient est précisément l'ensemble des rationnels. Mais pour que cette définition soit utilisable, il faut la compléter par les opérations dont nous avons besoin : addition, multiplication, ordre total.

1. *addition :* considérons l'application de $E \times E$ vers E qui à deux couples (p, q) et (r, s) associe le couple $(ps+rq, qs)$. C'est bien ce que nous attendons de l'addition des rationnels : $p/q + r/s = (ps + rq)/qs$. Le miracle est que l'application que nous avons définie « passe au quotient » : si $(p', q')\mathscr{R}(p, q)$ et $(r', s')\mathscr{R}(r, s)$, alors $(p's' + r'q', q's')\mathscr{R}(ps + rq, qs)$ (vérifiez... !). Si on la transporte sur l'ensemble quotient, cette application définit l'addition des rationnels.
2. *multiplication :* considérons l'application de $E \times E$ vers E qui à deux couples (p, q) et (r, s) associe le couple (pr, qs). C'est ce que nous attendons de la multiplication des rationnels : $(p/q)(r/s) = (pr)/(qs)$. Comme ci-dessus, si on la transporte sur l'ensemble quotient, l'application définit la multiplication des rationnels.
3. *ordre :* considérons la relation $\mathscr{O}$ sur E définie par :
$$(p, q)\mathscr{O}(r, s) \iff (ps \leqslant rq)$$
Même technique : une fois transportée sur l'ensemble quotient, la relation $\mathscr{O}$ devient la relation d'ordre total que nous attendons sur $\mathbf{Q}$.

Ce que nous venons de décrire pour l'ensemble des rationnels est un cas particulier d'une procédure très générale, qui consiste à rajouter ce qui manque à un ensemble en définissant une relation d'équivalence sur un ensemble plus gros. Ainsi on peut définir $\mathbf{Z}$ à partir de $\mathbf{N}$, puis $\mathbf{Q}$ à partir de $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$, puis $\mathbf{R}$ à partir de $\mathbf{Q}$ puis $\mathbf{C}$ à partir de $\mathbf{R}$. Cela sert aussi pour des espaces de fonctions, et encore bien d'autres objets que vous rencontrerez plus tard.

1.3. La marquise de Tencin. — Claudine Alexandrine Guérin, marquise de Tencin (1682-1749) était une femme du siècle des lumières. Née à Grenoble, elle fut placée au couvent de Montfleury à l'âge de 8 ans. Contrainte de prononcer ses vœux afin que sa famille puisse disposer de ses biens, elle se révolta et, dès la mort de son père en 1705, après avoir déposé une protestation chez un notaire, elle s'enfuit du couvent. Relevée de ses vœux par le pape en 1712, elle gagna Paris où elle se lança dans l'intrique politique et la galanterie. On lui prêta de nombreux amants, parmi lesquels le chevalier Destouches, dont elle eut un fils en 1717. Abandonné dès sa naissance sur les marches de la chapelle de Saint-Jean-le-Rond près de Notre-Dame, ce fils fut baptisé Jean Le Rond.

A 12 ans, il entre au collège janséniste des Quatre-Nations, où il étudie la philosophie, le droit et les arts, et devient avocat en 1738. Il s'intéresse à la médecine et aux mathématiques. Il s'était d'abord inscrit sous le nom de Daremberg, puis il le change en d'Alembert, nom qu'il conservera toute sa vie. Il est un des maîtres d'œuvre de l'Encyclopédie, dont le premier tome paraît en 1751.

En 1743 dans son Traité de Dynamique, il énonce le théorème fondamental de l'algèbre, qui dit que tout polynôme de degré n à coefficients complexes possède n racines dans $\mathbf{C}$ (ceci avait déjà été conjecturé par Girard au début du 17ème siècle). La démonstration que d'Alembert donne de ce résultat est incomplète, et il faudra attendre Carl Friedrich Gauss (1777–1855) pour une démonstration rigoureuse. En fait, celui-ci en donnera 4 tout au long de sa vie, clarifiant au passage considérablement la notion de nombre complexe.

Et Madame de Tencin ? On raconte que dès les premiers succès de son fils, elle désira se rapprocher de lui et le fit venir dans le salon littéraire (et aussi politique et financier) qu'elle tenait à Paris. D'Alembert y vint accompagné de sa mère adoptive, et se montra très froid à l'égard de la belle marquise...

1.4. Equations résolubles par radicaux. — On résout des équations du premier et du second degré au moins depuis les babyloniens, au début du deuxième millénaire avant notre ère, mais ce n'est que depuis les 16ème et surtout 17ème siècles que zéro et les nombres négatifs sont traités de la même façon que les nombres positifs. Ainsi il y avait avant une théorie pour l'équation $x^2 = ax + b$ et une autre pour $x^2 + ax = b$, a et b étant supposés positifs.

Au début du 9ème siècle Al Khawarizmi (dont le nom a donné algorithme) décrit la méthode de résolution des équations du second degré, pratiquement telle que vous la connaissez (mais en supposant que le discriminant est positif ou nul). Il faudra attendre sept siècles et une belle bagarre avant que l'on sache résoudre les équations de degré 3 et 4.

Niccolò Fontana, dit Tartaglia (1499-1557) est né à Brescia. Son surnom qui signifie « le bègue », provient d'un défaut d'élocution, séquelle d'un coup de sabre reçu en 1512. Ayant appris les mathématiques en autodidacte, il gagna sa vie en les enseignant dans toute l'Italie et en participant à des concours mathématiques. Il se consacra très tôt à la recherche d'une méthode de résolution d'équations du troisième degré.

Scipione del Ferro, professeur de mathématiques à Bologne, semble être le premier à résoudre les équations du troisième degré du type $x^3 = ax + b$. Il ne publia pas sa méthode mais la révéla avant sa mort à son élève Fior. En 1535, celui-ci lança à Tartaglia un défi public sous la forme d'un concours portant sur la résolution d'équations. Fior proposa 30 équations du type $x^3 + ax = b$, que Tartaglia résolut, et Tartaglia proposa

30 équations du type $x^3 + ax^2 = b$, que Fior ne savait pas résoudre. Vainqueur haut la main, Tartaglia renonça au prix : 30 banquets successifs !

À partir de 1539 Girolano Cardano (1501-1576) (l'inventeur du joint de Cardan) se passionne pour la résolution d'équations. Il fait venir Tartaglia chez lui, lui promet de lui présenter un mécène pour résoudre ses problèmes d'argent et lui demande de lui révéler sa technique, en lui promettant le secret. Cardan comprend alors la méthode générale, mais ayant appris que del Ferro avait trouvé une partie de la solution avant Tartaglia, il décide de la publier dans son livre *Ars Magna* en 1545 et s'en approprie la découverte. Une violente dispute s'ensuit !

Cardan ne parvenant pas à résoudre une équation de degré 4, il demanda l'aide de Ferrari. Celui-ci trouva le moyen de se ramener à une équation de degré 3, que Cardan savait désormais résoudre.

Voici ce que l'on appelle de manière assez injuste les « formules de Cardan ». Considérons l'équation

$$(E) \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ ,$$

avec $a \neq 0$. En divisant par a puis en posant $z = x + b/(3a)$, on obtient l'équation

$$(E') \qquad z^3 + pz + q = 0 \ ,$$

où

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{27a^2d - 9abc + 2b^3}{27a^3} \ .$$

Si $4p^3 + 27q^2 \geqslant 0$, La formule suivante donne une solution réelle en z :

$$z_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}} \tag{10}$$

Del Ferro, Fior, Tartaglia et Cardan n'utilisaient leurs formules que pour des équations dont on savait à l'avance qu'elles avaient des solutions réelles. Quand tout se passait bien, (10) donnait cette solution réelle. En factorisant par $(z - z_0)$, on se ramenait à une équation de degré 2 que l'on savait résoudre.

Cardan, puis Bombelli furent intrigués par l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$, dont 4 est racine. Pourtant, la formule de Cardan donne comme solution

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \ .$$

En fait dans le cas général (10) définit six nombres complexes, parmi lesquels seulement trois sont solutions de l'équation (E'). En effet, si u est tel que $u^3 = z$, les deux autres racines cubiques de z sont ju et $\overline{j}u$, où $j = e^{2i\pi/3}$ et $\overline{j} = j^2 = e^{4i\pi/3}$ sont les deux racines cubiques de l'unité différentes de 1. Voici la solution complète de (E').

1. Si $4p^3 + 27q^2 \geqslant 0$, soient u et v les deux réels tels que
$$u^3 = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{27}} \quad \text{et} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3+27q^2}{27}}$$
Les trois solutions de (E') sont
$$z_1 = u + v \;, \quad z_2 = ju + \overline{j}v \;, \quad z_3 = \overline{j}u + jv \;.$$
L'équation (E') a une solution réelle, et deux solutions complexes conjuguées.
2. Si $4p^3 + 27q^2 < 0$, soit u un des complexes tels que
$$u^3 = -\frac{q}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{-4p^3-27q^2}{27}}$$
Les trois solutions de (E') sont
$$z_1 = u + \overline{u} \;, \quad z_2 = ju + \overline{j}\overline{u} \;, \quad z_3 = \overline{j}u + j\overline{u} \;.$$
L'équation (E') a trois solutions réelles, même s'il faut passer par les complexes pour les écrire.

En 1572, Bombelli surmonte sa répulsion à l'égard des racines carrées de nombres négatifs et écrit le nombre « più di meno », c'est-à-dire i, puis définit les règles que vous connaissez, en particulier « più di meno via più di meno fa meno » : $i \times i = -1$. On constata bientôt qu'en acceptant les racines complexes et en comptant ces racines avec leur multiplicité, toute équation de degré 2 avait 2 racines, toute équation de degré 3 en avait 3 et toute équation de degré 4 en avait 4. Ceci fut énoncé par Girard en 1629, puis Descartes en 1637.

Et les équations de degré 5 ? On chercha longtemps une « résolution par radicaux » : une formule générale ne faisant intervenir que les opérations de $\mathbf{C}$ et l'extraction de racines. Le mémoire sur la résolution algébrique des équations que Joseph Louis Lagrange (1736–1813) publia en 1772 était une avancée importante. Il proposait une théorie ramenant le problème à l'étude des différentes valeurs que peuvent prendre certaines fonctions des racines lorsque l'on permute ces racines entre elles. Il y montrait aussi que les méthodes qui avaient conduit à la résolution des équations de degré $\leqslant 4$ ne pouvaient pas fonctionner sur une équation de degré 5 générale. Il s'écoula encore 60 ans avant qu'Evariste Galois (1811–1832) ne comprenne que la résolubilité par radicaux était liée aux propriétés du groupe des permutations des racines. Une conséquence de la théorie de Galois était la démonstration du fait que les équations de degré 5 n'étaient pas résolubles par radicaux en général. Ce n'est qu'en 1870, avec la parution du « Traité des substitutions et des équations algébriques » de Camille Jordan (1838–1922) que l'ampleur des conceptions de Galois fut pleinement comprise.

Il faut dire que Galois avait exposé ses idées dans des articles plutôt mal écrits, souvent incomplets, ainsi que dans une lettre à un ami, fébrilement écrite dans la nuit du 29 mai 1832. Elle se terminait par ces mots : « Après cela, il y aura j'espère des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis. Je t'embrasse avec effusion ». Le lendemain matin, il mourait des suites d'un duel ; il avait 21 ans.

Langage mathématique

Pierre Dehornoy, d'après Agnès Coquio, Eric Dumas, Emmanuel Peyre et Bernard Ycart

Ce chapitre est une prise de contact avec le langage mathématique. Il s'agit de reprendre et de comprendre les règles du jeu mathématique, basé sur le raisonnement déductif. Les exemples se veulent élémentaires et se basent sur des notions précédemment abordées.

Cours

2.1. Pourquoi un langage mathématique ? — Qu'est-ce que les mathématiques ? Selon le mathématicien russe Vladimir Igorievich Arnol'd (1937-2010), « c'est la branche de la physique où les expériences coutent peu cher. » Selon la conception logique, il s'agit d'un jeu de construction défini à partir de propriétés élémentaires —les axiomes— que l'on empile à l'aide de règles de déduction. Ces deux conceptions se complètent plus qu'elles ne s'opposent. La première est naturellement proche des sciences naturelles. La seconde est plus récente, et elle a de nombreux liens avec l'informatique —à sa naissance l'informatique théorique pouvait être vue comme une branche des mathématiques.

Dans ce chapitre, on se concentre sur la conception logique, en détaillant la nature des objets mathématiques et les règles du raisonnement. Pour organiser cela, le langage mathématique est comme une langue qu'il faut apprendre à maîtriser pour vivre dans ce monde mathématique. Précisons que s'il est tentant de tout redéfinir en partant de presque rien, c'est une tâche très fastidieuse, et donc nous ne ferons que partiellement semblant d'oublier tout ce que nous savons dèjà.

2.2. Objets mathématiques et assertions. — Avant de parler de règles de déduction, on doit s'entendre sur la nature des objets mathématiques, et la nature de ce qu'on produit en mathématiques, à savoir des assertions mettant en jeu ces objets et dont on s'est convaincu qu'elles sont vraies.

Vous connaissez déjà différents objets mathématiques : les *nombres*, qu'ils soient entiers, rationnels, réels, ou complexes, mais aussi les *ensembles*, revus dans les chapitres précédents. Une autre classe que vous connaissez déjà et que nous reverrons est constituée des *fonctions* : ce sont des objets qui prennent un élément d'un ensemble et rendent un élément d'un (autre) ensemble.

Tout n'est pas objet mathématique : les objets du monde physique ne sont pas mathématiques. Les seuls objets mathématiques sont ceux qui ont été définis comme tels.

L'enjeu des mathématiques est de déterminer des propriétés des objets mathématiques. Ces propriétés sont décrites par des assertions (auxquelles on donne différents noms et statuts pour marquer, ou pas, leur importance).

Définition 2.1 (Assertion)

Une assertion est une affirmation mathématique ne mettant en jeu que des objets mathématiques.

Exemples 2.2. — « 2 est un nombre pair » est une assertion mathématique (vraie).

— « Martin a cinq ans » n'est pas une assertion mathématique, puisque Martin n'est (sauf mention explicite du contraire) pas un objet mathématique, tout comme la notion d'âge.

— « Il y a cinq pommes dans ce sac » n'est pas une assertion mathématique, puisque les pommes sont des objets physiques et non mathématiques.

— « -5 est un nombre réel positif » est une assertion mathématique qui est fausse.

— « $3 = 5$ » est une assertion fausse.

— « π est-il égal à 3 ? » n'est pas une assertion mathématique, car c'est une question et non une affirmation.

— « Si x est un nombre réel tel que $x^2 - x = 0$, alors $x = 0$ ou $x = 1$ » est une assertion mathématique qui est vraie.

— « Ìl existe une infinité de nombres premiers p tels que $p + 2$ est premier » est une assertion mathématique (les nombres premiers sont les entiers naturels qui ne sont divisibles que par 1 et par eux-mêmes), dont nul ne sait aujourd'hui si elle est vraie ou fausse.

On utilise parfois (souvent) d'autres termes pour désigner les assertions mathématiques, pour marquer leur importance ou leur difficulté.

Terminologie 2.3

— *Théorème :* c'est une assertion importante, dont on démontre ou on admet qu'elle est vraie, et qui doit être connue par cœur ;

— *Proposition :* c'est le terme que nous utiliserons le plus souvent pour désigner une assertion qui est vraie, sans être aussi importante qu'un théorème ;

— *Lemme :* c'est une assertion démontrée, qui constitue une étape dans la démonstration d'un théorème ;

— *Corollaire :* c'est une conséquence facile d'un théorème.

— *Axiome :* c'est une assertion dont on s'entend pour dire qu'elle est vraie. On dit aussi *postulat*. Ces assertions sont les fondations de l'édifice mathématique. *Conjecture :* c'est une assertion dont certains mathématiciens pensent qu'elle est vraie, mais personne ne l'a encore démontré. Une fois démontrée, une conjecture devient un théorème.

Remarque 2.4. — Il est tentant de dresser une liste d'axiomes, et de redémontrer tout ce que l'on sait à partir de ces axiomes. C'est un processus très fastidieux qui a été tenté au cours du XXe siècle, en particulier sous l'impulsion du groupe Bourbaki. Si l'enthousiasme initial est un peu retombé, les progrès récents de l'informatique ont relancé ce programme. Ainsi des ordinateurs sont capables aujourd'hui de *certifier* des preuves. Récemment, plusieurs théorèmes très difficiles dont peu d'humains comprennent la preuve complète ont été vérifiés par ordinateur (classification des groupes finis simples, preuve par Hales de la conjecture de Kepler).

Retenons qu'il est possible, mais pénible, de tout reconstruire à partir de rien. Dans la pratique, on est satisfait d'une démonstration lorsqu'elle part d'axiomes admis par tous, et que chaque étape élémentaire est comprise par tous.

Remarque 2.5. — Comme exemple de conjectures célèbres, il y a eu pendant plus de 300 ans le (mal-nommé) *Grand théorème de Fermat* qui est devenu en 1994 le *théorème de Wiles*, car démontré par le mathématicien anglais Andrew Wiles. De même la *conjecture de Poincaré* est devenue au cours de la décennie 2000-2010 le *théorème de Perelman*, car démontrée par le mathématicien russe Grigory Perelman. Noter que

dans ce cas, il est difficile de mettre une date précise, car il y a fallu presque dix ans pour que la preuve de Perelman convainque le reste de la communauté mathématique.
Il est difficile de concevoir qu'il reste des conjectures en mathématiques, mais c'est bien le cas. Un exemple particulièrement simple est la *conjecture de Goldbach*, selon laquelle tout nombre entier pair plus grand que 6 est la somme de deux nombres premiers.

Une classe d'objets importants est constituée des *variables*. C'est un moyen de parler d'un objet (nombre, ensemble, fonction) sans forcément le connaître parfaitement. Par exemple lorsqu'on cherche à résoudre une équation comme $x^2-3x+1=0$, on introduit une variable x, sans dire plus que le fait que x est un nombre réel qui satisfait $x^2-3x+1=0$. Parfois, on dira même « Soit t un nombre réel quelconque. » Dans ce cas, on ne sait rien de plus que le fait que t soit réel. À l'inverse lorsqu'on dit « Posons $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ». On vient de donner un nom à un nombre un peu compliqué. Dans ce cas la valeur de ϕ est bien définie.

Définition 2.6 (Variable)

Une variable est un symbole représentant un objet mathématique dont la valeur n'est pas connue.
Lorsqu'une variable est introduite dans un énoncé en disant à quel ensemble elle appartient, on dit que la variable est *liée*. Sinon elle est dite *libre*.

Ainsi, dans les exemples précédents, les variables sont liées puisqu'on a donné l'ensemble des valeurs possibles pour la variable (les solutions de l'équation $x^2-3x+1=0$ dans le premier cas, n'importe quel réel dans le second cas, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dans le troisième cas). En revanche dans l'expression $y^3-3y=0$, on n'a rien précisé sur y, c'est donc une variable libre. Notons que si on ne sait rien sur y, on ne sait pas si l'assertion « $y^3-3y=0$ » est vraie ou fausse. Plus généralement, une assertion contenant une variable libre n'est ni vraie, ni fausse : tant qu'on ne sait rien de plus sur cette variable, on ne peut déterminer sa vérité.

Terminologie 2.7

Une assertion ne contenant que des variables liées est dite *close*. Elle est vraie ou fausse. [a]

Une assertion contenant au moins une variable libre est dite *ouverte*. On dit qu'elle dépend des *paramètres* que sont les variables libres. Une telle assertion n'est ni vraie ni fausse.

a. En fait, ce n'est pas le cas, et ça a été une révolution mathématique et philosophique de comprendre qu'il existe des assertions qui sont indémontrables, c'est-à-dire ni vraies ni fausses (théorèmes d'incomplétudes de Gödel, 1931). Cependant, les énoncés indémontrables ne sont pas si fréquents, et la plupart des assertions que nous pourrons écrire sont en effet vraies ou fausse.

Exemples 2.8. —

— « n est plus grand que 3 » est une assertion ouverte. On ne sait si elle est vraie ou fausse, puisque n est une variable libre.

— « Pour tout entier naturel n, n est plus grand que 3 » est une assertion close, qui est fausse. La variable n est liée, et on se convainc que l'assertion est fausse puisqu'il existe des entiers inférieurs à 3.

— En revanche, « Pour tout entier naturel n, si n est plus grand que 5, alors n est plus grand que 3 » est une assertion close, qui est vraie. La variable n est encore liée.

Le (un ?) but des mathématiques est d'établir quelles assertions sont vraies et quelles assertions sont fausses. Pour parvenir à cela, on combine des assertions dont on sait qu'elles sont vraies (ou fausses) et on en déduit de nouvelles.

Souvent il est utile de considérer une assertion dont on ne sait pas encore si elle est vraie ou fausse, et de la remplacer par une autre qui sera vraie exactement dans les mêmes situations.

Définition 2.9 (Équivalence)

Soit P et Q deux assertions (dépendant éventuellement de paramètres). On dit que P et Q sont équivalentes, et on note $P \iff Q$, si elles ont la même valeur de vérité, c'est-à-dire si elles sont toutes les deux vraies pour exactement les mêmes paramètres.

Exemple 2.10. —

— Si n est un entier, les assertions « $n \geqslant 5$ » et « $n > 4$ » sont équivalentes.

— Si n est réel, les assertions « $n \geqslant 5$ » et « $n > 4$ » ne sont pas équivalentes (par exemple $n = 9/2$ rend la première assertion vraie, mais la seconde fausse).

Pour bien comprendre l'équivalence, reprenez chacune des formulations en remplaçant P par « $n \geqslant 3$ » et Q par « $n > 2$ », où n est un nombre entier.

$P \iff Q$
P est équivalent à Q P équivaut à Q P entraîne Q et réciproquement si P est vrai alors Q est vrai et réciproquement P est vrai si et seulement si Q est vrai pour que P soit vrai il faut et il suffit que Q le soit P est une condition nécessaire et suffisante pour Q

Les opérateurs permettent de combiner les assertions pour en faire de nouvelles.

Définition 2.11 (Opérateurs logiques)

Étant donné deux assertions P et Q, on peut former de nouvelles assertions :

- la *négation* de P, notée $\neg P$ (« non P »), qui est vraie si et seulement si P est fausse,
- la *conjonction* de P et Q, notée $P \wedge Q$ (« P et Q »), qui est vraie si et seulement si à la fois P et Q sont vraies,
- la *disjonction* de P et Q, notée $P \vee Q$ (« P ou Q »), qui est vraie si et seulement au moins l'une parmi les deux assertions P et Q est vraie.

Exemples 2.12. — Voici quelques assertions composées et leur traduction.

$\neg(n < 5)$	n n'est pas strictement inférieur à 5
$(n < 5) \wedge (n \leqslant 2)$	n est strictement inférieur à 5 et inférieur ou égal à 2
$(n \geqslant 2) \vee (n \leqslant 0)$	n est supérieur ou égal à 2 ou n est inférieur ou égal à 0

Observez l'usage des parenthèses qui permettent d'identifier les énoncés dont l'assertion est composée.

Dans la vie courante le mot « ou » a deux significations possibles : dans un menu de restaurant il est « exclusif » : parmi les entrées proposées, vous n'en choisissez qu'une seule. En mathématiques, par contre, le « ou » est toujours inclusif : P ou Q signifie que l'une *au moins* des deux assertions est vraie (peut-être les deux). Par opposition, le « ou exclusif » est vrai quand exactement une des deux assertions est vraie.

Définition 2.13

Une assertion composée est appelée une *tautologie* si elle est vraie quelle que soit la valeur de vérité des assertions qui la composent.

Exemple 2.14. — L'assertion $P \vee (\neg P)$ est une tautologie.

Lorsqu'on combine des assertions à l'aide de connecteurs, il peut être utile d'utiliser des *tables de vérité*. Dans l'exemple ci-dessous, on décrit l'effet des connecteurs sur deux assertions P et Q, selon qu'elles sont vraies (V) ou fausses (F), en disant dans chacun des 4 cas si l'assertion composée est elle-même vraie ou fausse.

		négation non	conjonction et	disjonction ou
P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Lorsqu'on a une assertion dépendant de 3 ou 4 assertions de base, on peut établir ainsi à l'aide d'une table à 8 ou 16 lignes si l'assertion composée est vraie ou fausse, selon la valeur de vérité de chaque assertion de base.

Exemple 2.15. — On veut savoir si l'assertion $(P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge R)$ est vraie selon que P, Q et R sont vraies ou fausses. On dresse la table ci-dessous, où les 8 lignes correspondent aux huit possibilités.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$\neg(P \wedge R)$	$(P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge R)$
V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	V	V

Ainsi l'assertion $(P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge R)$ est fausse si P et R sont vraies et Q fausse, et elle est vraie dans tous les autres cas.

2.3. Quantificateurs

Les quantificateurs sont la nouveauté la plus importante de ce chapitre. Ils permettent de choisir un élément dans un ensemble. Il y en a deux, selon qu'on prend n'importe quel élément, ou qu'on a le droit de choisir.

Définition 2.16 (Quantificateurs)

Les quantificateurs sont les deux symboles $\forall$ « quel que soit » et $\exists$ « il existe ». Si A est un ensemble et $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre x, alors

— l'assertion $(\forall x \in A, P(x))$ est vraie si et seulement si l'assertion $P(x)$ est vraie pour n'importe quel x dans A.

— l'assertion $(\exists x \in A, P(x))$ est vraie si et seulement si l'assertion $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x dans A.

On dit aussi que $\forall$ est le quantificateur *universel* et $\exists$ le quantificateur *existentiel*. On les utilise pour des énoncés du type :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists m \in \mathbf{N}, \quad n < m. \tag{11}$$

Cette formule se lit : quel que soit n appartenant à $\mathbf{N}$, il existe m appartenant à $\mathbf{N}$ tel que $n < m$. Soit encore : pour tout entier n, il existe un entier m strictement plus grand que n. Il est crucial de retenir que dans ce cas l'entier m peut dépendre de l'entier n. Cette assertion est vraie : pour tout n, le nombre $m = n + 1$ vérifie bien $n < m$.

Noter que l'assertion « $n < m$ » contient deux variables libres, et donc elle n'est ni vraie ni fausse. De même l'assertion « $\exists m \in \mathbf{N}, n < m$ » contient une variable libre n, et donc elle n'est ni vraie ni fausse. En revanche l'assertion « $\forall n \in \mathbf{N},\ \exists m \in \mathbf{N},\quad n < m$ » contient deux variables qui sont maintenant liées, puisqu'introduites par un quantificateur.

De façon générale, si $P(x)$ est une assertion ouverte dépendant d'un unique paramètre x, les assertions $(\forall x \in A, P(x))$ et $(\exists x \in A, P(x))$ sont des assertions closes.

Remarque 2.17. — Le nom ou la lettre qu'on utilise pour désigner une variable n'a pas d'importante en général. On peut donc le changer, du moment qu'on le change à chaque fois que la variable intervient. Ainsi les deux assertions

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists m \in \mathbf{N},\quad n < m \tag{12}$$

et

$$\forall x \in \mathbf{N},\ \exists y \in \mathbf{N},\quad x < y \tag{13}$$

sont équivalentes. Par contre elles ne sont pas équivalentes à

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists n \in \mathbf{N},\quad n < n \tag{14}$$

qui n'a pas de sens, car la variable n est introduite deux fois dans la même assertion !

L'ordre dans lequel on écrit les quantificateurs est très important. Échangeons dans (12) les deux quantificateurs.

$$\exists m \in \mathbf{N},\quad \forall n \in \mathbf{N},\quad n < m\ .$$

Cette assertion se lit : il existe un entier m tel que tout entier n vérifie $n < m$ (ce qui est faux).

Nous commettrons souvent l'abus de notation consistant à regrouper des quantificateurs de *même nature* et portant sur les *mêmes ensembles*. Par exemple :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall m \in \mathbf{N},\quad m + n \in \mathbf{N},$$

sera plutôt écrit :

$$\forall n, m \in \mathbf{N},\quad m + n \in \mathbf{N}.$$

(La somme de deux entiers naturels est un entier naturel.)

Ou encore,

$$\exists n \in \mathbf{N},\ \exists m \in \mathbf{N},\quad n + m < 10,$$

deviendra :

$$\exists n, m \in \mathbf{N},\quad n + m < 10.$$

(Il existe deux entiers dont la somme est inférieure à 10.)

Une règle importante est que la négation échange les deux quantificateurs.

Proposition 2.18

Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre x et soit A un ensemble. alors les assertions

$$\neg(\forall x \in A,\ P(x)) \quad \text{et} \quad (\exists x \in A,\ \neg P(x))$$

sont équivalentes. De façon semblable, les assertions

$$\neg(\exists x \in A,\ P(x)) \quad \text{et} \quad (\forall x \in A,\ \neg P(x))$$

sont équivalentes.

Remarques 2.19. — i) Pour écrire la négation d'une assertion comportant des quantificateurs on change donc les $\forall$ en $\exists$ et les $\exists$ en $\forall$, puis on écrit la négation de l'assertion qui suit la liste des quantificateurs. Ceci est tout à fait conforme à l'intuition. La négation de « tout les x vérifient $P(x)$ » est bien « il existe un x qui ne vérifie pas $P(x)$ ». La négation de « il existe un x qui vérifie $P(x)$ » est bien « aucun x ne vérifie $P(x)$ » soit encore « tous les x vérifient $\neg P(x)$ ». Ecrivons par exemple la négation de l'assertion (11).

$$\exists n \in \mathbf{N}, \quad \forall m \in \mathbf{N},\ (n \geqslant m)\ .$$

Il existe un entier n supérieur ou égal à tout entier m (ce qui est faux).

ii) La première assertion permet en fait de définir le quantificateur universel à partir du quantificateur existentiel : $\forall x \in A,\ P(x)$ peut être défini comme $\neg(\exists x \in A,\ \neg P(x))$. la seconde assertion découle aussi de cette définition.

Pour les deux autres opérateurs logiques, il faut se méfier : il y a deux cas où l'on peut *distribuer*, et deux cas où l'on ne peut pas.

Proposition 2.20

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ des assertions dépendant d'un paramètre et soit A un ensemble. Les assertions

$$\exists x \in A, \quad P(x) \vee Q(x)$$

et

$$(\exists x \in A,\ P(x)) \vee (\exists y \in A,\ Q(y))$$

sont équivalentes. De même, les assertions

$$\forall x \in A, \quad P(x) \wedge Q(x)$$

et

$$(\forall x \in A,\ P(x)) \wedge (\forall y \in A,\ Q(y))$$

sont équivalentes.

Il convient d'être extrèmement prudent dans l'utilisation de cette propriété. En effet, le quantificateur existentiel n'est pas distributif par rapport à « et » et le quantificateur universel ne l'est pas par rapport à « ou » ! Par exemple, « il existe un entier supérieur à 7 et inférieur à 6 » (faux) n'est pas équivalent à « il existe un entier supérieur à 7 et il existe un entier inférieur à 6 » (vrai). De même « tout entier est inférieur ou égal à 7, ou supérieur ou égal à 6 » (vrai) n'est pas équivalent à « tout entier est inférieur ou égal à 7 ou tout entier est supérieur ou égal à 6 » (faux).

Idée de la preuve de la proposition. — Démontrons la première équivalence. Supposons

$$\exists x \in A, \quad P(x) \vee Q(x)$$

On se donne donc un élément $a \in A$ tel que $P(a)$ ou $Q(a)$. Dans le premier cas, $\exists x \in A,\ P(x)$, dans le second $\exists y \in A,\ Q(y)$ ce qui implique l'assertion

$$(\exists x \in A, \quad P(x)) \vee (\exists y \in A, \quad Q(y))$$

Réciproquement, on raisonne de façon similaire en distinguant deux cas. La deuxième équivalence peut se déduire de la première en utilisant la proposition 2.18. □

2.4. Implication et raisonnement déductif. — L'implication est un mécanisme de raisonnement fondamental. On dit qu'une assertion P implique une assertion Q si le fait que P soit vrai nous assure que Q le soit aussi. Voici une définition formelle

Définition 2.21 (Implication)

Pour des assertions P et Q, l'*implication* $P \Longrightarrow Q$ est définie comme $(\neg P) \vee Q$ (« non P ou Q »).

Remarque 2.22. — Par définition, l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie soit si P est fausse soit si P et Q sont vraies toutes les deux.

Notons que si $P \Rightarrow Q$ et P sont vraies alors Q est vraie. Cela fait de l'implication la base du raisonnement mathématique : l'assertion Q est démontrée dès lors qu'on a démontré P et $P \Rightarrow Q$.

Pour bien comprendre l'implication, reprenez chacune des formulations ci-dessous en remplaçant P par « $n > 3$ » et Q par « $n > 2$ ».

$P \implies Q$
P implique Q
P entraîne Q
si P est vrai alors Q est vrai
pour que Q soit vrai il suffit que P le soit
P est une condition suffisante pour Q
pour que P soit vrai il faut que Q le soit
Q est une condition nécessaire pour P

Remarque 2.23. — Pour démontrer une implication $P \Rightarrow Q$, la technique la plus simple consiste à supposer l'assertion P et à faire un raisonnnement qui démontre Q. On parle de raisonnement *direct*. C'est le plus utilisé. Nous verrons plus tard d'autres méthodes (raisonnement par contraposée ou par l'absurde).

Le raisonnement déductif consiste à démontrer une implication en enchainant les implications. Il est fondé sur le résultat suivant.

Proposition 2.24

Soit P, Q, R trois assertions. Alors l'assertion $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ est une tautologie.

Pour le démontrer il suffit (par exemple) de faire une table de vérité.

Autrement dit si l'implication $P \implies Q$ est vraie, ainsi que l'implication $Q \implies R$, alors l'implication $P \implies R$ est également vraie.

Définition 2.25 (Réciproque)

Étant donné une implication $P \implies Q$, l'*implication réciproque* est $Q \implies P$.

Voici la table de vérité de l'implication, de l'implication réciproque, et de l'équivalence, entre deux assertions P et Q. Constatez que l'équivalence $P \iff Q$ est vraie quand $P \implies Q$ et $Q \implies P$ sont toutes les deux vraies.

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$P \iff Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Proposition 2.26 (Double-implication)

Étant donné deux assertions P et Q. Elles sont équivalentes si et seulement si on a $P \implies Q$ et $Q \implies P$.

Remarque 2.27. — Pour démontrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$, On peut, dans les cas faciles, démontrer une chaine d'équivalences

$$P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow P_n \Leftrightarrow Q$$

C'est souvent ainsi qu'on résoud un système d'équations par exemple.

Quand on ne peut pas faire ainsi, une méthode générale consiste à démontrer successivement une implication $P \Rightarrow Q$ puis sa *réciproque* $Q \Rightarrow P$. On introduit souvent la démonstration de la réciproque par le mot « réciproquement ».

Dans le cas des équations, on parle aussi d'*analyse* et *synthèse* : on démontre d'abord que les équations impliquent que les valeurs cherchées appartiennent à un certain ensemble ; c'est la phase d'*analyse* de l'équation. On vérifie ensuite que les solutions trouvées conviennent, c'est la phase de *synthèse*.

Parmi les propriétés fondamentales de l'implication, on peut donner les énoncés suivants.

Axiomes 2.28

Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre x, soit A un ensemble et a un élément de A. Alors les assertions

$$(\forall x \in A,\ P(x)) \implies P(a)$$

et

$$P(a) \Longrightarrow (\exists x \in A,\ P(x))$$

sont des tautologies.

Exemple 2.29. — L'assertion

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$$

implique l'assertion

$$\pi^2 - 2\pi + 1 \geqslant 0,$$

car π est un nombre réel.

Les deux énoncés des axiomes 2.28 sont conformes à l'intuition. Notons que le deuxième correspond à la façon « standard » de démontrer une assertion d'existence : pour démontrer que $\exists x \in A,\ P(x)$, il suffit d'exhiber un élément $a \in A$ tel qu'on puisse démontrer $P(a)$. Une telle démonstration est dite *constructive* ou *effective* si on explique comment construire l'élément a. En particulier, pour démontrer qu'une assertion

$$\forall x \in A,\ P(x)$$

est *fausse*, il suffit d'exhiber un *contre-exemple* c'est-à-dire un élément $a \in A$ tel que $\neg P(a)$.

Remarque 2.30. — Pour démontrer une assertion avec un quantificateur universel

$$\forall x \in A,\ P(x), \tag{15}$$

on commence le plus souvent par écrire « Soit $x \in A$ ». Cela signifie que dans la démonstration qui suit x désigne un élément *arbitraire* et *fixé* de l'ensemble A. Si on démontre $P(x)$, alors, comme cela vaut pour un x arbitraire, on a démontré (15).

Exemple 2.31. — Démontrons l'assertion

$$\forall t \in \mathbf{R},\ t^2 + 2t + 2 > 0. \tag{16}$$

Soit $t \in \mathbf{R}$. On a l'égalité $t^2 + 2t + 2 = (t+1)^2 + 1$. Comme le carré d'un nombre réel est positif, $(t+1)^2 \geqslant 0$. Donc $(t+1)^2 + 1 \geqslant 1 > 0$. Cela conclut la preuve de (16).

2.5. Autres modes de raisonnement. — Il ne s'agit pas de proposer ici une théorie du raisonnement mathématique. Nous avons déjà mentionné (*cf.* remarque 2.27) le raisonnement *direct*, qu'on utilise le plus souvent, ainsi que les raisonnements *par analyse et synthèse*. Nous allons maintenant donner quelques exemples de démonstrations, pour illustrer quatre types de raisonnements supplémentaires : par contraposée, par l'absurde, par disjonction de cas et par récurrence.

Raisonnement par contraposée
Il consiste, plutôt que de démontrer l'implication $P \Longrightarrow Q$, à démontrer sa contraposée $(\neg Q) \Longrightarrow (\neg P)$. En effet ces deux implications sont équivalentes, comme on peut le vérifier sur une table de vérité.

Il est difficile de donner une règle générale d'utilisation de ce raisonnement. Un bon conseil avant de se lancer dans la démonstration d'une implication, est d'écrire d'abord sa contraposée. Avec un peu d'expérience, on arrive vite à sentir laquelle des deux est la plus facile à démontrer. Si le résultat désiré est Q, on cherche les conséquences de non Q pour arriver aux bonnes hypothèses. Notre premier exemple est un résultat facile, mais très utile.

Proposition 2.32

Soit x un nombre réel tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $x \leqslant \varepsilon$. Alors $x \leqslant 0$.

Démonstration. — Nous devons démontrer l'implication :

$$\Big(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^* \,, \quad x \leqslant \varepsilon\Big) \implies (x \leqslant 0)\,.$$

Ecrivons sa contraposée :

$$(x > 0) \implies \Big(\exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+^* \;; \qquad x > \varepsilon\Big)\,.$$

« Si x est strictement positif, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x > \varepsilon$ ». C'est vrai : il suffit de choisir $\varepsilon = x/2$. □

Étant donné deux assertions P et Q et l'implication $P \Longrightarrow Q$, il ne faut pas confondre la contraposée qui est l'implication $(\neg Q) \Longrightarrow (\neg P)$ et la réciproque qui est l'implication $Q \Longrightarrow P$. La contraposée $(\neg Q) \Longrightarrow (\neg P)$ est équivalente à $P \Longrightarrow Q$, et donc se démontre à la place de $P \Longrightarrow Q$. En revanche la réciproque $Q \Longrightarrow P$ n'est PAS équivalente à $P \Longrightarrow Q$. On la démontre EN PLUS de $P \Longrightarrow Q$ lorsqu'on cherche à démontrer l'équivalence $P \Longleftrightarrow Q$.

Insistons : lorsque $P \Longrightarrow Q$ est vraie, alors automatiquement la contraposée $(\neg Q) \Longrightarrow (\neg P)$ est vraie. En revanche, la réciproque $Q \Longrightarrow P$ peut être vraie ou fausse, selon les cas.

Exemple 2.33. — L'implication $\forall x \in \mathbf{R}, (x > 2) \Longrightarrow (x > 1)$ est vraie.
Sa contraposée est $\forall x \in \mathbf{R}, (x \leqslant 1) \Longrightarrow (x \leqslant 2)$, elle est aussi vraie.
Par contre l'implication réciproque est $\forall x \in \mathbf{R}, (x > 1) \Longrightarrow (x > 2)$, elle est fausse.

Raisonnement par l'absurde

Il consiste à démontrer une assertion en vérifiant que sa négation conduit à une contradiction avec les hypothèses. Formellement, si P désigne les hypothèses, plutôt que de démontrer $P \Rightarrow Q$, on démontre $(P \wedge (\neg Q)) \Rightarrow (1 = 0)$. S'il n'y a pas d'hypothèse et qu'on veut démontrer une assertion Q, cela revient plutôt à démontrer $\neg Q \Rightarrow (1 = 0)$.

Dans certains cas il se distingue mal du raisonnement par contraposée : si P désigne la conjonction des hypothèses et Q la conclusion, nier Q et aboutir à une contradiction, revient à démontrer $\neg P$ à partir de $\neg Q$, ce qui est la contraposée de $P \Longrightarrow Q$.

Voici un résultat classique.

Proposition 2.34

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration. — Un nombre rationnel est le quotient de deux entiers ; un nombre irrationnel n'est pas rationnel. Nous devons donc démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas le quotient de deux entiers. Supposons le contraire : il existe deux entiers p et q tels que $\sqrt{2} = p/q$. Quitte à simplifier la fraction, nous pouvons supposer que p et q n'ont pas de facteur commun. Multiplions par q et élevons au carré :

$$2q^2 = p^2 .$$

Le nombre $p^2 = 2q^2$ est pair, donc p est également pair. Mais si p est pair, alors p^2 est multiple de 4. Donc q^2 est multiple de 2, donc q est pair. Mais alors 2 est un facteur commun à p et q, ce qui est une contradiction. $\square$

Raisonnement par disjonction de cas

Dans certains raisonnements, il peut être pratique de considérer successivement deux cas. Ainsi, si on veut démontrer une assertion $P(x)$ pour tout élément x d'un ensemble E qui est la réunion de deux parties A et B, on démontre d'abord l'assertion $P(x)$

pour $x \in A$ puis l'assertion $P(x)$ pour $x \in B$ et, comme $E = A \cup B$, on peut conclure que l'assertion $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.

À titre d'exemple, démontrons le résultat suivant :

Proposition 2.35

Pour tout entier n, le nombre rationnel $\frac{n(n+1)}{2}$ est entier.

Démonstration. — Nous allons distinguer deux cas suivant la parité de l'entier n.

Premier cas. Si n est pair alors ce nombre est le produit de l'entier $\frac{n}{2}$ par l'entier $n+1$. C'est donc un entier.

Deuxième cas. Si n est impair, alors $n+1$ est pair et le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est le produit de l'entier n par l'entier $\frac{n+1}{2}$; c'est donc également un entier.

Comme tout nombre entier est soit pair soit impair, l'assertion « $\frac{n(n+1)}{2}$ est entier » est démontrée pour tout entier n. □

Raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une assertion $H(n)$ dépendant d'un entier n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, on démontre :

1. $H(0)$ « initialisation »,
2. $\forall n \in \mathbf{N}\,,\ (\,H(n) \Longrightarrow H(n+1)\,)$ « hérédité ».

L'assertion $H(n)$ est *l'hypothèse de récurrence*. Il peut se faire qu'elle ne soit vraie que pour $n \geqslant 1$ ou $n \geqslant 2$, auquel cas, on la démontre pour la plus petite valeur pour laquelle elle est vraie. Voici la démonstration d'une formule à connaître :

Proposition 2.36

Pour tout entier $n \geqslant 1$, la somme des entiers de 1 à n vaut $n(n+1)/2$.

Démonstration. — L'hypothèse de récurrence est :

$$H(n) \quad : \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\ .$$

1. *Initialisation.* Pour $n = 1$:
$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} \; .$$

2. *Hérédité.* Soit n un entier strictement positif quelconque. Supposons que $H(n)$ est vraie. Ecrivons :
$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) \; .$$
En appliquant $H(n)$, on obtient
$$(1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \; ,$$
Le membre de droite s'écrit
$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \; ,$$
Nous avons donc démontré que
$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \; ,$$
c'est-à-dire que $H(n+1)$ est vraie.

$\square$

On pourra noter au passage que la proposition donne un nouvelle preuve du fait que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre entier !

On peut être amené, pour démontrer $H(n+1)$ à utiliser $H(m)$ pour $m \in \{0, \ldots, n\}$, ce qui ne change rien au principe de la récurrence. L'hérédité est remplacée par
$$\forall n \in \mathbf{N} \, , \; \Big((\forall m \in \{0, \ldots, n\} \, , \quad H(m) \,) \implies H(n+1) \Big) \; .$$

Pour deviner quelle est la bonne hypothèse $H(n)$, on doit souvent essayer plusieurs valeurs successives de n : $n = 0$, puis $n = 1$, $n = 2, \ldots$ C'est parfaitement inutile pour la démonstration. Attention, ce n'est pas parce qu'une propriété est vraie pour quelques valeurs de n qu'elle est vraie pour tout n. Voici deux exemples.

1. Les nombres 31, 331, 3 331,. . . , 33 333 331 sont tous premiers. Mais 333 333 331 = 17 × 19 607 843 ne l'est pas.
2. Pour toutes les valeurs de n allant de 0 à 39, le nombre $n^2 + n + 41$ est premier. Mais le nombre $40^2 + 40 + 41 = 41^2$ ne l'est pas.

Il est intéressant de noter qu'on peut démontrer la validité du principe de récurrence à partir d'une propriété simple et intuitive des entiers naturels : « tout sous-ensemble de $\mathbf{N}$ admet un plus petit élément ». Cette propritété se traduit comme suit :

$$\forall A \subset \mathbf{N}, \exists m \in A, \forall n \in A, m \leqslant n.$$

Noter que cette propriété est fausse dans $\mathbf{Z}$, ou même dans $\mathbf{Q}_+$.

Proposition 2.37 (Validité du principe de récurrence)

Soit $P(n)$ une assertion dépendant d'un paramètre $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$(P(0) \wedge (\forall n \in \mathbf{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1))) \quad \Longrightarrow \quad (\forall n \in \mathbf{N}, P(n)).$$

Démonstration. — On va démontrer la contraposée, qui est l'implication

$$(\exists n \in \mathbf{N}, \neg P(n)) \quad \Longrightarrow \quad (\neg P(0) \vee (\exists n \in \mathbf{N}, P(n) \wedge \neg P(n+1))).$$

On suppose donc qu'on a $\exists n \in \mathbf{N}, \neg P(n)$. Alors on consière l'ensemble des entiers pour lesquels $P(n)$ est fausse :

$$F := \{n \in \mathbf{N} \mid \neg(P(n))\}.$$

Par hypothèse F est non vide. D'après l'axiome admis ci-dessus, F possède un plus petit élément, notons-le m.

Alors on sépare deux cas :

Cas $m = 0$. Alors on a $\neg(P(0))$.

Cas $m \neq 0$. Alors on a $\neg(P(m))$, et par minimalité de m on a $P(m-1)$. Par conséquent en prenant $n = m - 1$, on a montré $(\exists n \in \mathbf{N}, P(n) \wedge \neg P(n+1)))$.

En réunissant les deux cas, on a bien montré $(\neg P(0) \vee (\exists n \in \mathbf{N}, P(n) \wedge \neg P(n+1)))$, ce qui conclut. □

Donnons un exemple d'utilisation du principe de récurrence, un peu plus compliqué, mais très important en informatique. Il s'agit de montrer qu'un algorithme donné termine (c'est-à-dire ne travaille pas un temps infini) et donne bien le résultat attendu. On va donc démontrer à l'aide d'une récurrence la validité de l'algorithme d'Euclide décrit en 1.8.

Théorème 2.38 (Validité de l'algorithme d'Euclide pour les polynômes)

L'algorithme d'Euclide étendu appliqué à deux polynômes $A(x), B(x)$ fournit bien deux polynômes $Q(x), R(x)$ tels que $A = BQ + R$ et $\deg(R) \in [\![0, \deg(B) - 1]\!]$.

Démonstration. — Avec les notations introduites en 1.8, on note $A(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$ et $B(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$. Commençons par faire une disjonction de cas :
Cas 1 : $\deg(A) < \deg(B)$. Dans ce cas l'algorithme rend juste $Q(x) = 0$ et $R(x) = A(x)$, et on a bien $A(x) = 0 \times B(x) + A(x)$, avec $\deg(A) < \deg(B)$ dans ce cas, donc l'algorithme donne le résultat attendu.
Cas 2 : $\deg(A) \geqslant \deg(B)$. Nous allons faire une preuve par récurrence sur la différence des degrés $\deg(A) - \deg(B) = m - n$. Cette différence est un entier naturel, et on va démontrer par récurrence sur p l'assertion :

Si la différence $m - n$ vaut p, alors l'algorithme d'Euclide rend deux polynômes Q, R tels que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

Si $p = 0$, alors A et B sont de même degré. Dans cette situation l'algorithme ne traite que le cas $i = 0$, et il rend $Q(x) = \frac{a_m}{b_n}$ et $R(x) = A(x) - \frac{a_m}{b_n}B(x)$. On a bien $A(x) = Q(x)B(x) + R(x)$, et R est bien un polynôme de degré au plus $m-1$ puisqu'on a enlevé le premier terme de $A(x)$. Ainsi l'algorithme marche bien dans ce cas.

Supposons $p \geqslant 0$ et que la propriété est vraie pour tout $q \leqslant p$, et supposons maintenant qu'on a deux polynômes A, B tels que $m - n = p + 1$. Dans ce cas, le premier cas traité est le cas $i = m - n = p + 1$. Comme au début de l'algorithme on a $R(x) = A(x)$, on a $\deg(R) = \deg(A) = m$. Pour éviter de confondre, notons $R_0(x) = A(x)$ cette première valeur du polynôme $R(x)$ au cours de l'éxécution de l'algorithme. L'algorithme propose alors de remplacer $R_0(x)$ par $R_1(x) := R_0(x) - \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}B(x)$. Le coefficient du monôme de degré $m - n$ de $R_1(x)$ est alors $a_m - a_m = 0$, donc R_1 est de degré au plus $m - n - 1 = p$.

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à R_1 : la suite de l'algorithme rend alors deux polynômes $Q_2(x)$, $R_2(x)$ tels que $R_1(x) = Q_2(x)B(x) + R_2(x)$ et $\deg(R_2) < \deg(B)$. Alors les sorties finales de l'algorithme sont $Q(x) = a_m x^{m-n} + Q_2(x)$ et $R_2(x)$. On a alors $A(x) = R_0(x) = \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}B(x) + R_1(x) = \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}B(x) + Q_2(x)B(x) + R_2(x) = (\frac{a_m}{b_n}x^{m-n} + Q_2(x))B(x) + R_2(x)$, et comme $\deg(R_2) < \deg(B)$, les sorties ont bien les propriétés attendues. □

Noter que l'algorithme pour les entiers naturels est une variante de l'algorithme pour les polynômes décrit en 1.8, et que la preuve ci-dessus s'adapte pour montrer que l'algorithme appris à l'école primaire donne le résultat attendu.

2.6. Rédaction. — Ajoutons quelques remarques concernant la rédaction des preuves : tout d'abord une bonne preuve en mathématiques doit être claire, concise et complète. Autrement dit, tous les arguments doivent être donnés, mais en allant à l'essentiel. D'autre part, si vous-même ne comprenez pas votre preuve, il est peu probable que quelqu'un d'autre, par exemple l'enseignant qui corrige votre copie, la juge satisfaisante.

Utilisation du français : Une preuve mathématique reste avant tout un texte rédigé en français. Il convient donc de respecter les règles grammaticales lorqu'on écrit une preuve, en gardant à l'esprit que chaque phrase d'une preuve doit en plus avoir un sens mathématique précis.

Utilisation de symboles : Une règle générale pour la rédaction d'une preuve est que tout symbole utilisé doit avoir une signification précise. Ainsi si l'on écrit dans une preuve mathématique

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1$$

il faut qu'auparavant f ait été défini, par exemple comme une application à valeur réelle dont l'ensemble de définition contient l'intervalle $[0,1]$. Par contre, le sens de la lettre t est lié à la notation de l'intégrale et ne doit pas avoir été défini auparavant ; autrement dit, cette notation assure qu'ici t désigne un nombre réel qui parcourt l'intervalle $[0,1]$. Notons que dans cette notation la lettre t est *muette* : on peut la remplacer par une autre lettre sans que cela change le sens de l'expression.

Utilisation des quantificateurs universels : Rappelons qu'un des principes des quantificateurs est que si $P(x)$ est une assertion dépendant d'un paramètre x, alors on a l'implication

$$(y \in A \text{ et } \forall x \in A, P(x)) \Rightarrow P(y)$$

Cela signifie que lorsqu'on a démontré une assertion pour tout élément x d'un ensemble A, l'assertion obtenue en substituant chaque occurence de x par un élément donné y de A en découle. Notons à ce sujet que lorsque on remplace une variable par un expression, il convient d'entourer celle-ci de parenthèses pour éviter toute erreur. Par exemple si on applique l'assertion

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad 1 - t^2 = (1-t)(1+t),$$

au nombre réel $3 - \pi$, il convient de l'écrire

$$1 - (3 - \pi)^2 = (1 - (1 - 3\pi))(1 + (3 - \pi)).$$

Utilisation des quantificateurs existentiels : Si on a démontré ou que l'on suppose une assertion avec un quantificateur existentiel $\exists x \in A,\ P(x)$, pour utiliser l'assertion dans la suite de la preuve on peut se donner un tel élément $a \in A$ tel que $P(a)$, ce qui est légitime puisqu'on sait qu'il en existe. Nous en verrons de nombreux exemples dans le chapitre sur les limites de suites et de fonctions.

Utilisation de « soit » : Au cours d'une preuve, on utilise souvent des expressions du type « soit $x \in A$ » où A est un ensemble défini auparavant. Cela signifie que, dans la suite de la preuve, la lettre x désigne un élément fixé, mais *arbitraire* de l'ensemble A. En particulier, on ne peut pas modifier x dans le suite de la démonstration et la seule chose qu'on sait de x est qu'il appartient à l'ensemble A. Si on démontre dans la preuve l'assertion $P(x)$ qui dépend de x, alors on a en fait démontré l'assertion

$$\forall x \in A, P(x).$$

Si $Q(x)$ est une assertion dépendant d'une variable x, une variante est l'expression « soit $x \in A$ tel que $Q(x)$ », cette expression a la même signification que « soit $x \in \{\, y \in A \mid Q(y) \,\}$ ».

Il faut prendre garde au fait que l'expression « soit $a \in A$ » inclut la supposition que l'ensemble A est non vide, mais ne garantit pas qu'il le soit réellement. Par contre, si l'on a démontré auparavant l'existence d'un élément dans A, un tel élément a existe, et l'expression revient à en fixer un pour la suite de la démonstration.

Pour conclure, il est presque impossible de donner explicitement toutes les règles expliquant comment rédiger une preuve correcte. Pour apprendre à bien rédiger, il faut tout d'abord lire et comprendre les preuves données en cours qui sont, en principe, des modèles de preuves, c'est pour cela que les preuves données en cours sont une partie essentielle du cours. Ensuite, il faut essayer de rédiger, ce n'est qu'en forgeant qu'on devient forgeron. L'apprentissage du langage mathématique est comme l'apprentissage des autres langages : il faut pratiquer une langue pour la maîtriser.

2.7. Appendice : propriétés des opérateurs logiques. — Soit E un ensemble, et $P(x), Q(x)$ deux assertions dépendant d'un paramètre x dans E. Soit E_P le sous-ensemble de E pour lesquels $P(x)$ est vraie, c'est-à-dire $E_P := \{x \in E \,|\, P(x)\}$. On définit de même $E_Q := \{x \in E \,|\, Q(x)\}$. Alors on a une correspondance entre les opérations sur les ensembles E, E_P, E_Q d'une part, et les opérateurs logiques sur les assertions P et Q d'autre part :

$$\begin{aligned}
E - E_P &= \{x \in E \mid \neg P(x)\} \\
E_P \cap E_Q &= \{x \in E \mid P(x) \wedge Q(x)\} \\
E_P \cup E_Q &= \{x \in E \mid P(x) \vee Q(x)\}
\end{aligned}$$

Ceci permet de transcrire toutes les propriétés du théorème 1.18 en leurs alter ego concernant les assertions et les opérateurs logiques.

Théorème 2.39

Soient P, Q et R trois assertions. Les équivalences suivantes sont des tautologies.

- Commutativité :

$$\Big(P \wedge Q\Big) \Longleftrightarrow \Big(Q \wedge P\Big) \tag{17}$$

« P et Q » équivaut à « Q et P »

$$\Big(P \vee Q\Big) \Longleftrightarrow \Big(Q \vee P\Big) \tag{18}$$

« P ou Q » équivaut à « Q ou P »

- Associativité :

$$\Big(P \wedge (Q \wedge R)\Big) \Longleftrightarrow \Big((P \wedge Q) \wedge R\Big) \tag{19}$$

« P et (Q et R) » équivaut à « (P et Q) et R »

$$\Big(P \vee (Q \vee R)\Big) \Longleftrightarrow \Big((P \vee Q) \vee R\Big) \tag{20}$$

« P ou (Q ou R) » équivaut à « (P ou Q) ou R »

- Distributivité :

$$\Big(P \wedge (Q \vee R)\Big) \Longleftrightarrow \Big((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)\Big) \tag{21}$$

« P et (Q ou R) » équivaut à « (P et Q) ou (P et R) »

$$\Big(P \vee (Q \wedge R)\Big) \Longleftrightarrow \Big((P \vee Q) \wedge (P \vee R)\Big) \tag{22}$$

« P ou (Q et R) » équivaut à « (P ou Q) et (P ou R) »

- Négations :

(23) $$\Big(\neg(\neg P)\Big) \iff P$$

« non (non P) » équivaut à P

(24) $$\Big(\neg(P \vee Q)\Big) \iff \Big((\neg P) \wedge (\neg Q)\Big)$$

« non (P ou Q) » équivaut à « (non P) et (non Q) »

(25) $$\Big(\neg(P \wedge Q)\Big) \iff \Big((\neg P) \vee (\neg Q)\Big)$$

« non (P et Q) » équivaut à « (non P) ou (non Q) ».

2.8. Appendice : quelques axiomes sur les nombres. — On a dit que les axiomes sont les pièces de base du raisonnement mathématique, que l'on combine à l'aide de raisonnements. Voici des exemples importants.

Nombres entiers

— (*plus petit élément*)

$$\forall A \subset \mathbf{N}, \exists m \in A, \forall n \in A, m \leqslant n$$

Cet axiome dit que tout sous-ensemble des entiers naturels a un plus petit élément. Il est faux si on remplace $\mathbf{N}$ par $\mathbf{Z}$. C'est cet axiome que l'on a utilisé pour montrer que le raisonnement par récurrence est valide.

Nombres réels

— (*signes*)

—

$$\forall x, y, z \in \mathbf{R}, (x \leqslant \wedge \leqslant z) \Rightarrow x < z\,.$$

— (*signes et addition*)

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, (x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0) \Rightarrow x + y \geqslant 0\,.$$

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, (x \leqslant 0 \wedge y \leqslant 0) \Rightarrow x + y \leqslant 0\,.$$

— (*signes et multiplication*)

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, (x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0) \Rightarrow x \times y \geqslant 0\,.$$

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, (x \geqslant 0 \wedge y \leqslant 0) \Rightarrow x \times y \leqslant 0\,.$$

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, (x \leqslant 0 \wedge y \geqslant 0) \Rightarrow x \times y \leqslant 0\,.$$

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, (x \leqslant 0 \wedge y \leqslant 0) \Rightarrow x \times y \geqslant 0\,.$$

— (*approximation des réels par des rationnels, densité de* $\mathbf{Q}$ *dans* $\mathbf{R}$)

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists y \in \mathbf{Q}, |x - y| < \varepsilon\,.$$

— (*propriété de la borne supérieure*)

$$\begin{aligned} \forall A \subset \mathbf{R}, \qquad & (\exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in A, x \leqslant M) \\ \Rightarrow \quad & (\exists m \in \mathbf{R}, \forall M \in \mathbf{R}, (\forall x \in A, x \leqslant M) \Rightarrow m \leqslant M) \end{aligned}$$

Cet axiome est un peu long et compliqué, mais il est essentiel. Il dit que si un sous-ensemble A de $\mathbf{R}$ admet un *majorant* (c'est-à-dire un nombre M plus grand que tous les éléments de A), alors il admet un majorant plus petit que tous les autres majorants de A. On appelle ce plus petit majorant la *borne supérieure de* A.

Noter que cette propriété est fausse dans $\mathbf{Q}$. Ainsi l'ensemble $S := \{x \in \mathbf{Q} \,|\, x^2 < 2\}$ est un ensemble majoré (tous les éléments de S sont par exemple plus petits que 2, ou que $1,5$), mais il n'y a pas de plus petit majorant : le plus petit majorant dans $\mathbf{R}$ est le nombre $\sqrt{2}$, mais dans $\mathbf{Q}$ tout nombre m plus grand que $\sqrt{2}$ est un majorant de S, et il existe toujours des rationnels dans l'intervalle $]\sqrt{2}, m[$, donc m n'est jamais un plus petit majorant.

Fiche de révision

2.1. Principaux symboles logiques introduits dans le chapitre. —

$\neg$	non	$\vee$	ou	$\wedge$	et
$\exists$	il existe	$\forall$	quelque soit		
$\Rightarrow$	implique	$\Leftrightarrow$	équivalent à		

2.2. Tables de vérités de base. —

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

2.3. Assertions et variables. —

variable libre : non introduite par un quantificateur

variable liée : introduite précédemment ou par un quantificateur

assertion close : pas de variable libre, ex :$\exists x \in \mathbf{N}, x^2 - x = 0$. Une telle assertion est vraie ou fausse.

assertion ouverte : il y a des variables libres (ou paramètres), ex : $\exists x \in \mathbf{N}, x^2 - y = 0$. Une telle assertion n'est ni vraie ni fausse.

$P \Leftrightarrow Q$: les deux assertions sont équivalentes.

tautologie : assertion toujours vraie, quelles que soient les valeurs des variables libres ou des assertions qui la composent, ex 1 : $x^2 - x = x(x-1)$, ex 2 : $P \wedge (\neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \Rightarrow Q)$.

2.4. Règles de négation. — Les lettres P, Q et R désignent des assertions qui dans les cas e) et f) dépendent d'un paramètre. La lettre E désigne un ensemble.

a) $\neg(\neg P)$ équivaut à P ;

b) $\neg(P \vee Q)$ équivaut à $(\neg P) \wedge (\neg Q)$;

c) $\neg(P \wedge Q)$ équivaut à $(\neg P) \vee (\neg Q)$;

d) $\neg(P \Rightarrow Q)$ équivaut à $P \wedge (\neg Q)$;

e) $\neg(\exists x \in E, P(x))$ équivaut à $\forall x \in E, (\neg P(x))$;

f) $\neg(\forall x \in E, P(x))$ équivaut à $\exists x \in E, (\neg P(x))$.

2.5. Règles de raisonnement. —

2.5.1. *Raisonnement direct.* — Pour démontrer Q, on démontre P et $P \Rightarrow Q$.

2.5.2. *Double-implication ou analyse synthèse.* — Pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$, on démontre l'implication $P \Rightarrow Q$ et l'implication-réciproque $Q \Rightarrow P$.

2.5.3. *Contraposée.* — Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on démontre $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.

2.5.4. *Absurde.* — Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on démontre $P \wedge (\neg Q) \Rightarrow \texttt{faux}$.

2.5.5. *Disjonction de cas.* — Si $P(x)$ est une assertion dépendant d'un paramètre $x \in A$ et si $A = B \cup C$, pour démontrer $(\forall x \in A, P(x))$, on démontre $(\forall x \in B, P(x))$ et $(\forall x \in C, P(x))$.

Pour $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre $x \in A$, si $A = B \cup C$, pour démontrer $(\exists x \in A, P(x))$, on démontre $(\exists x \in B, P(x))$ ou $(\exists x \in C, P(x))$.

2.5.6. *Récurrence.* — Pour $P(n)$ une assertion dépendant d'un paramètre $n \in \mathbf{N}$, pour démontrer $(\forall n \in \mathbf{N}, P(n))$, on démontre

$$P(0) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)\,.$$

2.5.7. *Récurrence forte.* — Pour $P(n)$ une assertion dépendant d'un paramètre $n \in \mathbf{N}$, pour démontrer $(\forall n \in \mathbf{N}, P(n))$, on démontre

$$P(0) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ ((\forall m \in [\![0, n]\!], P(m)) \Rightarrow P(n+1))\,.$$

Exercices

Logique semi-mathématique, syllogismes

Exercice 2.1. (*)

(Deux compliments, d'après Godement, *Cours d'algèbre*). À la suite d'une représentation de *Pelléas et Mélisande*, un journaliste hésite entre les deux rédactions suivantes :

— Jamais le rôle de Mélisande n'a été si bien chanté.

— Jamais si jeune cantatrice, aux si beaux cheveux, n'a si bien chanté Mélisande.

Lequel de ces compliments est le plus fort ?

Exercice 2.2. (*)

Parmi les syllogismes suivants, dire lesquels sont valides et lesquels sont invalides.

1. Tous les chats sont mortels, or Socrate est mortel, donc Socrate est un chat.
2. Tous les chats sont mortels, or Socrate est un chat, donc Socrate est mortel.
3. Si le soleil est là c'est le jour, or c'est le jour, donc le soleil est là.
4. Si le soleil est là c'est le jour, or c'est la nuit, donc le soleil n'est pas là.
5. Un petit pois ne peut être rouge et vert à la fois, or celui-ci est rouge, donc il n'est pas vert.
6. Un petit pois ne peut être rouge et vert à la fois, or celui-ci n'est pas rouge, donc il est vert.
7. Tout carré est un rectangle, et tout carré est un losange, donc tout rectangle est un losange.
8. Tout carré est un rectangle, et tout rectangle est un parallélogramme, donc tout carré est un parallélogramme.
9. Plus il y a de gruyère plus il y a de trous, et plus il y a de trous moins il y a de gruyère, donc plus il y a de gruyère moins il y a de gruyère.

Exercice 2.3. (**)

(D'après *Le livre qui rend fou*, de Raymond Smullyan) Un roi joueur désire laisser une chance à des condamnés. Il les amène devant un ensemble de portes derrière chacune desquelles se trouve un tigre ou une princesse. Sur les portes sont placardées des indications. Le prisonnier doit choisir une porte (on suppose que les prisonniers préfèrent les princesses aux tigres).

1. Pour le premier prisonnier il y deux portes. L'une des affiches dit la vérité, l'autre ment.

   Sur la première est écrit : “Il y a une princesse dans cette cellule et un tigre dans l'autre.”

   Sur la seconde : “Il y a une princesse dans une cellule et il y a un tigre dans une cellule.”

   Le prisonnier a-t-il intérêt à ouvrir une porte plutôt que l'autre, et si oui laquelle ?
2. Pour le second prisonnier, toujours deux portes. Cette fois par contre, soit les deux affiches disent la vérité, soit elles mentent toutes les deux.

   Sur la première : “Une au moins des deux cellules contient une princesse.”

   Sur la seconde : “Il y a un tigre dans l'autre cellule.”
3. Pour le troisième prisonnier, les règles sont les mêmes que pour le second.

   Première porte : “Il y a un tigre dans cette cellule ou il y a une princesse dans l'autre.”

   Deuxième porte : “Il y a une princesse dans l'autre cellule.”
4. Maintenant il y a trois portes, et le roi a placé une princesse et deux tigres exactement. De plus, seule une des trois affiches dit la vérité.

   Sur la première porte on lit : “Il y a un tigre ici.”

   Sur la seconde : “Cette cellule contient une princesse.”

   Sur la troisième : “Il y a un tigre dans la seconde cellule.”
5. Il y a toujours une princesse et deux tigres, mais maintenant l'affiche collée sur la porte de la princesse dit la vérité tandis qu'une au moins des deux autres est fausse.

   Première porte : “Il y a un tigre dans la deuxième cellule.”

   Deuxième porte : “Il y a un tigre ici.”

   Troisième porte : “La première cellule contient un tigre.”

Langage mathématique

Exercice 2.4. (*)

Écrire des assertions à l'aide de quantificateurs traduisant les énoncés suivants.

1. Tout nombre réel positif est le carré d'un nombre réel.
2. Tout entier pair est le double d'un entier.

3. Pour tout entier relatif, il existe un entier relatif plus grand.
4. Pour tout nombre réel, il existe un nombre rationnel tel que la différence des deux est plus petite que 0,1 en valeur absolue.
5. Tout nombre complexe non nul est le carré de deux nombres complexes distincts.
6. Il existe deux nombres réels irrationnels dont le produit est rationnel.

Exercice 2.5. (*)
Soit P, Q, R trois assertions, et a, b, c trois nombres réels. Écrire la négation des assertions suivantes.

1. $P \wedge (\neg Q)$
2. $(P \Longrightarrow Q) \wedge R$
3. $\exists x \in [1, +\infty[, a \geq b + x$
4. $\exists x \in \mathbf{R}_+, a = b + x$
5. $a = b = c$

Exercice 2.6. (**)
Pour chacune des assertions ci-dessous, dire quelles variables sont liées. Dire ensuite si l'assertion dépend d'un paramètre. Écrire chaque assertion en français. On rappelle qu'une assertion est *close* si elle ne dépend pas d'un paramètre. Dire pour chaque assertion close si elle est vraie ou fausse.

1. $x \geqslant y$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant 0$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
5. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
6. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{N}, x \geqslant y$.
7. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, x \geqslant y$.
8. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, (x \geqslant y \text{ et } (\forall z \in \mathbf{Z}, x \geqslant z \Rightarrow y \geqslant z))$.

Exercice 2.7. (**)
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou le fausses, et le démontrer.

1. $1 + 1 = 2 \Longrightarrow 1 + 1 = 3$;
2. $1 + 1 = 3 \Longrightarrow 1 + 1 = 2$;
3. $1 = 0 \Longrightarrow (\exists a, b \in \mathbf{N}^*, a^2 + b^2 = 0)$;
4. $\forall x \in \mathbf{R}, x > 2 \Longrightarrow x \geq 3$;

5. $\forall x \in \mathbf{R}, x > 3 \Longrightarrow x \geq 3$;
6. $\forall x \in \mathbf{R}, x \in [2,3] \Longrightarrow x \in [0,4]$;
7. $\forall x \in \mathbf{R}, x \in [2,3] \Longrightarrow x \leq 3$;
8. $\forall x \in \mathbf{R}, x \notin [2,3] \Longrightarrow x \geq 3$;
9. $\forall x \in \mathbf{R}, x \notin [2,+\infty] \Longrightarrow x \leq 3$;
10. $\forall x, y \in \mathbf{R}^*, x > y \Longrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$;
11. $\exists x \in \mathbf{R}_+^*, x < \sqrt{x}$;
12. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 0$;
13. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y > 0$;
14. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 0$;
15. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y > 0$;
16. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, |x| < \varepsilon$;
17. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, x < |\varepsilon|$;
18. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^*, \exists x \in \mathbf{R}, x < |\varepsilon|$;
19. $\exists t \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}, |x| < t \Rightarrow x^2 < 3$;

Exercice 2.8. (*)

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Ecrire en fonction de A, B, C les ensembles correspondant aux assertions suivantes.

1. x appartient aux trois.
2. x appartient au moins à l'un d'entre eux.
3. x appartient à deux d'entre eux au plus.
4. x appartient à l'un d'entre eux exactement.
5. x appartient à deux d'entre eux au moins.
6. x appartient à l'un d'entre eux au plus.

Assertions et tables de vérié

Exercice 2.9. (*)

Soient P, Q et R des assertions. À l'aide d'une table de vérité, vérifiez que l'implication

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Longrightarrow (P \Rightarrow R)$$

est toujours vraie.

Exercice 2.10. (*)

Soit P et Q deux assertions, l'assertion $P \oplus Q$ (dire "P ou exclusif Q") est vraie si exactement l'une des deux assertions P et Q est vraie.

1. Donner la table de vérité de $P \oplus Q$ selon les vérités de P et Q.
2. Démontrer l'équivalence $P \oplus Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.
3. Démontrer l'équivalence $P \oplus Q \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$.

Exercice 2.11. (**)
Soient P, Q et R trois assertions.

1. Simplifier l'expression $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee \neg Q \vee \neg R$.
2. Démontrer que $(P \wedge {}^{\neg}Q) \wedge \neg R = P \wedge {}^{R}(Q \vee R) = (P \wedge \neg R) \wedge \neg Q$.
3. Démontrer que $(P \vee Q \Rightarrow \neg R) \wedge (P \vee R \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (\neg R)$.

Raisonnements

Exercice 2.12. (*)

1. Écrire la contraposée de l'assertion $\forall x, y \in \mathbf{R}, (x + y) > 2 \Rightarrow (x > 1 \vee y > 1)$.
2. Démontrer l'assertion ou sa contraposée.
3. Énoncer précisément la réciproque de cette assertion, et déterminer si elle est vraie ou fausse.

Exercice 2.13. (*)
(Conjectures de Goldbach). La *conjecture de Goldbach forte* affirme que tout nombre pair $\geqslant 4$ est la somme de deux nombres premiers. La *conjecture de Goldbach faible* affirme que tout nombre impair $\geqslant 7$ est la somme de trois nombres premiers.

1. Traduire les deux énoncés par des assertions mathématiques à l'aide de symboles.
2. Montrer que la conjecture forte implique la conjecture faible. La conjecture faible implique-t-elle la conjecture forte ?

Remarque : En 2013, Harald Helfgott a démontré la conjecture de Goldbach faible.

Exercice 2.14. (**)
On considère les propriétés suivantes de l'ordre total sur $\mathbf{R}$, valables pour tous a, b et c réels :

$$(a \leqslant b \text{ et } b \leqslant c) \Rightarrow a \leqslant c \tag{26}$$

$$a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c \tag{27}$$

$$(a \leqslant b \text{ et } c \geqslant 0) \Rightarrow ac \leqslant bc \tag{28}$$

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation $3x + 2 \leqslant -2x + 1$ d'inconnue x en utilisant uniquement (en ce qui concerne les propriétés de l'ordre total) les règles ci-dessus. À chaque étape, on indiquera la règle utilisée.

2. Montrer, en utilisant uniquement les règles (26) et (27), la règle suivante, valable pour tous réels a, b, c et d :

$$(a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d) \Rightarrow a + c \leqslant b + d$$

3. Montrer, en utilisant uniquement les règles (26), (27) et (28), la règle suivante :

$$(a \leqslant b \text{ et } c \leqslant 0) \Rightarrow ac \geqslant bc$$

4. Montrer, en utilisant uniquement la règle (28), la règle suivante :

$$(a < b \text{ et } c > 0) \Rightarrow ac > bc$$

Exercice 2.15. (**)

En utilisant un raisonnement direct, montrer que

1. Si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable et paire, alors sa dérivée f' est impaire.
2. Pour tout élément $x > 0$ de $\mathbf{Q}$, il existe un entier $n > 0$ tel que $n > x$.

Exercice 2.16. (**)

En utilisant un raisonnement par *disjonction des cas* (ou *cas par cas*),

1. Montrer l'assertion $\forall x \in \mathbf{R}, (x \notin \mathbf{Q}) \vee (\exists n \in \mathbf{N}^*, nx \in \mathbf{Z})$.
2. Soient a et b deux réels, montrer qu'on a
$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|),$$
$$\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$
3. Montrer que, quelque soit l'entier naturel $n \in \mathbf{N}$, 3 divise $n(n + 1)(2n + 1)$.
4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que la somme $n + m$ soit impaire et le produit nm soit pair.
5. Trouver tous les réels x tels que $|x + 1| = 3 - |3x - 2|$.

Exercice 2.17. (**)

En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que

1. $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ n'est pas un rationnel.

2. Soit n un entier naturel non nul et $a_1, \ldots, a_n$, n réels de somme égale à 1. Alors un de ces réels est plus petit que $\frac{1}{n}$.

Exercice 2.18. (**)

En utilisant un raisonnement par analyse et synthèse,

1. Soit a, b deux nombres réels. Démontrer que l'assertion $\forall x \in [0,1], ax + b \geq 0$ est équivalente à l'assertion $(b \geq 0 \wedge a + b \geq 0)$.
2. Soient D_1 et D_2 deux droites parallèles et distinctes du plan orienté. Soit A un point du plan n'appartenant ni à D_1, ni à D_2. Construire un triangle équilatéral ABC tel que B appartient à D_1 et C appartient à D_2. Combien y a t-il de triangles possibles. (*On supposera qu'un tel triangle existe et on cherchera comment construire B ou C en utilisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$*)
3. Montrer que toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 2.19. (**)

1. Montrer à l'aide d'une récurrence que tout nombre entier $\geqslant 12$ peut s'écrire sous la forme $4a + 5b$, pour des entiers naturels a et b.
2. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $\forall n > 0, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n = 3^n - 2^n$.

Exercice 2.20. (**)

(Nombres de Fibonacci). On définit les *nombres de Fibonacci* $(F_n)_{n\geqslant 1}$ par récurrence de la façon suivante :

$$F_1 = F_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Calculer les nombres de Fibonacci (F_n), pour $1 \leqslant n \leqslant 10$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il y a exactement F_{n+1} façons de paver un échiquier de taille $2 \times n$ avec des dominos.
3. Démontrer l'assertion $\forall n \geqslant 2, \forall m \geqslant 1, F_{n+m} = F_{n-1}\, F_m + F_n F_{m+1}$ (on pourra fixer un entier $n \geqslant 2$ et démontrer $\forall m \geqslant 1, F_{n+m} = F_{n-1}\, F_m + F_n F_{m+1}$ par récurrence double.)
4. Démontrer l'assertion $\forall n \geqslant 2, F_n^2 = F_{n-1}\, F_{n+1} + (-1)^{n+1}$.

Exercice 2.21. (**)

(Une récurrence foireuse). La « preuve » suivante prétend montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ qu'étant donné n nombres réels $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbf{R}$, ils sont en fait tous égaux.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion

« quels que soient $u_1, \ldots, u_n \in \mathbf{R}$, on a $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$. »

Montrons $\forall n \in \mathbf{N}^*, P(n)$ par récurrence.

Initialisation. S'il n'y a qu'un nombre u_1, il n'y a rien à montrer, ce qui montre $P(1)$.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$ un entier tel que $P(n)$.

Montrons $P(n+1)$.

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1} \in \mathbf{R}$.

D'après $P(n)$, on a déjà $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$.

Par ailleurs, si l'on pose $u'_1 = u_2, u'_2 = u_3, \ldots, u'_n = u_{n+1}$ et que l'on applique $P(n)$ à la famille $(u'_1, \ldots, u'_n)$, on obtient $u'_1 = \cdots = u'_{n-1} = u'_n$, c'est-à-dire $u_2 = \cdots = u_n = u_{n+1}$.

Cela entraîne que $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = u_{n+1}$, et montre donc la propriété voulue.

Le résultat est évidemment faux. Où est le problème ?

Exercice 2.22. (***) *Théorème de Helly en dimension 1*

Soit $n \geq 2$ un entier, et $I_1, I_2, \ldots, I_n$ des intervalles de $\mathbf{R}$. On considère l'assertion suivante :

$$\text{si pour tous } i, j \in [\![1, n]\!] \text{ l'intersection } I_i \cap I_j \text{ est non vide,}$$
$$\text{alors l'intersection globale } \bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} I_i \text{ est un intervalle non vide de } \mathbf{R}.$$

Pour simplifier, on ne considère que des intervalles fermés.

1. Faites un dessin pour $n = 3$ pour vous convaincre que l'assertion est vraie dans ce cas.
2. Montrer que l'assertion est fausse si on suppose seulement que $I_1, \ldots, I_n$ sont des sous-ensembles de $\mathbf{R}$ et pas nécessairement des intervalles.
3. En utilisant la notion de min et de max, donner une preuve directe de l'assertion.
4. Le théorème est-il encore vrai s'il y a une infinité d'intervalles ?

Compléments

Ce paragraphe de compléments est réservé à une seconde lecture, son contenu ne fait pas partie du programme de l'unité d'enseignement.

2.1. Ces longues chaînes de raisons. — Voici cinq textes célèbres à propos de l'universalité et de la perfection du langage mathématique.

Platon (428-348 av. J.-C.), *La République*
Tu n'ignores pas, je pense, que ceux qui s'occupent de géométrie, d'arithmétique et autres sciences du même genre, supposent le pair et l'impair, les figures, trois espèces d'angles et autres choses analogues suivant l'objet de leur recherche : qu'ils les traitent comme choses connues, et que quand ils en ont fait des hypothèses, ils estiment qu'ils n'ont plus à en rendre aucun compte ni à eux-mêmes ni aux autres, attendu qu'elles sont évidentes à tous les esprits ; qu'enfin, partant de ces hypothèses et passant par tous les échelons, ils aboutissent par voie de conséquences à la démonstration qu'ils s'étaient mis en tête de chercher.

Galilée (1564-1642), *L'Essayeur*
La philosophie est écrite dans ce très vaste livre qui est éternellement ouvert devant nos yeux – je veux dire l'Univers – mais on ne peut le lire avant d'avoir appris la langue et s'être familiarisé avec les caractères dans lesquels elle est écrite. Elle est écrite en langue mathématique et ses lettres sont des triangles, des cercles et d'autres figures géométriques, moyens sans lesquels il est humainement impossible de comprendre un seul mot, sans lesquels on erre en vain dans un obscur labyrinthe.

Descartes (1596-1650), *Discours de la méthode*
Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses, qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes, s'entre-suivent en même façon, et que, pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ni de si cachées qu'on ne découvre. Et je ne fus pas beaucoup en peine de chercher par lesquelles il était besoin de commencer : car je savais déjà que c'était par les plus simples et les plus aisées à connaître ; et considérant qu'entre tous ceux qui ont ci-devant recherché la vérité dans les sciences, il n'y a eu que les seuls mathématiciens qui ont pu trouver quelques démonstrations, c'est-à-dire quelques raisons certaines et évidentes, je ne doutais point que ce ne fût par les mêmes qu'ils ont examinées ; bien

que je n'en espérasse aucune autre utilité, sinon qu'elles accoutumeraient mon esprit à se repaître de vérités et ne se point contenter de fausses raisons.

Pascal (1623-1662), *De l'esprit géométrique*
Je ne puis faire entendre la conduite qu'on doit garder pour rendre les démonstrations convaincantes, qu'en expliquant celle que la géométrie observe, et je n'ai choisi cette science pour y arriver que parce qu'elle seule sait les véritables règles du raisonnement, et, sans s'arrêter aux règles des syllogismes qui sont tellement naturelles qu'on ne peut les ignorer, s'arrête et se fonde sur la véritable méthode de conduire le raisonnement en toutes choses, que presque tout le monde ignore, et qu'il est si avantageux de savoir, que nous voyons par expérience qu'entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la géométrie l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle.

Je veux donc faire entendre ce que c'est que démonstrations par l'exemple de celles de géométrie, qui est presque la seule des sciences humaines qui en produise d'infaillibles, parce qu'elle seule observe la véritable méthode, au lieu que toutes les autres sont par une nécessité naturelle dans quelque sorte de confusion que seuls les géomètres savent extrêmement connaître.

Condillac (1715-1780), *La langue des calculs*
L'algèbre est une langue bien faite, et c'est la seule : rien n'y paraît arbitraire. L'analogie qui n'échappe jamais, conduit sensiblement d'expression en expression. L'usage n'a ici aucune autorité. Il ne s'agit pas de parler comme les autres, il faut parler d'après la plus grande analogie pour arriver à la plus grande précision ; et ceux qui ont fait cette langue, ont senti que la simplicité du style en fait toute l'élégance : vérité peu connue dans nos langues vulgaires.

2.2. Démonstrations non constructives. — L'assertion $\exists x \in \emptyset$ est fausse (par définition l'ensemble vide ne contient aucun élément). Toute implication qui commence par $\exists x \in \emptyset$ est forcément vraie, par définition de l'implication. Il est donc indispensable, avant de se lancer dans la démonstration d'une implication, de vérifier que les hypothèses ne sont pas vides, c'est-à-dire qu'elles sont satisfaites par au moins un objet. Sans cela, on pourrait en déduire tout et n'importe quoi. Par exemple l'assertion suivante est mathématiquement correcte, même si nous ne vous conseillons pas de l'apprendre par cœur :

$$\text{Soit } n \text{ un entier tel que } \forall m \in \mathbf{N},\ n \geqslant m. \text{ Alors } 1 = 0.$$

L'hypothèse est vide : aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

Une grande partie de l'activité mathématique consiste à démontrer que des hypothèses ne sont pas vides, c'est-à-dire qu'il existe au moins un objet qui les vérifie. On appelle cela un « théorème d'existence ». Il est très possible de démontrer l'existence d'un objet sans être capable de l'exhiber, ni même de donner un algorithme permettant de le calculer. Voici un exemple célèbre.

Proposition 2.40

Il existe deux nombres irrationnels x et y tels que x^y soit rationnel.

Démonstration. — Nous avons vu que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel. Essayons $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$: il est soit rationnel, soit irrationnel.

- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, la proposition est démontrée, puisque $x = y = \sqrt{2}$ convient.
- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, posons $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, et $y = \sqrt{2}$. Alors
$$x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbf{Q}\,,$$
et la proposition est également démontrée.

$\square$

Rien dans cette démonstration ne permet de savoir si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est ou non rationnel, et donc l'existence de x et y est démontrée sans qu'on puisse exhiber un seul exemple. On dit que la démonstration est « non constructive ».

Certains mathématiciens, à la suite de Luitzen Brouwer (1881–1966), affirment qu'il n'est pas acceptable de démontrer un théorème d'existence sans être capable de construire au moins un objet vérifiant la propriété. Ils considèrent que cela revient à peu près à affirmer que les licornes existent parce qu'on trouve la définition du mot « licorne » dans les dictionnaires. A vous de juger…

2.3. Le rêve de Hilbert. — Durant l'été 1900 un congrès international de mathématiques se tenait à Paris. Le 8 août, David Hilbert (1862–1943) y donne une conférence mémorable ; selon Charles Hermite, « on n'entendra plus jamais dans les congrès de conférences pareilles ». Qu'a-t-il donc raconté ? Un théorème exceptionnel que lui seul pouvait démontrer, une nouvelle théorie ? Pas du tout. Il s'était contenté d'énoncer 23 problèmes, ceux qui selon lui feraient progresser la recherche en mathématiques durant le siècle qui allait commencer. Le plus impressionnant est que le siècle en question, qui vient de s'achever, lui a très largement donné raison !

Dans plusieurs de ces problèmes, et en particulier dans le dixième, Hilbert pose la question du fondement même du raisonnement mathématique. Il souhaitait rendre explicite un système axiomatique formel « universel ». En ces temps de scientisme triomphant, personne ne doutait que ce soit possible, et que les mathématiques finiraient bien, après tant de victoires sur la nature, par réussir à s'expliquer elles-mêmes.

Hilbert recherchait un système comportant des axiomes et des règles de déduction. Un axiome est une assertion que l'on déclare vraie a priori : par exemple $0 < 1$. Nous avons vu les règles de déduction de la logique, et le moyen de déclarer vraie ou fausse une assertion composée, en utilisant les tables de vérité. Hilbert souhaitait un système

- *consistant :* aucune assertion ne peut être à la fois vraie et fausse
- *complet :* toute assertion est soit vraie soit fausse
- *décidable :* il existe une procédure finie qui permet de vérifier si une assertion donnée est vraie ou fausse.

On peut démontrer qu'un système consistant et complet est forcément décidable. Une procédure de décision consiste à ranger toutes les formules possibles d'abord par ordre de longueur, puis par ordre lexicographique pour les formules de même longueur. Si on doit vérifier l'assertion A, on parcourt les formules une par une en vérifiant pour chacune si elle est valide et si elle entraîne A ou bien $\neg A$. Ce n'est pas très efficace, mais cela conduira forcément au résultat !

En 1931 Kurt Gödel (1906–1978) ruine le rêve de Hilbert : il démontre que dans tout système formel contenant l'arithmétique des entiers, il existe des propriétés telles que l'on ne peut prouver ni qu'elles sont vraies, ni qu'elles sont fausses : on dit qu'elles sont indécidables. La démonstration de Gödel est trop difficile pour être exposée ici, mais elle ressemble dans ses grandes lignes à celle de la proposition 1.58. Il considère un système consistant pour l'arithmétique des entiers. Il construit alors une assertion sur les nombres entiers qui exprime par elle-même qu'elle n'est pas dénombrable : si elle est vraie, alors elle est fausse, et si elle est fausse, alors elle est vraie. Il en déduit que le système ne peut pas être complet.

Parmi les exemples d'assertions indécidables, l'*axiome du choix* est le plus célèbre. Il s'agit de l'assertion affirmant que si un ensemble E est muni d'une relation d'équivalence, alors on peut choisir dans chacune des classes d'équivalence un élément particulier. C'est évident si les classes d'équivalence sont finies ou dénombrables, mais cela ne l'est pas en général. On peut le supposer vrai, ou bien faux, sans jamais aboutir à une contradiction.

Loin de sonner le glas de la recherche sur les systèmes formels, le résultat négatif de Gödel a donné une impulsion décisive à la logique, conduisant en particulier avec Alan Turing (1912–1954), aux fondements de l'informatique théorique.

2.4. Ramener l'infini au fini. — Le principe du raisonnement par récurrence a probablement été formulé clairement pour la première fois par Blaise Pascal (1623-1662), dans son *Traité du triangle arithmétique*. Voici son texte.

Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes.
Le premier, qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base [...]
Le second, que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.
D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier lemme ; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini.

2.5. Le cinquième postulat. — Les *Éléments* sont un traité mathématique et géométrique, constitué de 13 livres organisés thématiquement, probablement écrit par Euclide vers 300 avant J.-C. Il comprend une collection de définitions, axiomes, théorèmes et démonstrations sur la géométrie et les nombres.

C'est le plus ancien exemple connu d'un traitement axiomatique et systématique de la géométrie et son influence sur le développement de la science occidentale est fondamentale. Il s'agit du livre de mathématiques le plus lu au cours de l'histoire : les Éléments furent l'un des premiers livres imprimés et ont connu depuis plus de 1000 éditions. Pendant des siècles, vos prédecesseurs ont appris les mathématiques non pas dans des polycopiés, mais dans les Éléments.

Le livre I contient 5 postulats de géométrie plane.

1. Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques.
2. Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
3. Etant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
4. Tous les angles droits sont congruents
5. Si deux droites sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côte soit inférieure à deux angles droits, alors ces deux droites sont forcément sécantes de ce côté.

La contraposée du cinquième postulat est que si deux droites ne se coupent pas, alors la somme des angles intérieurs à toute sécante est égale à π. En conséquence, par un point donné, il ne peut passer qu'une parallèle à une droite donnée.

Pour cette raison, le cinquième postulat s'appelle le *postulat des parallèles*. Il a toujours semblé moins évident que les autres, et de nombreux mathématiciens ont pensé qu'il pouvait être démontré à partir des précédents. Pendant des siècles, toutes les tentatives échouèrent. La plupart d'entre elles étaient des essais de démonstration par l'absurde. Nombreux furent ceux qui conclurent à une contradiction devant ce qu'ils percevaient comme une impossibilité « évidente » mais qui n'était nullement une contradiction mathématique. Parmi ces courageux, Giovanni Saccheri (1667-1733) mérite une mention spéciale. En 1733, il publie « Euclides ab omni naevo vindicatus » (Euclide lavé de toute tache). Partant du postulat que par un point on peut faire passer une infinité de droites distinctes qui ne coupent pas une droite donnée, Saccheri démontre quantité de théorèmes, et devant leur évidente bizarrerie, conclut qu'il a démontré par l'absurde le cinquième postulat d'Euclide.

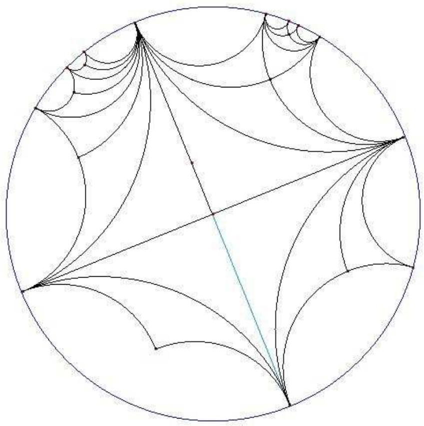


FIGURE 7. Le disque de Poincaré : modèle de la géométrie hyperbolique.

Pourtant, les résultats de Saccheri sont maintenant des théorèmes connus de la *géométrie hyperbolique*. Ce n'est qu'au XIXe siècle que Lobachevski, Boliaï, et sans doute Gauss, reconnurent qu'il était impossible de démontrer le cinquième postulat d'Euclide : on obtient simplement des géométries différentes avec des postulats différents.

1. par un point ne passe aucune parallèle à une droite donnée : *géométrie sphérique*
2. par un point passe exactement une parallèle à une droite donnée : *géométrie euclidienne*

3. par un point passe une infinité de parallèles à une droite donnée : *géométrie hyperbolique*

Parmi les conséquences, la somme des angles d'un triangle, qui vaut π en géométrie euclidienne, est supérieure à π en géométrie sphérique, et inférieure à π en géométrie hyperbolique. Voici l'expression du théorème d'Al-Kashi dans les trois géométries.

1. *géométrie sphérique :* $\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha)$
2. *géométrie euclidienne :* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$
3. *géométrie hyperbolique :* $\cosh(a) = \cosh(b)\cosh(c) - \sinh(b)\sinh(c)\cos(\alpha)$

La géométrie sphérique est facile à visualiser : sur une sphère en dimension 3, il suffit de baptiser « droite » tout cercle de rayon maximal (intersection de la sphère avec un plan passant par le centre). La géométrie hyperbolique est moins facile à imaginer. Henri Poincaré (1854-1912) a proposé deux modèles équivalents. Dans le premier, les points sont ceux d'un demi-plan de la géométrie euclidienne, mais on appelle « droite » les demi-cercles centrés sur l'axe des abscisses. Dans le second, les points sont ceux d'un disque, et les « droites » sont les arcs de cercle qui coupent orthogonalement le cercle bordant le disque. La figure 7 montre des droites hyperboliques, soit orthogonales deux à deux, soit parallèles. Elles forment des « triangles » rectangles dont deux côtés sont infinis et deux angles nuls.

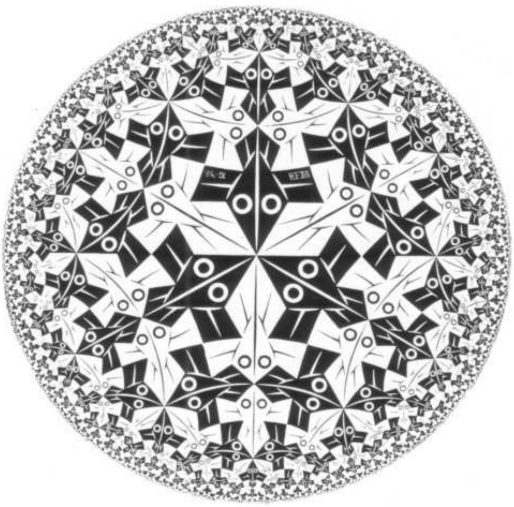


FIGURE 8. « Limite circulaire » de M.C. Escher.

Les triangles de la figure 7 constituent un pavage du plan hyperbolique. Les possibilités pour paver le plan hyperbolique sont beaucoup plus étendues qu'en géométrie euclidienne : on peut par exemple utiliser des pavés à 4 côtés dont deux angles opposés valent $\pi/3$, et les deux autres $\pi/2$: ce pavage est illustré par la figure 8. Le peintre hollandais M.C. Escher était fasciné par la symétrie et l'infini mais il ne connaissait pas les mathématiques quand il a réalisé cette gravure. Après avoir vu ses œuvres, le mathématicien H.S.M. Coxeter demanda à le rencontrer, et lui expliqua qu'il avait réinventé les pavages du plan hyperbolique.

Dénombrement et combinatoire

Pierre Dehornoy, d'après Agnès Coquio, Éric Dumas, Emmanuel Peyre et Bernard Ycart

Ce chapitre est consacré aux problèmes de comptage et à la manipulation de formules algébriques, constituées de variables formelles, de réels ou de complexes. L'objectif est essentiellement pratique : « savoir compter, savoir calculer ». On commence par des notions autour des *fonctions*, ce qui permet de définir le *cardinal* d'un ensemble. Ensuite, on passe à des manipulations de formules algébriques. La nouveauté la plus importante réside dans la manipulation de formules avec indices, utilisant les symboles $\sum$ (somme) et $\prod$ (produit).

Cours

3.1. Applications, suites

On commence par revoir les notions de fonction (ou application) et de suite.

Définition 3.1

Soient E et F des ensembles. Une *fonction f de E dans F*, aussi appelée *application de E dans F* est définie par son *graphe* : c'est un sous-ensemble Γ_f de $E \times F$, tel que pour tout $x \in E$, exactement un élément y de F vérifie $(x, y) \in \Gamma_f$. Cet élément y est l'*image* de x et est noté $f(x)$. La notation standard est la suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

L'ensemble E est appelé *l'ensemble de départ de la fonction f* et F *est l'ensemble d'arrivée*.

Lorsque la fonction f est donnée sans précision, on appelle *domaine de définition*, noté $\mathscr{D}_f$, le plus grand sous-ensemble de $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (selon le contexte) sur laquelle f est définie.

Exemple 3.2. — L'ensemble $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 1\}$ définit la fonction f de domaine de définition $\mathbf{R}^*$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$.

Par contre l'ensemble $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ n'est pas un graphe, en effet $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ appartiennent tous deux à Γ, ce qui contredit la définition précédente.

Remarque 3.3. — Les définitions redonnent que le graphe Γ_f est l'ensemble des couples $(x, f(x))$ où x parcourt le domaine de définition $\mathscr{D}_f$. On retrouve donc la description du graphe que vous avez déjà rencontré dans le secondaire :

$$\Gamma_f = \{\, (x, f(x)),\ x \in \mathscr{D}_f \,\}.$$

Mais il faut saisir que, du point de vue de la théorie des ensembles, c'est le graphe qui définit la fonction.

Remarque 3.4. — Parfois, on considère une notion un peu plus faible en appelant *fonction* une application qui n'est pas définie partout : ainsi une fonction associe à un élément de l'ensemble de départ zéro ou une valeur de l'ensemble d'arrivée. L'ensemble de définition d'une telle fonction $f : E \to F$ est un sous-ensemble de E. Cette distinction est parfois pratique, mais nous garderons la notion définie ci-dessus : les fonctions et les applications sont la même chose, et l'image d'un élément de l'ensemble de départ est toujours définie.

Remarque 3.5. — Deux fonctions f et g sont égales si et seulement si elles ont le même domaine de définition $\mathscr{D}$ et si on a $(\forall x \in \mathscr{D}, f(x) = g(x))$.

Représentation 3.6. — Pour des ensembles finis, il est parfois commode de représenter le graphe d'une fonction d'un ensemble E dans un ensemble F par des flèches entre deux patatoïdes : pour chaque élément a de E, on trace un point dans le patatoïde correspondant à E et pour chaque élément b de F, on trace un point dans le patatoïde de F, en donnant un nom à chacun de ces points ; ensuite pour chaque couple (a, b) on trace une flèche allant du point correspondant à a vers le point correspondant à b.

À titre d'exemple, soient $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et $F = \{0, 1, 2\}$. Considérons l'application qui à un nombre associe le reste de sa division euclidienne par 2 : 0 s'il est pair, 1 s'il est impair. Le graphe de cette application est :

$$\Gamma = \{\, (0, 0), (1, 1), (2, 0), (3, 1) \,\}\,,$$

sa représentation graphique est donnée sur la figure 9.

Pour des fonctions d'une partie de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$, on représente le graphe comme dans le secondaire en dessinant pour chaque élément (x, y) du graphe le point de coordonnées (x, y). Ainsi, dans la figure 10, nous avons représenté une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On

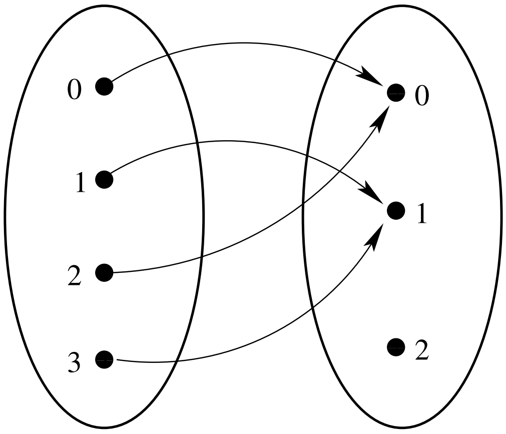


FIGURE 9. Représentation graphique d'une application de $\{0, 1, 2, 3\}$ vers $\{0, 1, 2\}$.

constate que pour tout x fixé de l'ensemble de définition (représenté en vert sur l'axe des abscisses), la droite verticale correspondant aux points dont la première coordonnée est x croise le graphe, tracé en rouge, en un unique point de coordonnées $(x, f(x))$ la valeur de $f(x)$, qui est la deuxième coordonnée de ce point est donc bien déterminée par x.

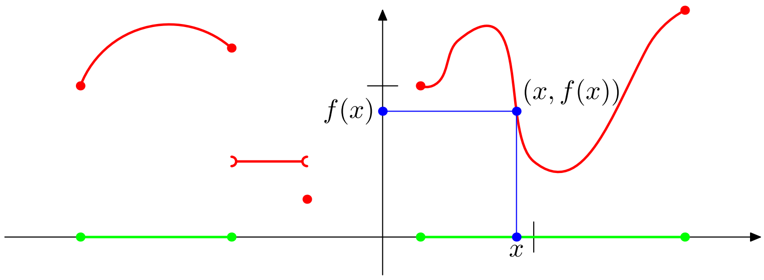


FIGURE 10. Représentation graphique d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

Par contre, pour la partie Γ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ représentée en rouge dans le dessin de la figure 11, on peut trouver un nombre réel x, tel que la droite verticale correspondant aux points dont la première coordonnée vaut x croise l'ensemble Γ en trois points distincts (x, y_1), (x, y_2) et (x, y_3). Donc l'ensemble Γ n'est pas le graphe d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$; pour le nombre réel x, on ne peut pas définir de manière univoque le nombre réel $f(x)$.

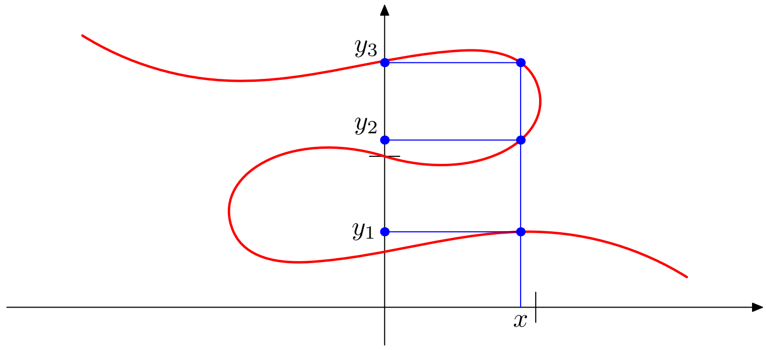


FIGURE 11. Ensemble qui n'est pas le graphe d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$

Définition 3.7

Une *suite* d'éléments de E est une fonction de $\mathbf{N}$ dans E. De préférence à la notation fonctionnelle, on emploie pour les suites une notation *indicielle*, et on parlera de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où u_n désigne l'image de n par la fonction u.

Remarque 3.8. — Par abus de langage, si $n_0 \in \mathbf{N}$, on appelera également suite d'éléments de E une application de $\{\, n \in \mathbf{N} \mid n \geqslant n_0 \,\}$ dans E, on note alors la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Exemples 3.9. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie pour $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = (-1)^n$. Ainsi $u_0 = 1, u_1 = -1, \cdots$.

On peut aussi définir une suite par récurrence. Par exemple soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$ par $u_{n+1} = 3u_n + 4$. Ainsi, $u_1 = 4, u_2 = 16, \ldots$

Définition 3.10

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

1. Soit A un sous-ensemble de E. On appelle *image de A par f* et on note $f(A)$ l'ensemble des images des éléments de A.
$$f(A) = \{\, y \in F \mid \exists x \in A\,,\ f(x) = y \,\}\,.$$

2. Soit B un sous-ensemble de F. On appelle *image réciproque (ou préimage) de B par f* et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des éléments de E dont l'image appartient à B.
$$f^{-1}(B) = \{\, x \in E \mid f(x) \in B \,\} \,.$$

Attention à la notation f^{-1} : elle ne signifie pas que f est inversée. C'est une convention pour désigner un sous-ensemble de l'espace de départ.

Exemple 3.11. — Dans l'application de la figure 9, L'image de $\{0,2\}$ est le singleton $\{0\}$. L'image réciproque de $\{1\}$ est $\{1,3\}$. L'image réciproque de $\{2\}$ est l'ensemble vide.

Terminologie 3.12

Un élément x de E tel que $f(x) = y$ s'appelle un *antécédent* de y. D'après la définition 3.10, l'ensemble des antécédents de y est $f^{-1}(\{y\})$.

Remarque 3.13. — On pourra noter que pour une partie B de l'ensemble d'arrivée F, la partie $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents d'éléments de B.

Dessin 3.14. — Sur la figure 12, on considère l'image par une application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ d'un segment représenté en orange sur la figure. Pour chaque x de ce segment, on peut construire comme précédemment son image $f(x)$; l'ensemble $f(A)$ est formé de tous les $f(x)$ où x parcourt le segment. Il est représenté en vert. Autrement dit, on regarde la partie du graphe dessinée en bleue, qui est obtenue en intersectant la bande verticale orange correspondant aux points du plan dont la première coordonnée est dans A avec le graphe de la fonction. On projette alors cette partie du graphe sur l'axe des ordonnées, ce qui donne, dans cet exemple, un intervalle correspondant à $f(A)$.

Pour la même application f, étant donné un intervalle B de $\mathbf{R}$, on considère sur la figure 13 l'intersection du graphe avec la bande horizontale orange correspondant aux points dont la seconde coordonnée est dans B. On projette alors cette partie du graphe sur l'axe des abscisses ce qui donne alors la partie correspondant à $f^{-1}(B)$ qui est ici la réunion de deux intervalles.

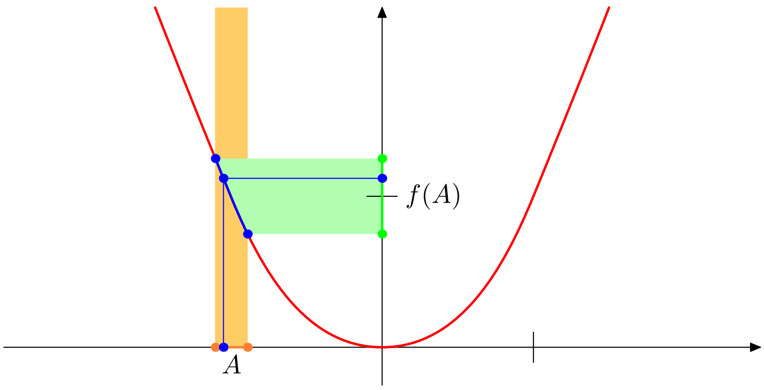


FIGURE 12. Image d'une partie A.

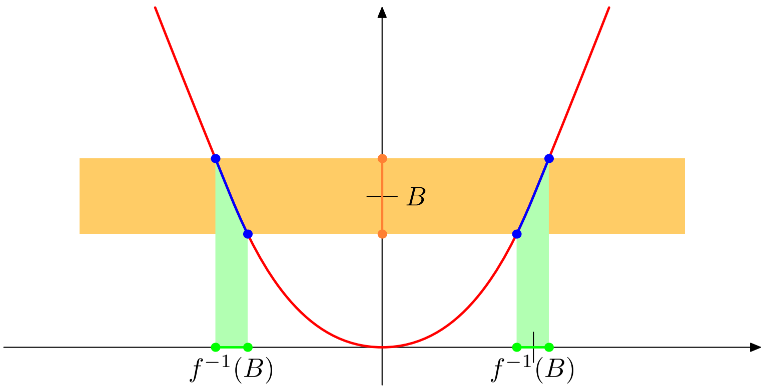


FIGURE 13. Image réciproque d'une partie B.

Définition 3.15

Soient E, F, et G des ensembles, f une application de E vers F et g une application de F vers G. On définit la *composée* de f par g , notée $g \circ f$, comme l'application de E vers G qui à x associe $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Attention à l'ordre des applications dans l'écriture $g \circ f$: c'est l'ordre inverse des flèches dans le schéma ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g \circ f(x) = g(f(x)) \,. \end{array}$$

Définition 3.16

Soient E et F des ensembles et f une application de E vers F. On dit que f est :

1. *injective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède *au plus* un antécédent dans l'ensemble de départ.
$$\forall x_1, x_2 \in E\ , \quad \Big(f(x_1) = f(x_2)\Big) \implies x_1 = x_2\ .$$
2. *surjective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède *au moins* un antécédent dans l'ensemble de départ.
$$\forall y \in F\ ,\ \exists x \in E\ ,\ f(x) = y\ .$$
3. *bijective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède *exactement* un antécédent dans l'ensemble de départ.

Une application bijective, ou *bijection*, est donc à la fois injective et surjective (voir figure 14).

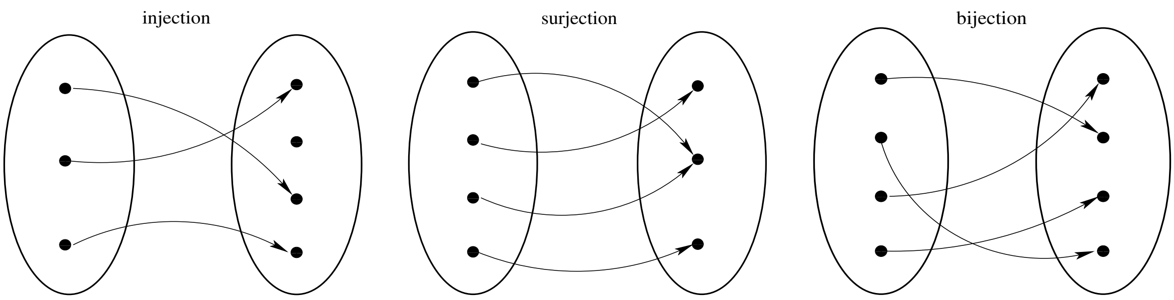


FIGURE 14. Représentations graphiques d'une injection, d'une surjection et d'une bijection.

Définition 3.17

Si une application de E vers F est bijective, tout élément de F a un antécédent et un seul. On peut alors définir *l'application réciproque* de f, notée f^{-1}, par
$$x = f^{-1}(y) \iff f(x) = y\ .$$

Si f est bijective, la composée de f par son application réciproque f^{-1} est l'application qui à x associe x, de E vers E. On l'appelle *application identique*, ou *identité*.

$$\begin{array}{ccccc} & f & & f^{-1} & \\ E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & f^{-1}\circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x \;. \end{array}$$

Les notations pour l'application réciproque et pour l'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée F sont liées par la relation :

$$f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\} \;.$$

On prendra garde au fait que si l'image réciproque d'une partie est définie pour toute application, l'application réciproque, quant à elle, n'est définie que pour une application bijective.

La notion de bijection est importante pour définir la notion de cardinal. Avant cela, nous devons démontrer un résultat intuitif.

Proposition 3.18 (Principe de bijection pour les entiers)

Soit m et n deux entiers naturels.

1. S'il existe une injection $f : [\![1, m]\!] \to [\![1, n]\!]$, alors on a $m \leq n$.
2. S'il existe une surjection $f : [\![1, m]\!] \to [\![1, n]\!]$, alors on a $m \geq n$.
3. S'il existe une bijection $f : [\![1, m]\!] \to [\![1, n]\!]$, alors on a $m = n$.

Démonstration. — 1. Démontrons ce point par récurrence sur m. Pour $m = 0$, on a $0 \leq n$ pour tout entier naturel n, donc on a toujours $m \leq n$ dans ce cas.

Supposons que l'assertion est démontrée pour une certaine valeur de l'entier naturel m et pour tout entier naturel n. Supposons qu'on a une injection $f : [\![1, m+1]\!] \to [\![1, n]\!]$, et montrons qu'alors on a $m + 1 \leq n$.

Notons $p = f(m + 1)$. Comme f est injective, pour tout i dans $[\![1, m]\!]$, on a $f(i) \neq p$. On définit alors une nouvelle application $g : [\![1, m]\!] \to [\![1, n]\!]$ comme suit : pour $i \in [\![1, m]\!]$, on pose

$$g(i) := \begin{cases} f(i) & \text{si } f(i) < p \\ f(i) - 1 & \text{si } f(i) > p \end{cases}$$

On affirme qu'alors g est une injection de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n-1]\!]$. En effet on a $p \leq n$, donc pour tout i on a $1 \leq g(i) \leq n-1$, donc l'ensemble d'arrivée est bien $[\![1, n-1]\!]$.

Reste à voir que g est injective. Supposons qu'on a $g(i) = g(j)$. Si $f(i) = f(j)$, alors par l'injectivité de f, on a $i = j$. Si $f(i) \neq f(j)$, alors d'après la définition de g, on a doit avoir $f(i) < p$ et $f(j) > p$, ou l'inverse. Dans ce cas, on a $g(i) = f(i) < p$, et comme on a $f(j) > p$ on a $g(j) = f(j) - 1 \geqslant p$, ainsi on a $g(i) < p \leqslant g(j)$, et donc $g(i) \neq g(j)$, ce qui contredit l'hypothèse. On a donc bien montré que g est injective. Par hypothèse de récurrence, on a alors $m \leq n-1$, et par conséquent on a $m+1 \leq n$, ce qui conclut.

2. Nous laissons la démonstration de ce point en exercice. On peut par exemple faire une récurrence sur n, qui sera très proche de la récurrence du point précédent.
3. S'il existe une bijection de $[\![1, m]\!]$ vers $[\![1, n]\!]$, d'après le point 1 on a $m \leq n$, d'après le point 2 on a $m \geq n$, et donc on a $m = n$.

□

Une conséquence de la proposition précédente est qu'un ensemble ne peut être en bijection avec deux ensembles $[\![1, m]\!]$ et $[\![1, n]\!]$ pour deux valeurs différentes de m et n. En effet, en composant la première bijection avec la réciproque de la seconde, on aurait une bijection entre $[\![1, m]\!]$ et $[\![1, n]\!]$, ce qui est absurde.

Définition 3.19

Un ensemble E est dit *fini* s'il existe un entier naturel n et une bijection de E dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Cet entier n est alors unique et est appelé le *cardinal de E*. On le note $|E|$, ou $\sharp E$, ou bien encore $\mathrm{card}(E)$.

Remarque 3.20. — L'ensemble vide est fini ; c'est l'unique ensemble de cardinal 0.

Un ensemble E est de cardinal 1 si et seulement c'est un singleton, c'est-à-dire qu'il a un unique élément. Si on note a cet élément, on obtient l'égalité $E = \{a\}$.

On admettra les résultats intuitifs suivants :

Théorème 3.21 (admis)

1. **Principe d'addition :** Le cardinal de la réunion de deux ensembles finis disjoints est la somme des cardinaux.
2. **Principe de multiplication :** Le cardinal du produit de deux ensembles finis est le produit des cardinaux.

En fait, le principe d'addition peut être affiné.

Théorème 3.22 (admis)

Principe d'inclusion-exclusion : Soit A, B deux ensembles finis, alors on a

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

On admet ce théorème mais le résultat est intuitif : pour compter le nombre d'éléments dans $A \cup B$, on compte les éléments de A, puis on compte les éléments de B, et enfin on retire ceux que l'on a compté deux fois.

3.2. Sommes et produits. — Commençons par les sommes.

L'écriture

$$\sum_{k=0}^{5} 2^k$$

se lit « *somme pour k allant de zéro à cinq de deux puissance k* ». C'est une notation abrégée pour :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$

La lettre k est l'*indice de sommation*. On la remplace successivement par toutes les valeurs entières comprises entre les deux *bornes*, qui sont 0 et 5 dans notre exemple. Donnons une définition plus précise de ces notations :

Définition 3.23

Soient $p, q \in \mathbf{Z}$ des entiers relatifs tels que $p \leqslant q$. Soit $(u_p, \ldots, u_q)$ une famille de $q - p + 1$ nombres réels (ou complexes) On définit

$$\sum_{k=p}^{q} u_k := u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q$$

Le terme de gauche se lit « somme pour k allant de p à q des u_k ». De même

$$\prod_{k=p}^{q} u_k := u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_q$$

et se lit « produit pour k allant de p à q des u_k »

Remarque 3.24. — Les bornes peuvent elles-mêmes être des variables. Par exemple, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k$$

désigne la somme

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n .$$

Rappelons que, par convention, $a^0 = 1$ pour tout nombre réel a. En revanche, les bornes ne peuvent dépendre de l'indice de sommation, ainsi

$$\sum_{k=0}^{k} 2^k$$

n'a pas de sens, car on ne sait où arrêter la somme. Prenez l'habitude d'écrire les sommes sous forme développée quitte à introduire des points de suspension entre les premiers termes et les derniers.

On introduit la notation suivante qui est plus générale. Le recours aux ensembles rend parfois les manipulations plus explicites.

Définition 3.25

Soit E un ensemble fini et $f : E \to \mathbf{C}$ (ou $\mathbf{R}$, ou $\mathbf{Z}$) une fonction. Alors l'expression
$$\sum_{x \in E} f(x)$$
désigne la somme de toutes les valeurs $f(x)$ où x parcourt l'ensemble E.

Exemple 3.26. — L'expression $\sum_{k \in [\![1,5]\!]} 2^k$ désigne la même chose que $\sum_{k=1}^{5} 2^k$, c'est-à-dire la somme $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$.

L'expression $\sum_{k \in [\![1,5]\!]} 2^n$ désigne la somme de 5 copies de l'expression 2^n, d'où $\sum_{k \in [\![1,5]\!]} 2^n = 5 \cdot 2^n$. Dans l'expression précédente, la variable n est donc libre puisqu'elle n'a pas été introduite, tandis que la variable k est muette : l'écriture $\sum_{k \in [\![1,5]\!]}$ l'introduit.

On définit de la même façon l'écriture $\prod_{x \in E} f(x)$.

Cette écriture en termes d'ensemble peut simplifier les manipulations, grâce aux remarques ci-dessous :

Proposition 3.27

— (Principe d'addition) Étant donné un ensemble E tel que $E = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$, et une fonction $f : E \to \mathbf{C}$, on a
$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{x \in A} f(x) + \sum_{x \in B} f(x).$$

— (Principe de changement de variable) Étant donné deux ensembles E, F, une fonction $g : F \to E$ qui est une bijection, et une fonction $f : E \to \mathbf{C}$, on a
$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{y \in F} f(g(x)).$$

Exemple 3.28. — Voici quelques exemples d'égalités illustrant la manipulation des indices et des bornes. Nous donnons sous chaque exemple une écriture sous forme développée.

Dans ce premier exemple, on utilise la bijection $[\![1, n]\!] \to [\![0, n-1]\!]$ qui retranche 1 à chaque entier.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} 2^k = \sum_{k\in[\![1,n]\!]} 2^k &= \sum_{h\in[\![0,n-1]\!]} 2^{h+1} = \sum_{h=0}^{n-1} 2^{h+1} \\ 2^1 + \cdots + 2^n &= 2^{0+1} + \cdots + 2^{n-1+1} . \end{aligned}$$

L'indice de sommation peut être remplacé par n'importe quel autre : comme on l'a déjà dit, c'est une variable muette. Dans ce second exemple, on change une fois d'indice de sommation, on utilise la bijection $[\![1, n]\!] \to [\![n+1, 2n]\!]$ qui ajoute n à chaque entier, et on regroupe deux ensembles de sommation via $[\![0, n]\!] \cup [\![n+1, 2n]\!] = [\![0, 2n]\!]$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{h=1}^{n} 2^{n+h} &= \sum_{k\in[\![0,n]\!]} 2^k + \sum_{h\in[\![1,n]\!]} 2^{n+h} \\ &= \sum_{k\in[\![0,n]\!]} 2^k + \sum_{k\in[\![n+1,2n]\!]} 2^k = \sum_{k\in[\![0,2n]\!]} 2^k = \sum_{k=0}^{2n} 2^k \\ (2^0 + \cdots + 2^n) + (2^{n+1} + \cdots + 2^{2n}) &= 2^0 + \cdots + 2^{2n} . \end{aligned}$$

Observez que la borne peut être une des variables de la quantité à sommer, comme dans l'exemple

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} 2^n = \sum_{k\in[\![0,n]\!]} 2^n &= (n+1)2^n \\ 2^n + \cdots + 2^n &= (n+1)2^n . \end{aligned}$$

Dans cet exemple la quantité à sommer ne dépend pas de l'indice de sommation : celle-ci a pour seul effet de compter les termes. Attention, pour $m \leqslant n$, il y a $n - m + 1$ termes dans la somme de m à n.

Dans ce dernier exemple, une double somme est une somme de sommes, et on peut intervertir les deux tant que les bornes de la seconde somme ne dépendent pas de l'indice de sommation de la première somme.

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{1}2^{k+h} = \sum_{(k,h)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,1]\!]} 2^{k+h} = \sum_{(h,k)\in[\![0,1]\!]\times[\![0,n]\!]} 2^{k+h} = \sum_{h=0}^{1}\sum_{k=0}^{n}2^{k+h}$$

$$(2^0+2^1)+\cdots+(2^n+2^{n+1}) = (2^0+\cdots+2^n)+(2^1+\cdots+2^{n+1}) .$$

Exemple 3.29. — Voici un enchaînement d'égalités, montrant que la somme des puissances de 2 de 2^0 jusqu'à 2^n vaut $(2^{n+1}-1)$ (c'est un cas particulier d'une formule à connaître que nous verrons plus loin). Pour chaque ligne de calcul, nous donnons à droite l'écriture sous forme développée. On rappelle que $2^0 = 1$.

$$\begin{array}{rcl|l}
\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k & = & \displaystyle 2\left(\sum_{k=0}^{n}2^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n}2^k\right) & = 2(2^0+\cdots+2^n)-(2^0+\cdots+2^n) \\
& = & \displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n}2^{k+1}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n}2^k\right) & = (2^1+\cdots+2^{n+1})-(2^0+\cdots+2^n) \\
& = & \displaystyle\left(\sum_{h=1}^{n+1}2^h\right) - \left(\sum_{k=0}^{n}2^k\right) & = (2^1+\cdots+2^{n+1})-(2^0+\cdots+2^n) \\
& = & \displaystyle\left(\sum_{h\in[\![1,n+1]\!]}2^h\right) - \left(\sum_{k\in[\![0,n]\!]}2^k\right) & = (2^1+\cdots+2^{n+1})-(2^0+\cdots+2^n) \\
& = & 2^{n+1}-2^0 & = 2^{n+1}-1 .
\end{array}$$

Ce que nous venons de voir pour les sommes s'applique aussi aux produits. Le produit des entiers de 1 à n intervient dans de nombreuses formules.

Définition 3.30

La *factorielle* de n, notée « $n!$ », est définie comme le produit

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\ 2\ 3\cdots\ (n-2)\ (n-1)\ n .$$

Il est souvent utile d'étendre la définition de la factorielle en convenant que $0! = 1$.

Voici les premières valeurs.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

3.3. Dénombrement. —

Définition 3.31

Soit X un ensemble. On appelle permutation de X une application bijective de X dans X. Soit n un entier positif ou nul, On appelle *permutation des nombres de* 1 *à* n une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. L'ensemble des permutations des nombres de 1 à n est noté $\mathfrak{S}_n$ [2].

Une permutation u des nombres de 1 à n peut être vue comme un n-uplet d'entiers $(u_1, \dots, u_n)$ dans lequel chaque entier entre 1 et n apparaît une et une seule fois. Par exemple $(5, 3, 2, 4, 1)$ est une permutation des nombres de 1 à 5.

En effet soit $(u_1, \dots, u_n)$ un tel n-uplet. On définit alors l'application σ de $\{1, \dots, n\}$ dans lui même par $\sigma(k) = u_k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$. σ est une bijection.

Réciproquement, à une bijection σ de $\{1, \dots, n\}$ dans lui même, on associe le n-uplet $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.

Théorème 3.32

Le nombre de permutations des nombres de 1 à n est $n!$.

Autrement dit, on a $|\mathfrak{S}_n| = n!$.

Démonstration. — On montre le théorème par récurrence sur n.

Si $n = 1$, la seule permutation des entiers de 1 à 1 est (1).

On suppose donc que le résultat est vrai pour l'entier n. Montrons-le pour l'entier $n+1$. Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n+1$ et comptons le nombre A_k de permutations

$$(u_1, \dots, u_{n+1})$$

telles que $u_k = n + 1$. À une telle permutation, associons le n-uplet :

$$(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_{n+1}) \; .$$

C'est une permutation des nombres de 1 à n. Inversement étant donnée une permutation $(v_1, \dots, v_n)$ des entiers de 1 à n, alors

$$(v_1, \dots, v_{k-1}, n + 1, v_{k+1}, \dots, v_n)$$

2. La lettre $\mathfrak{S}$ est une lettre S majuscule dans l'alphabet gothique.

est une permutation des entiers de 1 à $n+1$ dont le k-ième terme est $n+1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient que $A_k = n!$. Donc grâce au principe de d'addition, le nombre total de permutations des nombres de 1 à $n+1$ est :

$$\sum_{k=1}^{n+1} A_k = \sum_{k=1}^{n+1} n! = (n+1)\, n! = (n+1)!\ ,$$

ce qui montre le résultat pour $n+1$. □

Remarques 3.33. — i) De manière générale, si X est un ensemble fini de cardinal n l'ensemble des permutations de X est fini de cardinal $n!$.

ii) Pour ordonner n objets, il faut associer à chacun un nombre entre 1 et n de sorte que chaque nombre renvoie à un objet et un seul. Il y a autant de manières de le faire que de permutations des n premiers entiers : $n!$. Au tiercé, il y a $5! = 120$ manières d'ordonner les 5 premiers chevaux. Une seule donne l'ordre d'arrivée, soit le quinté dans l'ordre, et il y a 119 quintés dans le désordre.

Définition 3.34

Le *nombre de combinaisons* de k objets parmi n est le cardinal de l'ensemble des sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k. On le note

$$\binom{n}{k}\ .$$

Remarque 3.35. — C'est le nombre de manières de choisir k objets parmi n, sans distinguer leur ordre. La notation $\binom{n}{k}$ que nous utilisons ici, de préférence à l'ancienne notation C_n^k, est conforme aux programmes en vigueur et à l'usage international. On peut éventuellement la lire « k parmi n ».

Noter que si k n'est pas dans l'ensemble $[\![0, n]\!]$, il n'y a aucun sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k, et on a donc $\binom{n}{k} = 0$ dans ce cas. Aussi, il n'y a qu'un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$ de cardinal 0, à savoir l'ensemble vide $\emptyset$, et il n'y a qu'un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$ de cardinal n, à savoir l'ensemble $[\![1, n]\!]$ tout entier.

Proposition 3.36

Pour n un entier naturel et $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \,. \tag{29}$$

Démonstration. — Pour choisir k nombres dans $[\![1, n]\!]$, on peut se donner une permutation de $[\![1, n]\!]$, et décider de retenir les k premiers nombres. Parmi les permutations, toutes celles qui auront en commun leurs k premiers nombres conduiront au même choix. Il faut donc diviser par le nombre de permutations des k objets choisis, et par le nombre de permutations des $n-k$ objets qui ne l'ont pas été. On arrive alors à la formule voulue. □

Observez que (29) ne change pas si on remplace k par $n-k$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \,.$$

Choisir k objets parmi n (ceux que l'on garde) revient à en choisir $n-k$ (ceux que l'on laisse).

Voici une autre expression de $\binom{n}{k}$.

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{h=0}^{k-1}(n-h) = \frac{n\ (n-1)\ \cdots\ (n-k+1)}{1\ 2\ \cdots\ k} \,. \tag{30}$$

Notez qu'il y a k facteurs au numérateur, comme au dénominateur. On obtient cette formule en simplifiant le quotient $n!/(n-k)!$ dans (29).

On peut aussi raisonner comme suit. Il y a n façons de choisir le premier objet, puis $n-1$ de choisir le second (puisqu'un objet a déjà été choisi), etc. Pour choisir le k-ième objet, il reste $n-(k-1)$ possibilités. Ceci correspond au numérateur de (30). Cette manière de procéder retourne une liste ordonnée. Il faut donc diviser par le nombre d'ordres possibles des k objets choisis, qui est $k!$.

Observez les relations suivantes, faciles à déduire de (29) ou (30) et de la définition de la factorielle.

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} \,.$$

Pour calculer $\binom{n}{k}$ en pratique, on n'utilise ni (29) ni (30). Le calcul récursif par la formule du *triangle de Pascal* (connue des indiens, des chinois et des arabes bien avant Pascal) est beaucoup plus rapide.

Proposition 3.37 (Formule du triangle de Pascal)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\,. \tag{31}$$

Nous conseillons au lecteur de démontrer cette formule à partir des expressions (29) et (30). Voici la justification combinatoire. Supposons que parmi les n objets dont k doivent être choisis, l'un d'entre eux soit distingué (disons qu'il est rouge). Parmi les choix possibles de k objets, certains ne contiennent pas l'objet rouge, d'autres le contiennent. Les premiers sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$, car les k objets sont choisis parmi les $n-1$ différents de l'objet rouge. Les choix contenant l'objet rouge sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$ car l'objet rouge ayant été retenu, il reste $k-1$ objets à choisir parmi les $n-1$ autres. Voici, disposées en triangle, les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour n allant de 0 à 6.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Chaque valeur est la somme de celle qui est au-dessus, et de celle qui est à gauche de celle qui est au-dessus. S'il n'est pas indispensable de connaître ce tableau par cœur, il est souvent utile de savoir le réécrire rapidement.

3.4. Trois formules à connaître. — Les formules données par les trois théorèmes qui suivent sont souvent utiles.

Théorème 3.38

Pour tout entier $n \geqslant 1$, la somme des n premiers entiers vaut $n(n+1)/2$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{32}$$

Démonstration. — Nous donnons d'abord la démonstration par récurrence. Nous verrons ensuite une justification géométrique et une justification combinatoire. L'hypothèse de récurrence est :

$$H(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Pour $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} .$$

Supposons maintenant que $H(n)$ est vraie. Ecrivons :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) .$$

En appliquant $H(n)$, on obtient :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) .$$

Le membre de droite s'écrit :

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} .$$

Nous avons donc démontré l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} ,$$

c'est-à-dire que $H(n+1)$ est vraie. □

Voici maintenant une justification géométrique. Considérons un rectangle dont la largeur et la hauteur valent respectivement $n+1$ et n unités (figure 15). Ce rectangle peut être découpé en deux moitiés superposables. Chacune est formée de $1+2+\cdots+n$ carrés de côté unité, et couvre une surface égale à la surface du rectangle divisée par 2, soit $n(n+1)/2$.

Voici maintenant une explication combinatoire. Autour d'une table $n+1$ personnes sont assises et s'apprêtent à trinquer. Combien de bruits de verre entendra-t-on ? Il y a deux manières de compter. La première consiste à prendre les personnes dans l'ordre : la première doit trinquer avec les n autres. La seconde, qui a déjà trinqué avec la première, doit encore trinquer avec $n-1$ autres. Ainsi de suite jusqu'à la n-ième

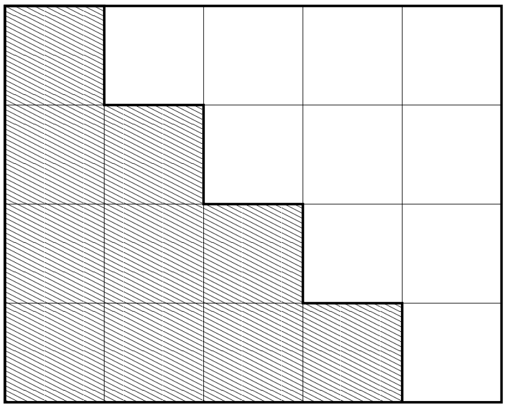


FIGURE 15. La somme des n premiers entiers vaut $n(n+1)/2$.

personne, qui ayant déjà trinqué avec les $n-1$ autres n'aura plus que la n-ième avec qui trinquer. On entendra donc $n+(n-1)+\cdots+1$ bruits de verre. La seconde manière de compter consiste à remarquer que le nombre de bruits de verre est égal au nombre de combinaisons de 2 personnes parmi $n+1$:

$$\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Les deux formules suivantes portent sur deux variables a et b que vous pouvez voir dans un premier temps comme deux réels. Ces formules sont aussi valables pour des nombres complexes, et plus généralement pour des objets quelconques que l'on peut ajouter et multiplier de façon commutative (par exemple des polynômes ou des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$).

La première généralise l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Théorème 3.39

Pour tout entier n,

$$a^{n+1}-b^{n+1} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k\right) = (a-b)(a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n). \tag{33}$$

(Rappelons la convention $a^0=b^0=1$.)

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence. L'affirmation est vraie pour $n = 0$ puisque :

$$\sum_{k=0}^{0} a^0 b^0 = 1.$$

Supposons le résultat vrai pour n.

$$\begin{aligned}
(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k}b^k\right) &= (a-b)\left(\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n+1-k}b^k\right) + b^{n+1}\right) \\
&= (a-b)\left(a\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k\right) + b^{n+1}\right) \\
&= a(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k\right) + (a-b)b^{n+1} \\
&= a(a^{n+1} - b^{n+1}) + (a-b)b^{n+1} \\
&= a^{n+2} - b^{n+2}
\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence a été utilisée pour obtenir l'avant-dernière égalité. Le résultat est vrai pour $n+1$, donc pour tout n. □

Des cas particuliers du théorème 3.39 reviennent souvent dans les calculs. Nous avons déjà rencontré le cas $a = 2, b = 1$. Vous pouvez retenir le suivant :

$$(1-x)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}.$$

Plus généralement, on a la relation :

Proposition 3.40 (Somme d'une série géométrique)

Soit x un nombre réel différent de 0 et de 1 et soient p et q des entiers relatifs tels que $p \leqslant q$. Alors :

$$\sum_{k=p}^{q} x^k = \frac{x^p - x^{q+1}}{1-x}.$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que :

$$(1-x)\left(\sum_{k=p}^{q} x^k\right) = \sum_{k=p}^{q} x^k - \sum_{k=p+1}^{q+1} x^k = x^p - x^{q+1}.$$

□

Une autre formule à connaître est celle du *binôme de Newton*, qui généralise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Théorème 3.41 (Formule du binôme de Newton)

Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = b^n + nb^{n-1}a + \cdots + nba^{n-1} + a^n. \tag{34}$$

À cause de (34), les nombres $\binom{n}{k}$ s'appellent les *coefficients binomiaux*.

Démonstration. — Ici encore la démonstration se fait par récurrence, nous donnerons ensuite une justification combinatoire. Pour $n = 1$:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 .$$

Supposons que la formule est vraie pour n et démontrons-la pour $n+1$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\right) \\
&= \left(\sum_{h=1}^{n+1}\binom{n}{h-1}a^h b^{n+1-h}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\right) \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1}a^h b^{n+1-h}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\right) + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k}\right) + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}\,.
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, nous avons appliqué la formule du triangle de Pascal (31). Le résultat est démontré. □

Voici maintenant la justification combinatoire. La quantité $(a+b)^n$ est le produit de n facteurs, chacun contenant deux termes a et b. Quand on développe le produit, on prend dans le premier facteur un des deux termes, on le multiplie par un terme du second facteur, ainsi de suite jusqu'au n-ième facteur. Le produit obtenu est égal à $a^k b^{n-k}$ si on a choisi le terme a dans k facteurs et le terme b dans les $n-k$ autres. Le nombre de produits égaux à $a^k b^{n-k}$ est le nombre de combinaisons de k facteurs parmi n, soit $\binom{n}{k}$.

Fiche de révision

3.1. Applications. — $f : E \to F$ application (ou fonction)
E ensemble de départ, F ensemble d'arrivée
pour $A \subset E$, $f(A) = \{f(a)\,;\, a \in A\} = \{b \in B \mid \exists a \in A, f(a) = b\}$ *image de A par f*
pour $B \subset F$, $f^{-1}(B) = \{a \in A \mid f(a) \in B\}$ *image-réciproque de B par f*
f *injective* :

$$\forall x, y \in E,\ (f(x) = f(y)) \implies (x = y)$$

f *surjective* :

$$\forall z \in F, \exists x \in E,\ f(x) = z$$

f *bijective* :

$$f \text{ injective} \quad \text{et} \quad f \text{ surjective}$$

si f est bijective, on définit $\begin{array}{rcl} f^{-1} : F & \to & E \\ x & \mapsto & f^{-1}(x) \text{ tq } f(f^{-1}(x)) = x \ . \end{array}$.

$f : E \to F$, $g : F \to G$ applications
$\begin{array}{rcl} g \circ f : E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$ *composée de g et f.*
E ensemble fini, *cardinal de E* : unique entier n tq $\exists f : [\![1, n]\!] \to E$ bijective
principe d'inclusion-exclusion : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
principe de multiplication : $|A \times B| = |A| \times |B|$

3.2. Sommes et produits. — A ensemble fini et $f : A \to \mathbf{C}$ application, alors

$$\sum_{a \in A} f(a) \quad \text{et} \quad \prod_{a \in A} f(a)$$

désignent la somme et le produit des nombres $f(a)$, où a parcourt tout A.
$[\![p, q]\!] := \{p, p+1, p+2, \ldots, q-1, q\} = \{k \in \mathbf{Z} \mid p \leq k \leq q\}$
pour $p, q \in \mathbf{Z}$, et $f : [\![p, q]\!] \to \mathbf{C}$, on simplifie la notation en

$$\sum_{a=p}^{q} f(a) := \sum_{a \in [\![p,q]\!]} f(a) \quad \text{et} \quad \prod_{a=p}^{q} f(a) := \prod_{a \in [\![p,q]\!]} f(a)$$

factorielle :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \ .$$

3.3. Dénombrement. — E ensemble, permutation de E = bijection de E dans E
$\mathfrak{S}_n$ = ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$
$|\mathfrak{S}_n| = n!$
$n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}$, $\binom{n}{k}$ = nombre de sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k
$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ si $k \in [\![0, n]\!]$
formule du triangle de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

3.4. Identités remarquables. — somme des premiers entiers : $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} .$$

somme de série géométrique : $\forall p, q \in \mathbf{Z}, \forall x \in \mathbf{C}$,

$$\sum_{k=p}^{q} x^k = \frac{x^{q+1} - x^p}{x-1} .$$

somme de série géométrique (variante) : $\forall n \in \mathbf{N}, \forall a, b \in \mathbf{C}$,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k\right) .$$

formule du binôme de Newton : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall a, b \in \mathbf{C}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

Exercices

Fonctions, applications

Exercice 3.1. (*)
On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels. Parmi les ensembles suivant, dire lesquels sont les graphes d'une application d'un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Lorsque l'ensemble est le graphe d'une application, donner son ensemble de départ.

1. $\{\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y - x + 1 = 0\,\}$;
2. $\{\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2\,\}$;
3. $\{\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y^2\,\}$;
4. $\{\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y^2 \text{ et } y \geqslant 0\,\}$.

Exercice 3.2. (**) Soient I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f s'annule.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f n'est pas une fonction constante.
4. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
5. La fonction f présente un minimum.
6. La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes.
7. La fonction f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 3.3. (**)
Pour chacune des affirmations suivantes, décrire en termes simples les applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui vérifient ces affirmations :

1. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(y) = f(x)$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, f(y) = f(x)$.
3. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(x) < f(y)$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, f(x) < f(y)$.
5. $\forall x \in \mathbf{R}, (x \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant 0)$.
6. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0)$.
7. $\forall x \in \mathbf{R}, (x > 0 \Rightarrow f(x) > 0)$.

8. $\forall x \in \mathbf{R}, (x = 0 \Rightarrow f(x) = 0)$.
9. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$.
10. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) \leqslant 0$ ou $f(x) \geqslant 0)$.

Exercice 3.4. (*)
Soient f et g les applications de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ f(n) = 2n \qquad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f,\ f \circ g,\ g \circ g,\ g \circ g \circ g$.

Exercice 3.5. (**)
Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On appelle « fonction indicatrice de A » et on note $\mathbf{I}_A$ l'application de E vers $\{0, 1\}$ qui à $x \in E$ associe 1 si $x \in A$, 0 si $x \notin A$. Soient A et B deux sous-ensembles de E. Démontrer les assertions suivantes.

1. $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{^cA}(x) = 1 - \mathbf{I}_A(x)$.
2. $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{A\cap B}(x) = \min\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x)$.
3. $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{A\cup B}(x) = \max\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = \mathbf{I}_A(x) + \mathbf{I}_B(x) - \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x)$.

Exercice 3.6. (**)
Soient E et F deux ensembles, f une application de E vers F. Soient A et A' deux sous-ensembles de E. Soient B et B' deux sous-ensembles de F. Quelles sont les assertions parmi les assertions suivantes qui sont toujours vraies ?

1. $(A \subset A') \implies (f(A) \subset f(A'))$.
2. $(B \subset B') \implies (f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B'))$.
3. $f(A \cup A') = (f(A) \cup f(A'))$.
4. $f^{-1}(B \cup B') = (f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'))$.
5. $f(A \cap A') = (f(A) \cap f(A'))$.
6. $f^{-1}(B \cap B') = (f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'))$.
7. $f^{-1}(f(A)) = A$.
8. $f(f^{-1}(B)) = B$.
9. $f(A \cap f^{-1}(B)) = (f(A) \cap B)$.
10. $f(A \cup f^{-1}(B)) = (f(A) \cup B)$.

Sommes et produits

Exercice 3.7. (*)

Calculer les nombres suivants.

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} 1\ , \quad \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} h\ , \quad \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} k\ ,$$

$$\sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} h\ , \quad \sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} k\ , \quad \prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} h\ ,$$

$$\prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} k\ , \quad \prod_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} h\ , \quad \prod_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} k\ .$$

Exercice 3.8. (*)

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre variables. Ecrire à l'aide des symboles $\sum$ et $\prod$ les quantités suivantes.

1. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.
2. $a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3a_4$.
3. $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4$.
4. $a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4$.
5. $a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4$.
6. $a_1(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$.

Exercice 3.9. (**)

Démontrer par récurrence les assertions suivantes.

1. $\forall n \in \mathbf{N}\ , \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1) = (n+1)(n+2)/2.$
2. $\forall n \in \mathbf{N}\ , \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$
3. $\forall n \in \mathbf{N}\ , \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2/4.$
4. $\forall n \in \mathbf{N}\ , \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$
5. $\forall n \in \mathbf{N}\ , \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$

6. $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3 \ , \quad \prod_{k=3}^{n} \frac{k^2-4}{k} = \frac{(n+2)!}{12n(n-1)}.$
7. $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1).$

Dénombrement

Exercice 3.10. (*)
Une entreprise veut se donner un nouveau sigle, qui soit formé d'exactement 3 lettres. De combien de façons peut-elle le faire ? Combien reste-t-il de possibilités si on impose au sigle d'être formé de lettres distinctes ?

Exercice 3.11. (*)
On met dans une boîte 26 jetons de Scrabble, portant chacune des 26 lettres de l'alphabet (deux jetons distincts portent donc deux lettres distinctes). On en tire 3 à la fois. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

Exercice 3.12. (*)
Une école de langues propose des cours d'arabe, de biélorusse, et de chinois. Chaque étudiant peut apprendre une, deux, ou trois langues, au choix. Il y a 100 étudiants en tout, il y en a 90 qui apprennent l'arabe, 70 le biélorusse et 50 le chinois.

1. Combien au minimum y a-t-il d'étudiants qui apprennent l'arabe et le biélorusse ? le biélorusse et le chinois ?
2. Combien au minimum y a-t-il d'étudiants qui apprennent les trois langues proposées ?

Exercice 3.13. (**)

1. Combien y a-t-il de nombres entre 1 et 100 qui ne sont divisibles ni par 5, ni par 7 ?
2. Combien y a-t-il de nombres entre 1 et 3000 qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5 ?

Exercice 3.14. (**)

1. Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet qui ne contiennent par le mot « chat » ?
2. Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet qui ne contiennent ni le mot « chat » ni le mot « chien » ?

3. Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet qui ne contiennent ni le mot « chat » ni le mot « pie » ?
4. Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet qui ne contiennent ni le mot « chat », ni le mot « chien », ni le mot « pie » ?

Exercice 3.15. (**) On a trois ensembles E_1, E_2, E_3. On suppose que chaque ensemble compte 100 éléments, que l'intersection de deux ensembles quelconques compte 10 éléments, et que l'intersection des trois ensembles ne compte qu'un élément. Quel est le cardinal de $E_1 \cup E_2 \cup E_3$?

Exercice 3.16. (**)

Dix personnes doivent s'asseoir autour d'une table circulaire. On considère comme identiques deux dispositions dont l'une se déduit de l'autre par une rotation. Combien y a-t-il de dispositions possibles ? Combien en reste-t-il si deux personnes données refusent d'être assises à côté ?

Exercice 3.17. (**)

Dans une course de chevaux, 10 chevaux sont au départ. Vous en choisissez 3 que vous classez pour jouer au tiercé. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Il y a 3 tiercés dans le désordre.
2. Il y a 6 tiercés, dont 1 dans l'ordre.
3. Il y a $\binom{10}{3}$ tiercés possibles.
4. Il y a 720 ordres d'arrivée possibles.
5. Il y a plus de 3 millions d'ordres d'arrivée possibles.
6. Vous avez 720 choix différents.
7. Vous avez une chance sur 120 de gagner le tiercé dans l'ordre.
8. Vous avez une chance sur 120 de gagner, soit dans l'ordre, soit dans le désordre.

Exercice 3.18. (**)

Une association comprenant 20 membres dont 12 femmes et 8 hommes désire former un comité de 5 personnes, dans lequel doivent se trouver au moins deux hommes et deux femmes. Calculer de combien de façons on peut former ce comité dans chacun des cas suivants.

1. Chaque membre de l'association accepte d'en faire partie.
2. Deux des femmes refusent d'en faire partie.

3. Monsieur X et Madame Y refusent de siéger ensemble.

Identités remarquables

Exercice 3.19. (**)

Démontrer les égalités suivantes, en utilisant des manipulations et des identités algébriques (sans utiliser de récurrence).

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n\, n!,\ \forall n \geqslant 1.$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n\, n!},\ \forall n \geqslant 2.$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-1} = 2n+1,\ \forall n \geqslant 1.$
4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k} = \frac{(n+1)!}{2n},\ \forall n \geqslant 2.$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k) = \frac{n(n+1)}{2},\ \forall n \in \mathbf{N}.$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},\ \forall n \in \mathbf{N}.$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2,\ \forall n \in \mathbf{N}.$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^k = 2^n - 2,\ \forall n \geqslant 2.$
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}2^{k/2} = \frac{2^n-1}{\sqrt{2}-1},\ \forall n \in \mathbf{N}^*.$
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}2^{2k-1} = \frac{4^{2n+1}-1}{6},\ \forall n \in \mathbf{N}.$
11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k 3^{n-k} = 3^{n+1} - 2^{n+1},\ \forall n \in \mathbf{N}.$
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{n-k} = \frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}.$

Exercice 3.20. (**)

Démontrer, pour tout entier naturel n, les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}$ *(ajoutez les deux égalités précédentes).*
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k} = 3^n.$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{3k-1}\binom{n}{k} = 9^n/2.$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{3k}3^{n-2k}\binom{n}{k} = (17/3)^n.$

7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{i}^k \binom{n}{k} = 2^{n/2}\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/4}$.

8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{k/2}\mathrm{i}^k \binom{n}{k} = 2^n\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/3}$.

Exercice 3.21. (**)

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $f(x) = (1+x)^n$.

1. En utilisant une formule du cours, écrivez $f(x)$ comme une somme où interviennent les puissances de x.
2. La dérivée de f est $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$. L'intégrale de f sur $[0,1]$ vaut
$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$
En utilisant la question 1. donner une autre expression de $f'(x)$ et de cette intégrale.
3. En déduire les valeurs des expressions suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Exercice 3.22. (**)

Soient n et p deux entiers naturels. Cet exercice présente une méthode générale pour calculer $\sum_{k=0}^{n} k^p$, sur le cas particulier $p=2$.

1. Soit $x \to P(x)$ une fonction, donner une expression plus simple de $\sum_{k=0}^{n}(P(k+1)-P(k))$.
2. Soit a, b, c des réels et $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Calculer $P(x+1) - P(x)$.
3. Déterminer a, b, c de sorte que $P(x+1) - P(x) = x^2$.
4. Déduire des questions précédentes que
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 3.23. (***)

Le but de l'exercice est de calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}$ pour tout n entier positif.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}$ pour $n = 0, 1, 2,$ et 3.

2. Utiliser la formule du binôme pour dévolopper l'expression $(1+1)^n$ et en déduire pour tout entier positif n l'égalité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
3. Pour tout n entier on note $T_0(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$, $T_1(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1}$, et $T_2(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}$.

   Que vaut la somme $T_0(n) + T_1(n) + T_2(n)$?
4. On désigne par j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

   Montrer que j satisfait $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.
5. Démontrer $(\mathrm{j}+1)^{3n} = T_0(n)+\mathrm{j}T_1(n)+\mathrm{j}^2T_2(n)$ et $(\mathrm{j}^2+1)^{3n} = T_0(n)+\mathrm{j}^2T_1(n)+\mathrm{j}T_2(n)$.
6. Déduire des questions précédentes l'égalité
$$3T_0(n) = 2^{3n} + (\mathrm{j}+1)^{3n} + (\mathrm{j}^2+1)^{3n}.$$
7. Montrer qu'on a $\mathrm{j}+1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\mathrm{j}^2+1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et en déduire l'égalité
$$T_0(n) = \frac{2^{3n} + 2(-1)^n}{3}.$$

Compléments

Ce paragraphe de compléments est réservé à une seconde lecture.

3.1. Les formules de Ramanujan. — Srinivasa Ramanujan (1887-1920) avait appris tout seul les mathématiques, grâce à deux livres seulement. Admis en 1903 dans un collège gouvernemental du sud de l'Inde, il était tellement obnubilé par ses recherches qu'il échoua à ses examens, et ce quatre ans de suite. Ayant obtenu un poste dans un comptoir de Madras, ses supérieurs l'encouragèrent à envoyer ses résultats à d'éminents mathématiciens anglais. Seul G.H. Hardy (1877–1947) fit l'effort de s'intéresser à la lettre qu'il reçut le 16 janvier 1913, et qui contenait 120 formules. L'écriture mathématique était particulière et aucune justification n'était fournie. Ramanujan n'aura d'ailleurs jamais une idée claire de ce qu'est une démonstration. Il disait ; « une équation pour moi n'a aucun sens, à moins qu'elle n'exprime une pensée de Dieu ».

Après quelques heures d'effort, Hardy reconnut certaines formules ; d'autres étaient erronées. Mais un grand nombre étaient totalement nouvelles. Hardy déclara « un coup d'œil sur ces formules était suffisant pour se rendre compte qu'elles ne pouvaient être pensées que par un mathématicien de la plus grande classe. Elles devaient être vraies, car si elles ne l'étaient pas, personne n'aurait eu assez d'imagination pour les inventer ».

Hardy invita Ramanujan à Cambridge où il séjourna de 1914 à 1919. Au fil du temps, la santé de Ramanujan déclinait, et son régime strictement végétarien ainsi que les restrictions dues à la première guerre mondiale ne l'amélioraient pas. Il retourna en Inde, ou il mourut à seulement 32 ans. Personne, pas même Hardy, n'avait eu le temps de comprendre d'où lui venaient ses intuitions géniales. Il fit dans sa vie environ 6000 découvertes qu'il consignait dans des carnets. Le déchiffrage de ces carnets a occupé de nombreux mathématiciens tout au long du 20ème siècle.

Voici une des nombreuses formules que Ramanujan donna pour le calcul de π : elle date de 1910 mais ne fut démontrée qu'en 1985.

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}}$$

3.2. Le Rapido. — Voulez-vous calculer vos chances de gagner au Bridge, au Poker, au Loto, au Keno ? Le procédure est à peu près la même et vous avez tous les outils en main.

Commençons par une formule générale, qui vous servira pour tous les jeux de hasard. Soit N un entier au moins égal à 2. Soient m et n deux autres entiers inférieurs ou égaux à N.

$$\binom{N}{n} = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k} \tag{35}$$

On peut démontrer cette formule par récurrence, en utilisant les propriétés des coefficients du binôme, mais il est plus intéressant de la comprendre. Disons que N est un nombre d'objets parmi lesquels vous vous apprêtez à en piocher n : $N = 52$ cartes et vous en recevez $n = 13$ (Bridge) ; $N = 32$ cartes et vous en recevez $n = 5$ (Poker) ; $N = 49$ numéros et vous en cochez $n = 6$ (Loto) etc... Parmi les N objets, m sont *marqués* et ce sont ceux qui peuvent vous faire gagner : $m = 4$ as au bridge, $m = 6$ numéros du tirage officiel au loto, etc...

Vous avez $\binom{N}{n}$ choix possibles. Ces choix se répartissent selon le nombre d'objets marqués que vous aurez en main. Il peut y en avoir au plus $\min\{m,n\}$. Comment constituer une sélection de n objets en tout, parmi lesquels k sont marqués ? Il faut choisir les k objets marqués parmi m en tout : $\binom{m}{k}$ façons de le faire. Il faut ensuite choisir $n-k$ objets non marqués parmi $N-m$: $\binom{N-m}{n-k}$ possibilités. La formule (35) traduit cette décomposition.

Comme cas particulier, voici comment décomposer le nombre de mains au bridge (13 cartes distribuées sur 52) en fonction du nombre d'as qu'elles contiennent.

$$\binom{52}{13} = \binom{4}{0}\binom{48}{13} + \binom{4}{1}\binom{48}{12} + \binom{4}{2}\binom{48}{11} + \binom{4}{3}\binom{48}{10} + \binom{4}{4}\binom{48}{9}.$$

Comment en déduire vos chances d'avoir 4 as dans une main ? C'est facile, il suffit de diviser le nombre de mains contenant 4 as par le nombre total de mains.

$$\frac{\binom{4}{4}\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} \simeq 0.002641$$

Le Rapido, comme son nom l'indique, ne demande pas une réflexion très puissante, et les résultats défilent toutes les 10 minutes sur un écran de télé. Pour jouer, vous cochez 8 numéros parmi 20 sur la grille A, et 1 numéro parmi 4 sur la grille B. Les « bons » numéros affichés à la télé sont choisis de même. Vous pouvez donc avoir k bons numéros (k entre 0 et 8) sur la grille A et 0 ou 1 sur la grille B. Vos chances d'avoir k bons numéros sur la grille A sont de

$$\frac{\binom{8}{k}\binom{12}{8-k}}{\binom{20}{8}}$$

Pour avoir vos chances d'avoir en plus le bon numéro de la grille B, multipliez par 1/4. Voici les probabilités pour k allant de 0 à 8 et $b = 0$ ou 1 selon que vous avez ou non le numéro de la grille B.

$b \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.00295	0.03772	0.15404	0.26406	0.20630	0.07335	0.01100	0.00057	0.00001
1	0.00098	0.01257	0.05135	0.08802	0.06877	0.02445	0.00367	0.00019	0.00000

Vos chances d'avoir au moins 3 bons numéros sur la grille A sont de 74%, ce qui vous encourage à jouer. Cependant vous ne gagnez qu'à partir de 4 bons numéros. Voici les gains en euros offerts pour 1 euro misé, pour chacune des combinaisons gagnantes.

$b \backslash k$	4	5	6	7	8
0	0	2	10	50	1000
1	1	6	30	150	10000

D'après les probabilités calculées plus haut, sur 100 000 joueurs payant chacun 1 euro, environ 6877 gagneront 1 euro, environ 7335 gagneront 2 euros, environ 2445 gagneront 6 euros, ... Au total, la Française des Jeux reversera en moyenne 66 518 euros, pour 100 000 euros de mise empochés.

Limites de suites et de fonctions

Pierre Dehornoy, d'après Agnès Coquio, Eric Dumas, Emmanuel Peyre et Bernard Ycart

Dans ce chapitre on revoit la notion de limite de suite et on la traduit en termes d'assertion mathématique. On définit aussi la notion de limite d'une fonction en un point, ce qui permet de donner une définition précise de la continuité des fonctions.

Cours

4.1. Compléments sur les réels. — On commence par quelques compléments sur les réels qui seront utiles pour définir et utiliser la notion de limite.

Tout sous-ensemble fini $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbf{R}$ admet un plus petit élément m ; cela se traduit par l'assertion

$$\forall S \subset \mathbf{R},\ (|S| \in \mathbf{N}) \implies (\exists m \in S,\ \forall s \in S, m \leqslant s)\ .$$

On note $\min(x_1, \dots, x_n)$ un tel plus petit élément. De même, S admet un plus grand élément noté $\max(x_1, \dots, x_n)$. Il est commode d'étendre un peu cette notion en rajoutant deux objets $+\infty$ et $-\infty$ qui satisfont $\forall x \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, x \leqslant +\infty$ et $\forall x \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, -\infty \leqslant x$. Pour tout sous-ensemble fini $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on a encore des notions de min et de max.

Rappelons qu'un intervalle de $\mathbf{R}$ est un ensemble I tel que l'assertion $(\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbf{R}, (x < y \text{ et } y < z) \implies x < z)$ est vraie. Un intervalle est dit *ouvert* s'il est de la forme suivante :

$$]a, b[= \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x < b \},$$

où $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Cet intervalle est vide si $b \leqslant a$.

On a les propriétés suivantes :

Proposition 4.1

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $x \in I$. Alors il existe un nombre réel strictement positif ε tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I$.

L'énoncé ci-dessus est le premier énoncé où l'on doit montrer l'existence d'un certain nombre ε positif satisfaisant une propriété en fonction d'un nombre x choisi avant. Il est important de noter qu'en général le nombre ε va dépendre de x. Dans ce chapitre, et par la suite dans le domaine mathématique appelé "analyse", nous démontrerons de nombreuses assertions de ce type. Le plan est presque toujours le même : on fixe le nombre x, et ensuite on va exhiber une valeur de ε judicieusement choisie en fonction de x.

Démonstration. — Notons d'abord que si l'intervalle I est vide, la proprété est vérifiée puisqu'une propritété de type $\forall x \in \emptyset, P(x)$ est toujours vraie.

Ensuite si $I = \mathbf{R}$, alors on peut prendre n'importe quel $\varepsilon \in \mathbf{R}$, par exemple $\varepsilon = 1$, on aura toujours $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathbf{R}$.

Supposons à présent $I \neq \mathbf{R}$, et notons $I =]a, b[$ avec $a, b \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors on peut prendre $\varepsilon = \min(x-a, b-x)$.[3] Par définition, on a $\varepsilon \leqslant x-a$ et $\varepsilon \leqslant b-x$. On a alors $a \leqslant x-\varepsilon$ et $x+\varepsilon \leqslant b$, et donc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]a, b[$. □

Proposition 4.2

Soit I, J deux intervalles ouverts, alors l'intersection $I \cap J$ est un intervalle ouvert.

Démonstration. — Supposons que I est de la forme $]a, b[$ et J de la forme $]c, d[$, avec $a, b, c, d \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors nous affirmons qu'on a $I \cap J =]\max(a, c), \min(b, d)[$.

Démontrons ce point par double-inclusion, c'est-à-dire montrons d'abord $I \cap J \subset]\max(a, c), \min(b, d)[$, puis $]\max(a, c), \min(b, d)[\subset I \cap J$.

Concernant l'inclusion $I \cap J \subset]\max(a, c), \min(b, d)[$, soit $x \in I \cap J$. Comme on a $x \in I$, on a $a < x < b$, et comme on a $x \in J$, on a $c < x < d$. Par conséquent on $\max(a, c) < x < \min(b, d)$, et donc $x \in]\max(a, c), \min(b, d)[$. On a démontré l'inclusion voulue.

Concernant l'inclusion $]\max(a, c), \min(b, d)[\subset I \cap J$, soit $x \in]\max(a, c), \min(b, d)[$. Comme on a $\max(a, c) < x < \min(b, d)$, on a en particulier $a < x < b$ et $c < x < d$. Des premières inégalités on déduit $x \in I$, et des secondes $x \in J$. Par conséquent on a $x \in I \cap J$, et on a démontré l'inclusion voulue.

On a donc la double-inclusion $I \cap J \subset]\max(a, c), \min(b, d)[$ et $]\max(a, c), \min(b, d)[\subset I \cap J$, et donc $I \cap J =]\max(a, c), \min(b, d)[$. □

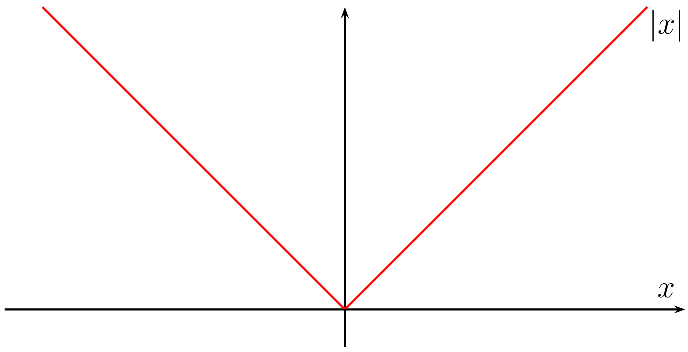
3. Noter que le choix de ε dépend du point x : il n'y a pas de ε qui marche pour tous les points $x \in I$.

Rappelons qu'on a défini la *valeur absolue* d'un nombre réel x par la formule

$$|x| = \max(x, -x).$$

Son graphe est représenté sur la figure 16.

FIGURE 16. Valeur absolue



Par définition, la valeur absolue est positive :

$$\forall x \in \mathbf{R}, |x| \geqslant 0.$$

et ne s'annule qu'en 0 :

$$\forall x \in \mathbf{R}, |x| = 0 \iff x = 0.$$

D'autre part, la valeur absolue est multiplicative :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, |xy| = |x| \times |y|.$$

Elle vérifie aussi les inégalités triangulaires

Proposition 4.3 (Inégalités triangulaires)

Soient x et y des nombres réels, alors on a les deux inégalités

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

et

$$\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x - y|.$$

Démonstration. — On a les inégalités $x \leqslant |x|$ et $y \leqslant |y|$. Cela implique l'inégalité $x + y \leqslant |x| + |y|$. De même, les inégalités $-x \leqslant |x|$ et $-y \leqslant |y|$ impliquent la relation $-(x + y) \leqslant |x| + |y|$ comme $|x + y|$ est égal à $x + y$ ou $-(x + y)$, la première inégalité triangulaire est démontrée.

Démontrons la seconde. Par la première inégalité, on a les relations

$$|x| = |y + x - y| \leqslant |y| + |x - y|$$

ce qui implique l'inégalité $|x|-|y| \leqslant |x-y|$. En échangeant x et y dans ce raisonnement, on obtient $|y| - |x| \leqslant |y - x| = |x - y|$. Comme $\big||x| - |y|\big|$ vaut $|x| - |y|$ ou $|y| - |x|$ la seconde inégalité triangulaire est démontrée. □

Rappelons également pour $a \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ qu'on a

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= \{x \in \mathbf{R} \,\big|\, |x - a| < \varepsilon\} \ .$$

Définition 4.4

Soit x un nombre réel et ε un réel positif. On dit qu'un nombre y (réel, rationnel, ou décimal) est une *approximation de x à ε près* (ou *avec une marge d'erreur d'au plus ε*) si on a $|x - y| \leqslant \varepsilon$.

Exemple 4.5. — On écrit souvent $\pi = 3,14\ldots$ Il n'y a en fait pas égalité puisqu'on ne sait précisément ce qu'il y a dans les .... Ce que dit cette écriture c'est que π est dans l'intervalle $[3,14\,,\,3,15[$, et donc qu'on a $|\pi - 3,14| < 0,01$. Ainsi $3,14$ est une approximation de π à $0,01$ près. En utilisant $3,14$ comme valeur de π, on fait donc une erreur d'au plus $0,01$.

Enfin, voici quelques notions utiles sur les suites et les fonctions :

Définition 4.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est

- *périodique* s'il existe un entier naturel p non nul, appelé *période*, tel que pour tout entier n on a $u_{n+p} = u_n$;
- *majorée* s'il existe un réel M tel que pour tout entier n on a $u_n \leqslant M$;

— *minorée* s'il existe un réel m tel que pour tout entier n on a $u_n \geqslant m$;
— *bornée* si elle est majorée et minorée.

Définition 4.7

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f est

— *périodique* s'il existe un réel strictement positif T, appelé *période*, tel que pour tout réel x on a $f(x+T) = f(x)$;
— *majorée* s'il existe un réel M tel que pour tout réel x on a $f(x) \leqslant M$;
— *minorée* s'il existe un réel m tel que pour tout réel x on a $f(x) \geqslant m$;
— *bornée* si elle est majorée et minorée.

4.2. Définition de la limite d'une suite. — Vous avez probablement vu au lycée la définition suivante (ou une variante) :

Définition 4.8 (Limite d'une suite)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels et ℓ un nombre réel. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ si

pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ satisfaisant $n \geqslant n_0$ on a $u_n \in I$.

Dans ce cas on note

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \text{ou bien} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \ell.$$

Il faut être très attentif au fait de ne pas parler de la limite d'une suite tant qu'on n'a pas démontré qu'elle existe.

L'interprétation géométrique est la suivante : si on représente le graphe de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans le plan (c'est-à-dire qu'on trace les points de coordonnées (n, u_n) dans $\mathbf{R}^2$), alors pour toute bande horizontale contenant la droite d'équation $y = \ell$, tous les points du graphe, sauf un nombre fini, sont dans la bande.

Voici une formulation équivalente en termes de ε de la définition ci-dessus. Elle sera souvent plus commode à manipuler.

Proposition 4.9 (Limite d'une suite en termes d'ε)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels et ℓ un nombre réel. Alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ si et seulement si on a

$$\forall\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*,\ \exists n_0\in\mathbf{N},\ \forall n\in\mathbf{N},\ (n\geqslant n_0)\implies |u_n-\ell|<\varepsilon\ .$$

Remarque 4.10. — On fait souvent l'abus d'écriture suivant : on concentre la partie $\forall n\in\mathbf{N}, n\geqslant n_0 \implies$ de l'assertion en $\forall n\geqslant n_0$, ce qui donne

$$\forall\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*,\ \exists n_0\in\mathbf{N},\ \forall n\geqslant n_0,\ |u_n-\ell|<\varepsilon\ .$$

Démonstration. — On veut démontrer une équivalence. On va raisonner par double-implication.

Commençons par le sens direct, c'est-à-dire supposons que la propriété de la définition 4.8 est satisfaite, et montrons l'assertion de la proposition 4.9.

On suppose donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ. Comme on veut démontrer une assertion qui commence par $\forall\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*$, on commence par fixer un tel ε qui ne changera pas dans toute la preuve suivante. Alors on applique la définition 4.8 à l'intervalle $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$. En effet, c'est un intervalle ouvert qui contient ℓ, donc par définition il existe $n_0\in\mathbf{N}$ satisfaisant $\forall n\in\mathbf{N},\ (n\geqslant n_0)\implies (u_n\in\,]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[)$. Or on a l'équivalence $u_n\in\,]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[\Leftrightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon$. Par conséquent, on a bien trouvé n_0 tel que $\forall n\in\mathbf{N},\ (n\geqslant n_0)\implies |u_n-\ell|<\varepsilon$. On a bien démontré l'assertion

$$\forall\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*,\ \exists n_0\in\mathbf{N},\ \forall n\in\mathbf{N},\ (n\geqslant n_0)\implies |u_n-\ell|<\varepsilon\ .$$

On va maintenant démontrer l'implication réciproque, c'est-à-dire que si l'assertion de la proposition 4.9 est vraie, alors l'assertion de la définition 4.8 est vraie. Pour cela, on part d'un intervalle ouvert J contenant ℓ, et on veut montrer que pour n assez grand, le nombre u_n est dans J. Comme J est un intervalle ouvert et ℓ un point de J, par la proposition 4.1, il existe $\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*$ tel que $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[\subset J$. Maintenant puisqu'on a supposé que l'assertion de la proposition 4.9 est vraie, il existe $n_0\in\mathbf{N}$ tel que $\forall n\in\mathbf{N},\ (n\geqslant n_0)\implies |u_n-\ell|<\varepsilon$. Or $|u_n-\ell|<\varepsilon$ est équivalent à $u_n\in\,]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$, et d'après l'inclusion $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[\subset J$, cela implique $u_n\in J$. Ainsi on a bien trouvé un n_0 qui convient : l'implication réciproque est démontrée. $\square$

Exemples 4.11. — Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par $u_n=\frac{1}{n}$. Comme n est toujours non nul pour $n\in\mathbf{N}^*$, cette suite est bien définie pour $n\geqslant 1$. Montrons qu'elle a pour limite le nombre 0 en utilisant la proposition 4.9.

Pour cela, on fixe $\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*$, et on doit chercher n_0 correspondant. Comme on veut $\frac{1}{n}<\varepsilon$, cette inégalité est équivalente à $n>\frac{1}{\varepsilon}$. On choisit alors n_0 dépendant de ε par la formule $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a alors $n \geqslant n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, et donc

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \, ,$$

ce qu'on voulait démontrer.

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n^2}$. Comme dans l'exemple précédent, elle est bien définie pour $n \geqslant 1$. Montrons qu'elle a pour limite le nombre 0 en utilisant le même schéma.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $n_0 = \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant n_0$. Alors on a $n^2 \geqslant {n_0}^2 > (\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}})^2 = \dfrac{1}{\varepsilon}$, et donc

$$|u_n - 0| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{{n_0}^2} < \varepsilon \, ,$$

ce qu'on voulait démontrer.

Dans les deux exemples précédents, la clé est le choix de l'entier n_0 qui fait marcher la preuve. Dans le premier exemple on a un peu plus détaillé comment on le choisit : d'abord on cherche au brouillon à résoudre l'inégalité $|u_n - \ell| < \varepsilon$, et si tout va bien, on trouve une ou plusieurs contraintes sur n. On choisit alors un n_0 qui fait que cette ou ces contraintes sont satisfaites.

Passons maintenant aux limites infinies. La notion d'invervalle contenant l'infini n'a pas été définie, mais on pourrait convenir qu'un intervalle ouvert contenant $+\infty$ est un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ pour $a \in \mathbf{R}$. De même un intervalle ouvert contenant $-\infty$ serait un intervalle de la forme $]-\infty, b[$ pour $b \in \mathbf{R}$. À l'aide de cette idée la définition 4.8 et la proposition 4.9 s'étendent sans peine :

Définition 4.12 (Limites infinies de suites)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ si on a

$$\forall a \in \mathbf{R},\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ (n > n_0) \implies u_n > a \, ,$$

on écrit alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, ou bien $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$ si on a

$$\forall a \in \mathbf{R},\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ (n > n_0) \implies u_n < a \, ,$$

on écrit alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 4.13. — Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = n^2$, et montrons qu'elle tend vers $+\infty$. Pour cela, soit a un nombre réel quelconque. Posons alors $n_0 = \min(0, \lfloor\sqrt{a}\rfloor + 1)$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à n_0. Alors, si a est négatif on a automatiquement $u_n \geqslant 0 > a$, et si a est positif on a $u_n = n^2 \geqslant sn_0^2 > (\sqrt{a})^2 = a$. On a donc bien montré l'assertion définissant le fait que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

Pour montrer qu'une suite admet une limite (finie ou infinie), il faut d'abord deviner la limite, puis démontrer que la suite tend effectivement vers cette limite, à l'aide par exemple de la proposition 4.9 ou de la définition 4.12. À ce propos il faut noter qu'il n'y a aucun choix pour la valeur de la limite :

Proposition 4.14 (Unicité de la limite)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite (finie ou infinie), alors celle-ci est unique.

Démonstration. — Supposons qu'on a une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et deux réels ℓ_1, ℓ_2 tels que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tende à la fois vers ℓ_1 et vers ℓ_2. On cherche à montrer qu'alors on a $\ell_1 = \ell_2$. On va traiter le cas de deux limites finies, et laisser les cas où ℓ_1 ou ℓ_2 sont infinies en exercice. On va raisonner par l'absurde en supposant $\ell_1 > \ell_2$, et aboutir à une contradiction (le cas $\ell_1 < \ell_2$ se traite de même en inversant les rôles de ℓ_1 et ℓ_2.

Posons $\varepsilon := \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{2}$. Par hypothèse, on a $\varepsilon > 0$. On va appliquer la définition du fait que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ_1 et ℓ_2 à cette valeur de ε.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$, il existe n_1 tel qu'on a

$$\forall n \geqslant n_1,\ |u_n - \ell_1| < \varepsilon.$$ [4]

De même comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$, il existe n_2 tel qu'on a

$$\forall n \geqslant n_2,\ |u_n - \ell_2| < \varepsilon.$$

4. Pour alléger l'écriture et parce que le contexte est clair, on contracte « $\forall n \in \mathbf{N}, (n \geqslant n_1 \implies \dots)$ » en « $\forall n \geqslant n_1, \dots$ ».

Alors pour $n > \max(n_1, n_2)$, on a $|u_n - \ell_1| < \varepsilon$ et $|u_n - \ell_2| < \varepsilon$. L'inégalité triangulaire donne alors

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &\leqslant |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \\ &= |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = |\ell_1 - \ell_2| \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Par conséquent l'hypothèse est fausse, et on a bien $\ell_1 = \ell_2$. □

Définition 4.15 (Convergence et divergence)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *convergente* si elle admet une limite dans $\mathbf{R}$, et on dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *divergente* si elle admet une limite infinie ou si elle n'admet pas de limite.

Remarque 4.16. — On a vu des exemples de suites ayant une limite (finie ou infinie). Comment montrer qu'une suite n'a pas de limite finie ? Il faut nier la propriété définissant la limite. La négation de

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

est

$$\exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \forall n_0 \in \mathbf{N}, \exists n \geqslant n_0, |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon\ .$$

Il s'agit donc pour tout réel ℓ de trouver un nombre ε tel que la suite repasse toujours à une distance supérieure à ε du nombre ℓ.

Exemple 4.17. — Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite. Pour cela, on raisonne par l'absurde, et on suppose qu'elle admet une limite $\ell \in \mathbf{R}$. Raisonnons selon que ℓ est positif ou négatif.
<u>Cas 1 :</u> $\ell \geqslant 0$. Dans ce cas, posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ quelconque, et soit n un entier impair supérieur à n_0 (par exemple $n_0 + 1$ si n_0 est pair et $n_0 + 2$ si n_0 est impair. Alors on a $u_n = -1$, et donc $|u_n - \ell| = |-1-\ell| = 1 + \ell > \frac{1}{2} = \varepsilon$, ce qui contredit la définition du fait que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tende vers ℓ.
<u>Cas 2 :</u> $\ell < 0$. Ce cas est semblable au précédent : posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ quelconque, et soit n un entier pair supérieur à n_0 (par exemple $n_0 + 2$ si n_0 est pair et $n_0 + 1$ si n_0 est impair. Alors on a $u_n = 1$, et donc $|u_n - \ell| = |1 - \ell| = 1 + |\ell| > \frac{1}{2} = \varepsilon$, ce qui contredit la définition du fait que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tende vers ℓ.

Que ce soit pour montrer qu'une suite admet une limite ou pour montrer qu'elle n'en a pas, il y a donc toujours un choix judicieux à faire, à savoir n_0 en fonction de ε pour montrer la convergence, ou ε pour montrer qu'il n'y a pas de limite.

L'exemple précédent est un cas particulier du résultat suivant. On rappelle que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite réelle, et $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une fonction strictement croissante, alors la suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est appelée *suite extraite*. Elle dépend du choix de la fonction ϕ qu'on appelle *extractrice*.

Proposition 4.18

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Supposons qu'il existe deux fonctions extractrices $\phi, \psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telles que $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers une limite $\ell_1 \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers une limite $\ell_2 \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, avec $\ell_1 \neq \ell_2$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'admet aucune limite.

La preuve est proche de l'exemple 4.17, nous ne la détaillons pas.

4.3. Opérations sur les limites. — Dans la partie précédente, on a vu que, pour prouver qu'une suite converge ou qu'elle n'a pas de limite, il y a toujours un choix judicieux à faire. Or ce choix n'est pas toujours facile. Heureusement, il y a des résultats permettant de montrer la convergence, ou la non-convergence, sans avoir recours à la définition.

Proposition 4.19 (Somme et produit de limites)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs réelles. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ_1 et que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers ℓ_2, avec $\ell_1, \ell_2 \in \mathbf{R}$. Alors la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\ell_1 + \ell_2$ et la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\ell_1\ell_2$.

Démonstration. — Commençons par la somme des deux suites. On va utiliser la caractérisation de la proposition 4.9 de la congergence. Fixons $\varepsilon > 0$.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ_1, il existe un entier n_1 tel qu'on a[5]

$$\forall n \geqslant n_1, |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} .^{6}$$

De même comme $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ_2, il existe un entier n_2 tel qu'on a

$$\forall n \geqslant n_2, |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Posons alors $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a à la fois $|u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. En additionnant ces inégalités et à l'aide de l'inégalité triangulaire, on a alors

$$|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| \leqslant |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

ce qui démontre la propriété pour la somme des deux suites.

Passons maintenant au produit. La détermination des entiers n_1 et n_2 est plus subtile.

On peut commencer par le cas $\ell_1 = \ell_2 = 0$ qui est plus simple, et qu'il faudra en fait traiter séparément. Dans ce cas, une fois fixé $\varepsilon > 0$, on peut choisir n_1 tels que pour tout $n \geqslant n_1$ on a $|u_n - \ell_1| < \sqrt{\varepsilon}$. On peut choisit n_2 tels que pour tout $n \geqslant n_2$ on a $|v_n - \ell_1| < \sqrt{\varepsilon}$. Alors en posant $n_0 = \max(n_1, n_2$, pour tout $n \neq n_0$, on a

$$|u_n v_n - \ell_1\ell_2| = |u_n v_n| = |u_n| \cdot |v_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon ,$$

donc la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge bien vers $0 = \ell_1\ell_2$.

Maintenant supposons $\ell_2 \neq 0$. Commençonc par une analyse : on veut démontrer une inégalité de type $|u_n v_n - \ell_1\ell_2| < \varepsilon$. Pour cela on va utiliser une hypothèse sur $|u_n - \ell_1|$ et sur $|v_n - \ell_2|$. Il faut donc relier ces quantités. C'est possible, comme suit :

$$u_n v_n - \ell_1\ell_2 = u_n v_n - u_n\ell_2 + u_n\ell_2 - \ell_1\ell_2 = u_n(v_n - \ell_2) + \ell_2(u_n - \ell_1) .$$

À l'aide de la formule précédente les choix sont plus faciles : fixons $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ_1, il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_1$ on a $|u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2|\ell_2|}$ et $|u_n - \ell_1| < 1$[7]. Notons que si $\ell_2 = 0$, la première inégalité n'a pas de sens. On traitera donc ce cas séparément ensuite. Comme $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ_2, il existe $n_2 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier $n > n_2$ on a $|v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell_1|+1)}$[8]. Alors posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Pour

5. Noter que par commodité on note n_1 l'entier en question, et non n_0, ce qui permettra de le différencier de l'entier n_2 à venir.
6. Noter qu'ici on a appliqué la définition avec $\frac{\varepsilon}{2}$ et non ε, en vue de la suite.
7. ici on applique la proposition 4.9 en remplaçant ε par $\min(1, \frac{\varepsilon}{2|\ell_2|})$.
8. ici on applique la proposition 4.9 en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{2(|\ell_1|+1)}$.

$n \geqslant n_0$, on a d'une part $|u_n - \ell_1| < 1$, donc $|u_n| < 1 + |\ell_1|$ par inégalité triangulaire, et donc

$$\begin{aligned}
|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| &= |u_n(v_n - \ell_2) + \ell_2(u_n - \ell_1)| \\
&\leqslant |u_n(v_n - \ell_2)| + |\ell_2(u_n - \ell_1)| \\
&< (1 + |\ell_1|)|v_n - \ell_2| + |\ell_2| \cdot |u_n - \ell_1| \\
&< (1 + |\ell_1|)\frac{\varepsilon}{2(|\ell_1| + 1)} + |\ell_2|\frac{\varepsilon}{2|\ell_2|} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \, ,
\end{aligned}$$

ce qui démontre, lorsque $\ell_2 \neq 0$, la convergence de $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers $\ell_1 \ell_2$.

Enfin, si $\ell_2 = 0$ et $\ell_1 \neq 0$, on peut reprendre la preuve ci-dessus en échangeant les rôles de ℓ_1 et ℓ_2, et les rôles de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On a donc traité tous les cas possibles, et montré la convergence dans tous. □

Exemple 4.20. — Pour $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $v_n = 2 - \frac{2}{n}$, la proposition précédente implique directement que $(u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 3 et $(u_n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 2.

La proposition 4.19 s'étend au cas des limites infinies, avec les règles suivantes que l'on admettra :

- $a + \infty = +\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}$,
- $a - \infty = -\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}$,
- $+\infty + \infty = +\infty$,
- $-\infty - \infty = -\infty$,
- $+\infty - \infty$ est indéfini : on ne peut rien conclure dans ce cas,
- $a \times (+\infty) = +\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}_+^*$,
- $a \times (+\infty) = -\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}_-^*$,
- $a \times (-\infty) = -\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}_+^*$,
- $a \times (-\infty) = +\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}_-^*$,
- $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$,
- $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$,
- $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$,
- $0 \times (+\infty)$ est indéfini,
- $0 \times (-\infty)$ est indéfini

Finissons cette partie avec les inverses :

Proposition 4.21

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle tendant vers une limite $\ell \in \mathbf{R}^*$. Alors la suite $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est définie pour n assez grand, et elle tend vers $\frac{1}{\ell}$.

Dire que $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est définie pour n assez grand signifie que $\frac{1}{u_n}$ n'est peut-être pas défini pour tout entier naturel n, puisque u_n peut s'annuler. Mais comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers une limite non nulle, elle ne peut s'annuler une infinité de fois.

Démonstration. — Fixons $\varepsilon > 0$. Le but est de majorer $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}|$ en fonction de $|u_n - \ell|$. On fait donc un calcul préliminaire pour guider les choix. On a $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}| = \frac{|\ell - u_n|}{|u_n\ell|}$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Alors comme $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ, il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$, on a à la fois $|u_n - \ell| < \varepsilon \cdot \frac{|\ell|^2}{2}$ et $|u_n| > \frac{|\ell|}{2}$. Dans ce cas, on a alors

$$\begin{aligned} |\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}| &= \frac{|\ell - u_n|}{|u_n\ell|} \\ &< \frac{|\ell - u_n| \cdot 2}{|\ell|^2} < \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui prouve bien la convergence de $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ vers $\frac{1}{\ell}$. □

On peut dire quelque chose dans le cas des limites infinies : si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, alors $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0. Pour la réciproque, il faut veiller au signe : si u_n est de signe constant, alors on a une réciproque, mais si le signe de u_n change une infinité de fois et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, alors $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas de limite.

4.4. Limites de fonctions en un point. — Ce qu'on a vu pour les suites peut être étendu aux fonctions. La question de la limite n'est pas alors (nécessairement) en $+\infty$, mais en tout point de l'ensemble de définition, ou *collé* à cet ensemble.

Dans cette partie, on considère une fonction f à valeurs réelles définie sur une partie $\mathscr{D}_f$ de $\mathbf{R}$. On commence par une définition qui peu sembler artificielle, mais l'exemple d'un intervalle ouvert est suffisant pour une première lecture.

Définition 4.22

Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbf{R}$. Un élément $a \in \mathbf{R}$ est *adhérent* à $\mathscr{D}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une approximation de a dans $\mathscr{D}$ avec précision ε, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*,\ \exists x \in \mathscr{D},\ |x-a| < \varepsilon\ .$$

Exemples 4.23. — Si a est un point de $\mathscr{D}$, alors a est adhérent à $\mathscr{D}$ puisque pour tout $\varepsilon > 0$, on a peut prendre $x = a$.

Si $\mathscr{D}$ est un intervalle ouvert $]b, c[$ avec $b, c \in \mathbf{R}$, alors l'ensemble des points adhérents à $\mathscr{D}$ est $[b, c]$. En effet, si a est un point de $]b, c[$, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut prendre $x = a$. Si a est le point b, pour $\varepsilon > 0$ fixé on peut prendre $x = b + \frac{\varepsilon}{2}$, et si a est le point c, on peut prendre $x = c - \frac{\varepsilon}{2}$. Par contre, pour tout a réel tel que $a < b$, pour $\varepsilon = b - a$, on ne pourra trouver un point de $]b, c[$ à distance strictement inférieure à ε de a. De même pour tout a réel tel que $a > c$, pour $\varepsilon = a - c$, on ne pourra trouver un point de $]b, c[$ à distance strictement inférieure à ε de a.

Ainsi si $\mathscr{D} =]-1, 7]$, l'ensemble des points adhérents à $\mathscr{D}$ est $[-1, 7]$.

Plus généralement, si $\mathscr{D}$ est une réunion finie d'intervalles, un élément a de $\mathbf{R}$ est adhérent à $\mathscr{D}$ si et seulement si $a \in \mathscr{D}$ ou si a est une borne d'un des intervalles composant $\mathscr{D}$.

Comme on a vu deux définitions pour la limite d'une suite (en termes d'intervalles ou en termes d'epsilon), il y a deux définitions possibles pour la limite d'une fonction en un point.

Définition 4.24

Soit a un point adhérent à $\mathscr{D}_f$. Soit $\ell \in \mathbf{R}$.

On dit que la fonction f *a pour limite* ℓ *en* a ou que $f(x)$ *tend vers* ℓ quand x tend vers a si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) Pour tout intervalle ouvert J contenant ℓ, il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(I \cap \mathscr{D}_f) \subset J$;

(ii) On a

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note alors
$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \ .$$

On prendra garde au fait que, dans l'assertion (ii) le nombre réel η dépend de la fonction f, du point a et du nombre réel ε. Si on applique plusieurs fois la définition en changeant un de ses paramètres, il faut prendre en compte cette dépendance en notant de façon différenciée chacun des nombres réels η obtenus (par exemple en utilisant des indices η_1, $\eta_2, \ldots$ ou des exposants η, $\eta', \ldots$).

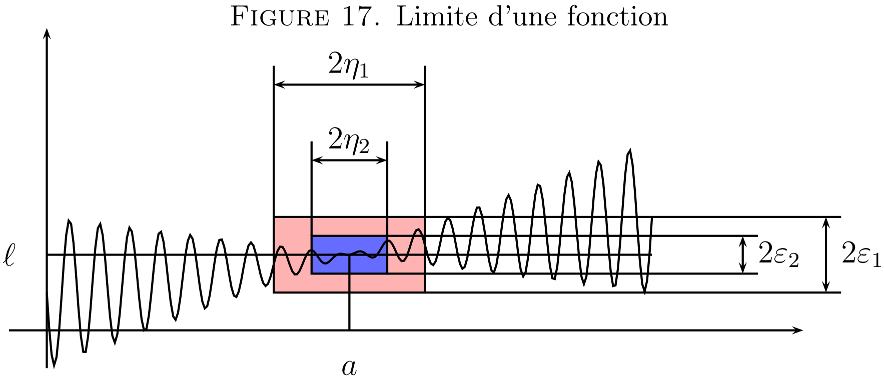
Preuve de l'équivalence entre les deux assertions. — Cette preuve est très proche de la preuve de la Proposition 4.9

Commençons par démontrer l'implication (i)$\Rightarrow$(ii). Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ est un un intervalle ouvert qui contient ℓ. L'assertion (i) assure alors qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(I \cap \mathscr{D}_f) \subset \,]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. Cette inclusion est équivalente à l'assertion
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad x \in I \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
Comme a appartient à l'intervalle ouvert I, il existe $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $]a - \eta, a + \eta[\, \subset I$. Il en résulte que
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
ce qui nous donne l'assertion (ii).

Démontrons maintenant la réciproque. Soit J un intervalle ouvert contenant ℓ. Il existe un nombre réel ε strictement positif tel que $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\, \subset J$. L'assertion (ii) nous fournit un nombre $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{36}$$
Posons $I = \,]a - \eta, a + \eta[$. C'est un intervalle ouvert contenant a. L'assertion (36), implique l'inclusion $f(I \cap \mathscr{D}_f) \subset J$. □

On peut autoriser les limites infinies dans la définition 4.24 comme dans le cas des suites en remplaçant les intervalles ouverts contenant ℓ en des intervalles de la forme $]a, +\infty[$, ou $]-\infty, b[$, et en remplaçant la seconde assertion par
$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathscr{D}_f, \ |x - a| < \eta \Longrightarrow f(x) > M \ ,$$
ou
$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathscr{D}_f, \ |x - a| < \eta \Longrightarrow f(x) < M \ .$$
L'unicité de la limite se démontre comme pour les suites.

FIGURE 17. Limite d'une fonction



Définition 4.25

Soit $f : \mathscr{D}_f \to \mathbf{R}$ une fonction et a un point adhérent à $\mathscr{D}_f$. Si f a pour limite ℓ en a, alors la limite ℓ est unique. On notera :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

et on appelle ℓ *la* limite de f au point a.

Démonstration. — Démontrons l'assertion d'unicité par l'absurde. Supposons que les nombres réels distincts ℓ et ℓ' conviennent. Soit $\varepsilon = (\ell' - \ell)/2$. Comme $\ell \neq \ell'$, ce nombre réel est strictement positif. On applique la définition à ℓ : soit $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{37}$$

En appliquant maintenant la définition à ℓ', on obtient un nombre $\eta' \in \mathbf{R}_+^*$, éventuellement distinct de η, tel que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x - a| < \eta' \Longrightarrow |f(x) - \ell'| < \varepsilon. \tag{38}$$

Soit $\eta'' = \min(\eta, \eta')$. Ce nombre est strictement positif. Comme a est supposé adhérent à $\mathscr{D}_f$, il existe un élément $x_0 \in \mathscr{D}_f \cap \,]a - \eta'', a + \eta''[$. Cet élément x_0 satisfait donc $|x_0 - a| < \eta$ et $|x_0 - a| < \eta'$. On peut donc utiliser les assertions (37) et (38) si bien que $|f(x_0) - \ell| < \frac{|\ell - \ell'|}{2}$ et $|f(x_0) - \ell'| < \frac{|\ell - \ell'|}{2}$. mais par l'inégalité triangulaire

$$|\ell - \ell'| \leqslant |\ell - f(x_0)| + |f(x_0) - \ell'| < 2\frac{|\ell - \ell'|}{2}$$

et on obtient une contradiction. Donc il y a au plus un nombre ℓ qui convient. □

Remarques 4.26. — i) On notera que si $a \in \mathscr{D}_f$ alors $f(a) \in f(I)$ pour tout intervalle I contenant a, si bien que la seule valeur possible pour la limite ℓ est $f(a)$.

Mais une fonction qui est définie au point a n'admet pas forcément de limite en ce point.

ii) On vérifie facilement que démontrer $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ revient à démontrer $\lim_{x \to a} f(x) - \ell = 0$, ou encore $\lim_{x \to 0} f(x + a) = \ell$.

Voici un lien entre limites de suites et limites de fonctions, qui est particulièrement utile pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point.

Théorème 4.27 (Caractérisation séquentielle des limites)

Soit $f : \mathscr{D}_f \to \mathbf{R}$ une fonction et a un point adhérent à $\mathscr{D}_f$. Alors f tend vers ℓ en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathscr{D}_f$ et tendant vers a, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers ℓ.

Démonstration. — exercice □

4.5. Quelques exemples. — Pour illustrer la définition nous allons considérer la limite de deux fonctions f classiques. Les exemples qui suivent peuvent être considérés comme des exercices corrigés. Le schéma de preuve est à chaque fois le même : on fixe $a \in \mathscr{D}_f$ et un nombre réel ε strictement positif et on doit produire un nombre η strictement positif, dépendant de a et ε de sorte que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Pour cela, il convient de trouver une majoration de $|f(x) - f(a)|$ en termes de $|x - a|$. Dans l'exemple 4.29, l'étude préliminaire correspond au travail qu'on peut faire au brouillon avant de pouvoir rédiger la preuve de la convergence.

Exemple 4.28. — Considérons d'abord le cas basique de l'application $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto x$. Soit $a \in \mathbf{R}$ et soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons[9] $\eta = \varepsilon$. Par hypothèse, $\eta \in \mathbf{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x - a| < \eta$ alors

$$|\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}(x) - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}(a)| = |x - a| < \eta = \varepsilon.$$

9. Insistons sur le fait que a et ε nous sont donnés, et que nous ne pouvons pas les modifier, mais que nous avons la liberté de choisir η comme nous voulons, du moment qu'il est strictement positif.

On a donc démontré que pour tout $a \in \mathbf{R}$, on a

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}, \quad |x-a| \Longrightarrow |\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}(x) - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}(a)| \leqslant \varepsilon.$$

et donc

$$\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}(x) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}(a).$$

Exemple 4.29. — Passons à l'application de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Étude préliminaire. Soit $a, x \in \mathbf{R}^*$. On peut majorer $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right|$ de la façon suivante :

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a-x}{xa}\right| = \frac{|x-a|}{|x|\,|a|}. \tag{39}$$

Une des difficultés de cet exemple est que pour majorer $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right|$, on a besoin de majorer $\frac{1}{|x|}$ c'est-à-dire minorer $|x|$. Mais la seconde inégalité triangulaire fournit les inégalités suivantes :

$$|x| = |a-(a-x)| \geqslant \big||a| - |x-a|\big| \geqslant |a| - |x-a|. \tag{40}$$

Par conséquent, si $|x-a| < \frac{|a|}{2}$, on a $|x| > \frac{|a|}{2}$.

Preuve de la limite. Soit $a \in \mathbf{R}^*$ et soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. On pose

$$\eta = \min\left(\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2}{2}\varepsilon\right).$$

Ce nombre est bien strictement positif. Soit $x \in \mathbf{R}^*$ tel que $|x-a| < \eta$. Comme $|x-a| < \eta \leqslant \frac{|a|}{2}$, les inégalités (40) donnent

$$|x| \geqslant |a| - |x-a| > \frac{|a|}{2}.$$

Donc, en reprenant (39),

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| \leqslant \frac{|x-a|}{|x|\,|a|} < \frac{2}{|a|^2}\eta \leqslant \varepsilon.$$

En conclusion, on a démontré que, pour tout $a \in \mathbf{R}^*$,

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{a}.$$

4.6. Opérations sur les limites. — La notion de limite se combine avec les opérations sur les fonctions comme on l'attend. Nous énonçons les résultats dans le théorème 4.31.

Notation 4.30

Soient f et g des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$. La fonction $f+g$ (resp. fg) est la fonction définie sur $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ par $x \mapsto f(x)+g(x)$ (resp. $x \mapsto f(x)g(x)$) et s'appelle la *somme* (resp. le *produit*) des fonctions f et g.

Théorème 4.31

Soient f et g des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$. On suppose que a est un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$. Soient l et l' des nombres réels. On fait l'hypothèse suivante :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l'.$$

Alors

$$(f+g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} l + l' \quad \text{et} \quad (fg)(x) \xrightarrow[x \to a]{} l\, l'.$$

Si une application est constante, sa limite en tout point est égale à cette constante. Comme cas particulier du théorème 4.31, si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a, et λ est un réel quelconque, alors la limite en a de $\lambda f(x)$ est λl.

Démonstration du théorème 4.31. — Démontrons l'assertion a). Soit ε un nombre réel strictement positif. On applique la définition de la limite aux fonctions f et g et au nombre réel strictement positif $\varepsilon/2$. Il existe donc des nombres réels strictement positifs η_1 et η_2 tels que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\forall x \in \mathscr{D}_g, \quad |x-a| < \eta_2 \Longrightarrow |g(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Soit $x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ tel que $|x-a| < \eta$. On a alors $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|g(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$. On utilise alors la première inégalité triangulaire :

$$|(f+g)(x) - (l+l')| \leqslant |f(x) - l| + |g(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a donc démontré l'assertion
$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \quad |(f+g)(x) - (l+l')| < \varepsilon.$$
ce qui prouve que l'application $f+g$ admet la limite $l+l'$ en a.

Démontrons l'assertion b) qui est légèrement plus subtile. L'idée est d'abord d'écrire l'égalité
$$(fg)(x) - ll' = (f(x)-l)g(x) + l(g(x)-l')$$
pour tout $x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$. On veut donc majorer la valeur absolue du terme de droite en utilisant l'inégalité triangulaire. Pour cela on a besoin aussi de majorer $g(x)$ lorsque x est proche de a.

Soit ε un nombre réel strictement positif. En appliquant la définition à l'application g et au nombre réel strictement positif 1, on obtient $\eta_0 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que
$$\forall x \in \mathscr{D}_g, \quad |x-a| < \eta_0 \Longrightarrow |g(x) - l'| < 1.$$
Notons que pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, l'assertion $|g(x)-l'| < 1$ implique $|g(x)| < |l'|+1$. On applique maintenant la définition à f et au nombre strictement positif $\frac{\varepsilon}{2|l'|+2}$, on obtient un nombre $\eta_1 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2|l'|+2}.$$
De même la définition pour g fournit $\eta_2 \in \mathbf{R}_+^*$ tel que
$$\forall x \in \mathscr{D}_g, \quad |x-a| < \eta_2 \Longrightarrow |g(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2|l|+2}.$$
On pose $\eta = \min(\eta_0, \eta_1, \eta_2)$ c'est un nombre strictement positif. Soit $x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ tel que $|x-a| < \eta$. On obtient les inégalités
$$\begin{aligned} |fg(x) - ll'| &\leqslant |f(x)-l| \times |g(x)| + |l| \times |g(x)-l'| \\ &< |f(x)-l| \times (|l'|+1) + (|l|+1) \times |g(x)-l'| \\ &< 2 \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci démontre que la fonction fg admet la limite ll' en a. □

Remarque 4.32. — Dans la démonstration de l'assertion b), il n'est pas évident de deviner *a priori* que la bonne borne à utiliser pour f est $\frac{\varepsilon}{2|l'|+2}$. Pour concevoir cette preuve, une méthode consiste à l'écrire au brouillon en utilisant des paramètres ε_1 et ε_2, avec lesquels on teste les calculs, en définitive on se rend compte qu'il suffit de trouver des nombres réels ε_1 et ε_2 strictement positifs tels que

$$\varepsilon_1(|l'|+1)+(|l|+1|)\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon$$

et les valeurs $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2|l'|+2}$ et $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2|l|+2}$ conviennent (mais ce n'est pas le seul choix possible). On peut alors rédiger la preuve « au propre » avec de bonnes valeurs pour ε_1 et ε_2. Ce jeu avec les ε est surnommé « couper les ε en 4 », sans doute en référence au lien entre ε et cheveu.

Le résultat attendu sur la composition des limites se vérifie.

Lemme 4.33. — *Soit f une application de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbf{R}$. Soient a un point adhérent à $\mathscr{D}_f$ et $l \in \mathbf{R}$. On suppose que l'application f admet la limite l au point a. Alors l est adhérent à l'image de f, c'est-à-dire à $f(\mathscr{D}_f)$.*

Démonstration. — Soit J un intervalle ouvert contenant l. Par l'assertion (i) de la définition de la limite, il existe un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ contenant a tel qu'on ait l'inclusion $f(I \cap \mathscr{D}_f) \subset J$. Mais $f(I \cap \mathscr{D}_f)$ est contenu dans l'image de f et donc

$$f(I \cap \mathscr{D}_f) \subset J \cap f(\mathscr{D}_f).$$

D'autre part, comme a est adhérent à $\mathscr{D}_f$, l'ensemble $I \cap \mathscr{D}_f$ est non vide. Il en est donc de même de son image par f et donc de l'intersection $J \cap f(\mathscr{D}_f)$. □

Théorème 4.34

Soient a et b deux réels. Soit f et g deux fonctions telles que $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$. On suppose que a est un point adhérent à $\mathscr{D}_f$. Soient $b, l \in \mathbf{R}$. On suppose :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{y \to b} g(y) = l\ .$$

Alors

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = l\ .$$

Démonstration. — Notons tout d'abord que par le lemme, l'hypothèse $\lim_{x\to a} f(x) = b$ entraîne que b est adhérent à l'image de f et donc à l'ensemble $\mathscr{D}_g$. Soit J un intervalle ouvert contenant l. Par la condition (i) de la définition appliquée à g, il existe un intervalle ouvert I_1 contenant b tel que $g(I_1 \cap \mathscr{D}_g) \subset J$. On applique alors la définition à f

et à l'intervalle ouvert I_1. Il existe donc un bel intervalle ouvert I_2 tel que $f(I_2 \cap \mathscr{D}_f) \subset I_1$. On en déduit les inclusions

$$(g \circ f)(I_2 \cap \mathscr{D}_f) = g(f(I_2 \cap \mathscr{D}_f)) \subset g(I_1 \cap \mathscr{D}_g) \subset J.$$

Cela démontre que $g \circ f$ admet la limite l en a. □

Définition 4.35

Soient f et g des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$. Alors le quotient f/g est la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie sur

$$\mathscr{D}_{f/g} = \{\, x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g \mid g(x) \neq 0 \,\}$$

par

$$\forall x \in \mathscr{D}_{f/g}, \quad (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Cette fonction se note également $\frac{f}{g}$.

Théorème 4.36

Soit f et g des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Soit a un point adhérent à $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$. Soit l un nombre réel. Soit l' un nombre réel *non nul*. On fait l'hypothèse suivante

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l'.$$

Alors a est adhérent à $\mathscr{D}_{f/g}$ et

$$\frac{f}{g}(x) \xrightarrow[x \to a]{} \frac{l}{l'}.$$

Démonstration. — Démontrons tout d'abord que le nombre a est adhérent à $\mathscr{D}_{f/g}$. En appliquant la définition de la limite à g et au nombre strictement positif $|l'|$, on obtient un nombre réel η tel que, pour tout $x \in \mathscr{D}_g$ qui vérifie $|x-a| < \eta$, on ait $|g(x)-l'| < |l'|$. Cela donne les inégalités

$$(41) \qquad |g(x)| = |l' - (l' - g(x))| \geqslant |l'| - |l' - g(x)| > |l'| - |l'| = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme a est adhérent à $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$, il existe un élément $x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ tel que $|x - a| < \min(\eta, \varepsilon)$. Par (41), cela implique que $g(x) \neq 0$. Donc $x \in \mathscr{D}_{f/g}$ et $|x - a| < \varepsilon$. Donc a est adhérent à $\mathscr{D}_{f/g}$.

Démontrons maintenant le résultat sur la limite. Par le théorème sur la composée de limite de fonctions appliqué à l'application de $\mathscr{D}_{f/g}$ dans $\mathbf{R}^*$ donnée par $x \mapsto g(x)$ et à l'application de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto 1/x$, le quotient $1/g(x)$ tend vers $1/l'$ lorsque x tend vers a. En multipliant avec la fonction f, on obtient alors le résultat attendu pour le quotient f/g. $\square$

4.7. Limites sur une partie du domaine de définition. — On est souvent amené à étudier la fonction sur un domaine D plus petit que le domaine de définition de f. C'est pourquoi, on a la notion de *restriction* d'une fonction. Soit f une application à valeur réelle définie sur $\mathscr{D}_f$. Alors pour toute partie $D \subset \mathscr{D}_f$, la restriction de f à D, noté $f_{|D}$ sera l'application $f_{|D} : D \to \mathbf{R}$ définie par $f_{|D}(x) = f(x)$ pour tout $x \in D$.

Proposition 4.37

Soit f une application de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbf{R}$, soit D une partie de $\mathscr{D}_f$ et soit a un point adhérent à D. Soit $l \in \mathbf{R}$. Si $f(x)$ tend vers l quand vers x tend vers a, alors $f_{|D}$ admet la limite l en a.

En particulier on utilisera les notations suivantes :

a) On suppose que a est adhérent à $\mathscr{D}_f - \{a\}$. Lorsque la restriction de f à la partie $\mathscr{D}_f - \{a\}$ admet une limite l en a, cette limite est notée

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$$

et s'appelle la *limite épointée* de f en a.

b) On suppose que a est adhérent à $\mathscr{D}_f \cap]-\infty, a[$. Lorsque la restriction de f à la partie $\mathscr{D}_f \cap]-\infty, a[$ admet une limite l en a, cette limite est notée

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

et s'appelle la *limite à gauche* de f en a. On définit de manière analogue la *limite à droite*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

de f en a.

Remarque 4.38. — Les limites de restrictions de la fonction peuvent être utilisées pour démontrer aisément qu'une fonction n'admet pas de limite en un point. En effet, supposons que le domaine $\mathscr{D}_f$ contient deux parties A et B de sorte que le point a soit adhérent à la fois à A et à B, que les restrictions $f_{|A}$ et $f_{|B}$ admettent des limites en a et que ces limites diffèrent :

$$\lim_{x\to a} f_{|A} \neq \lim_{x\to a} f_{|B}.$$

Démontrons alors par l'absurde que f n'admet pas de limite en a. Si f admettait une limite l en a, par la proposition 4.37, on aurait

$$\lim_{x\to a} f_{|A} = l = \lim_{x\to a} f_{|B},$$

ce qui contredit les hypothèses faites sur ces limites.

En particulier, si f admet des limites à droite et à gauche en un point a, mais que ces limites diffèrent, alors f n'admet pas de limite en a.

Certains ouvrages, utilisant des conventions plus anciennes, définissent la limite comme la limite épointée. Insistons donc une fois de plus sur le fait que, dans ce cours, si $a \in \mathscr{D}_f$ et que f admet une limite en a, alors cette limite est nécessairement $f(a)$.

Proposition 4.39

Soit f une application de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbf{R}$, soit a un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}_f$ et soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant a. Si $f_{|\mathscr{D}_f\cap I}$ admet la limite l en a, alors il en est de même de f.

Démonstration. — On suppose que $f_{|\mathscr{D}_f\cap I}$ admet la limite l en a. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Par hypothèse, il existe un nombre $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f \cap I, \quad |x-a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{42}$$

D'autre part, comme I est un intervalle ouvert qui contient a, il existe un nombre $\eta_2 > 0$ tel que $]a-\eta_2, a+\eta_2[$ est contenu dans I. Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ et soit $x \in \mathscr{D}_f$ tel que $|x-a| < \eta$. Alors, comme $\eta \leqslant \eta_2$, le choix de η_2 assure que $x \in I$ et donc $x \in \mathscr{D}_f \cap I$. Or $|x-a| < \eta \leqslant \eta_1$. L'assertion (42) s'applique à x, ce qui nous donne l'inégalité cherchée $|f(x) - l| < \varepsilon$. Ceci conclut le démonstration de l'assertion

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \quad \square$$

4.8. Critères de convergence. — Pour démontrer qu'une fonction f admet une limite l en un point a, on choisira de préférence la méthode la plus simple. On peut en général procéder de la façon suivante :

1. On essaye d'obtenir la limite en utilisant les opérations sur les limites et le théorème sur les limites des applications composées ;
2. On essaye d'utiliser les critères de ce paragraphe ;
3. En dernier recours, si aucune des méthodes précédentes ne s'appliquent, on utilise la définition.

Théorème 4.40 (Théorème des gendarmes)

Soient f, g et h des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de domaines de définition respectifs $\mathscr{D}_f$, $\mathscr{D}_g$ et $\mathscr{D}_h$. Soit a un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}_f$ et soit $l \in \mathbf{R}$. On fait les trois hypothèses suivantes :

(i) On a l'inclusion $\mathscr{D}_f \subset \mathscr{D}_g \cap \mathscr{D}_h$;

(ii) Il existe un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ contenant a tel que
$$\forall x \in I \cap \mathscr{D}_f, \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x);$$

(iii) Les fonctions g et h admettent la même limite l en a.

Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Démonstration. — Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. En appliquant la définition de la limite à g (resp. h) et au nombre ε, on obtient $\eta_1 \in \mathbf{R}_+^*$ (resp. $\eta_2 \in \mathbf{R}_+^*$) tel que
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \eta_1 \Longrightarrow |g(x) - l| < \varepsilon,$$
(resp.
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \eta_2 \Longrightarrow |h(x) - l| < \varepsilon).$$
D'autre part comme I est un intervalle ouvert contenant a, il existe η_3 tel que $]\eta_3 - a, a + \eta_3[\subset I$. Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Soit $x \in \mathscr{D}_f$ tel que $|x-a| < \eta$. alors x vérifie $|g(x) - l| < \varepsilon$ et $|h(x) - l| < \varepsilon$. D'autre part $x \in I$ ce qui donne les inégalités
$$g(x) - l \leqslant f(x) - l \leqslant h(x) - l$$
et donc
$$-(h(x) - l) \leqslant -(f(x) - l) \leqslant -(g(x) - l)$$

Par conséquent, $|l - f(x)| \leqslant \max(h(x) - l, -(g(x) - l)) < \varepsilon$. Ceci prouve que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a. □

Proposition 4.41

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Soit $\delta \in \mathbf{R}_+^*$. Soient a un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}_f$ et $l \in \mathbf{R}$. Soit g une application de $[0, \delta[$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < g(|x - a|).$$

Alors f tend vers l quand x tend vers a.

La preuve est laissée en exercice au lecteur.

4.9. Continuité. — Donnons maintenant la définition de la continuité.

Définition 4.42

Soit $f : \mathscr{D}_f \to \mathbf{R}$ une fonction et a un réel adhérent à $\mathscr{D}_f$. On dit que f est *continue* en a si on a

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a) .$$

Définition 4.43

Soit $f : \mathscr{D}_f \to \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f est *continue* si, pour tout $a \in \mathscr{D}_f$, la fonction f est continue en a.

Exemples 4.44. — Une application constante est continue. Par les exemples 4.28 et 4.29 les fonctions $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont continues. Le lecteur vérifiera en exercice que l'application valeur absolue, c'est-à-dire l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto |x|$, est également continue. La restriction d'une application continue est continue.

Proposition 4.45

La somme, le produit et le quotient de fonctions continues sont continues. La composée d'applications continue est continue.

Démonstration. — Cela découle des résultats correspondants sur les limites, c'est-à-dire des théorèmes 4.31, 4.36 et 4.34. □

Exemple 4.46. — Passons à l'application *racine carrée* définie de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ par $x \mapsto \sqrt{x}$. Nous allons distinguer deux cas suivant que $a = 0$ ou $a \neq 0$

Étude préliminaire. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$ et $x \in \mathbf{R}$. On peut majorer $|\sqrt{x} - \sqrt{a}|$ de la façon suivante :

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}. \tag{43}$$

D'autre part, on a l'inégalité $\sqrt{x} + \sqrt{a} \geqslant \sqrt{a}$.

Preuve de la limite. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$ et soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. On pose

$$\eta = \varepsilon\sqrt{a}.$$

Ce nombre est bien strictement positif. Soit $x \in \mathbf{R}_+$ tel que $|x - a| < \eta$. Donc, en reprenant (43),

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| \leqslant \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leqslant \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}}\eta = \varepsilon.$$

En conclusion, on a démontré que, pour tout $a \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\sqrt{x} \xrightarrow[x \to a]{} \sqrt{a}.$$

Traitons maintenant le cas où $a = 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, posons $\eta = \varepsilon^2$. Soit $x \in \mathbf{R}_+$ tel que $|x - 0| < \eta$ alors, comme la racine carrée est une application strictement croissante, on a les inégalités

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = |\sqrt{x}| < \sqrt{\eta} = \varepsilon.$$

Donc

$$\sqrt{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \sqrt{0}.$$

Ceci conclut la démonstration de la continuité de l'application racine carrée.

Rappelons qu'une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dite polynomiale s'il existe un entier d et $d + 1$ nombres réels $a_0, \ldots, a_d$ de sorte que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_0.$$

Proposition 4.47

Une fonction polynomiale est continue.

Démonstration. — Démontrons tout d'abord par récurrence sur d que pour tout $d \in \mathbf{N}$ l'application $P_d : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $x \mapsto x^d$ est continue. Si $d = 0$ ou $d = 1$ cela résulte de l'exemple 4.44. Supposons le résultat pour $d-1$. Alors P_d est le produit des applications $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$ et P_{d-1}. Cette dernière est continue par hypothèse de récurrence et le produit est continu par la proposition 4.45. Ceci prouve le résultat pour d. Par récurrence, l'application P_d est continue pour tout $d \in \mathbf{N}$.

Soit f une fonction polynomiale. Soient $d \in \mathbf{N}$ et $a_0, \dots, a_d \in \mathbf{R}$ de sorte que l'assertion (**??**) soit vérifiée. On va démontrer par récurrence sur d que f est continue. Si $d = 0$ la fonction est constante et donc continue. Supposons le résultat démontré pour $d-1$. Par hypothèse de récurrence la fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ par

$$x \mapsto a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_0$$

est continue. Comme f est la somme de cette fonction et de la fonction $a_d P_d$, elle est continue, ce qui prouve le résultat pour d. Par récurrence le résultat vaut pour tout $d \in \mathbf{N}$. □

4.10. Application : la notion de dérivée. — Vous connaissez la notion de dérvée depuis la première. Elle se définit en termes de limites :

Définition 4.48

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie $\mathscr{D}_f$ de $\mathbf{R}$. Soit $a \in \mathscr{D}_f$ tel que a soit adhérent à $\mathscr{D}_f - \{a\}$. On dit que la fonction f est *dérivable* en a si l'application de $\mathscr{D}_f - \{a\}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$x \longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite en a. Dans ce cas, on note

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Le nombre réel $f'(a)$ s'appelle le *nombre dérivé* de f en a.

Définition 4.49

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie $\mathscr{D}_f$ de $\mathbf{R}$. On suppose que tout élément de $a \in \mathscr{D}_f$ est adhérent à $\mathscr{D}_f - \{a\}$. On dit que f est dérivable si f est dérivable en tout point $a \in \mathscr{D}_f$. L'application de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbf{R}$ définie par $x \mapsto f'(x)$ s'appelle la *fonction dérivée* de f (ou plus simplement la *dérivée* de f).

Fiche de révision

4.1. Réels, intervalles ouverts. —
inégalités triangulaires : $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ et $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$.
I intervalle ouvert de $\mathbf{R}$: $\exists a, b \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, I =]a, b[$
dans ce cas $\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I$
a *approximation* de b à ε près si $|a-b| < \varepsilon$

4.2. Limite d'une suite. —

— Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ si

pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n > n_0$ on a $u_n \in I$.

ou, de façon équivalente,

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \ \exists n_0 \in \mathbf{N}, \ \forall n \in \mathbf{N}, \ (n \geqslant n_0) \implies |u_n - \ell| < \varepsilon \ .$$

On note alors

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \text{ou bien} \ \lim_{n\to\infty} u_n = \ell \ .$$

— limite $+\infty$:

$$\forall M \in \mathbf{R}, \ \exists n_0 \in \mathbf{N}, \ \forall n \in \mathbf{N}, \ (n \geqslant n_0) \implies u_n > M \ .$$

— si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite (finie ou infinie), alors celle-ci est unique.

— $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *convergente* si elle admet une limite dans $\mathbf{R}$,
$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *divergente* si elle admet une limite infinie ou si elle n'admet pas de limite.

— si $\exists \phi, \psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissantes tq $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ et $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$ avec $\ell_1 \neq \ell_2$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'admet aucune limite.

— si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$, alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1+\ell_2$ et $(u_nv_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1\ell_2$.

— si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbf{R}^*$, alors $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\ell}$.

— *Théorème des gendarmes.* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}, (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suites réelles. Si

(i) $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$;

(ii) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Alors $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

4.3. Limites de fonctions en un point. —

— pour $\mathscr{D} \subset \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$ *adhérent* à $\mathscr{D}$ si $\exists (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathscr{D}$ tq $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ a.

— a adhérent à $\mathscr{D}_f$, $\ell \in \mathbf{R}$. f *a pour limite* ℓ *en* a si

pour tout intervalle ouvert J contenant ℓ, il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(I \cap \mathscr{D}_f) \subset J$.

ou, de façon équivalente,

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On note alors

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\ .$$

— f tend vers ℓ en a si et seulement si $\forall (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs de $\mathscr{D}_f$ et tendant vers a, $(f(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ.

— f et g des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$. a adhérent à $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$. Si

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell',$$

alors

$$(f+g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell + \ell' \quad \text{et} \quad (fg)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\,\ell'.$$

— f, g deux fonctions tq $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$. a adhérent à $\mathscr{D}_f$, $b, \ell \in \mathbf{R}$. Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{y\to b} g(y) = \ell\ ,$$

alors

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \ell\ .$$

— f et g définies sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$, alors f/g est définie sur $\{\, x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g \mid g(x) \neq 0 \,\}$. Pour a adhérent à $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$, $\ell \in \mathbf{R}$, $\ell' \in \mathbf{R}^*$. Si

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell'.$$

Alors a est adhérent à $\mathscr{D}_{f/g}$ et

$$\frac{f}{g}(x) \xrightarrow[x\to a]{} \frac{\ell}{\ell'}.$$

— *Théorème des gendarmes.* $f, g, h : I \to \mathbf{R}$, a adhérent à I. Si

(i) $\mathscr{D}_f \subset \mathscr{D}_g \cap \mathscr{D}_h$;

(ii) $\forall x \in I \cap \mathscr{D}_f, \quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$;

(iii) g et h admettent la même limite ℓ en a.

Alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

4.4. Continuité. —

— f est *continue* si, pour tout $a \in \mathscr{D}_f$, on a

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a) \ .$$

— La somme, le produit et le quotient de fonctions continues sont continues. La composée d'applications continues est continue.

4.5. Dérivée. — f est *dérivable* en a si l'application de $\mathscr{D}_f - \{a\}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$x \longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite en a. Dans ce cas, on note

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Le nombre réel $f'(a)$ s'appelle le nombre *dérivé* de f en a.

Entraînement

Réels et approximation

Exercice 4.1. (*)

Dans chacun des cas suivants, dire si on a bien une approximation avec la marge indiquée, ou sinon la corriger.

(a) $3,14$ est une approximation de π à 0,01 près.

(b) $3,1316$ est une approximation de π à 0,001 près.

(c) $3,1316$ est une approximation de π à 10^{-5} près.

(d) $1,41$ est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

(e) $2,72$ est une approximation de e à 10^{-2} près.

Exercice 4.2. (*) Donner l'ensemble des points adhérents aux ensembles suivants :

(a) $[0,1[$,

(b) $[0,1]$,

(c) $]-1,0[\cup]0,1[$,

(d) $\mathbf{Z}$,

(e) $]0,1[\cap\mathbf{Q}$.

Limites de suites

Exercice 4.3. (*)

Pour chacune des suites suivantes, trouver deux entiers N_{10} et N_{100} tels que les assertions

$$\forall n \geq N_{10}, |u_n| < \frac{1}{10}$$
$$\forall n \geq N_{100}, |u_n| < \frac{1}{100}$$

soient vraies.

(a) $u_n = \dfrac{1}{n}$,

(b) $u_n = \dfrac{1}{n^2}$,

(c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$,

(d) $u_n = 2^{-n}$,

(e) $u_n = 10^{-n}$,

(f) $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$,

(g) $u_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^{-n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$,

(h) $u_n = \dfrac{\cos(n)}{3^n}$.

Exercice 4.4. (*/)**

Pour chacune des suites suivantes et pour tout réel strictement positif ε, trouver un entier N_ε tel que l'assertion

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |u_n| < \varepsilon$$

soit vraie.

(a) $u_n = \dfrac{1}{n}$,

(b) $u_n = \dfrac{1}{n^2}$,

(c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$,

(d) $u_n = 2^{-n}$,

(e) $u_n = 10^{-n}$,

(f) $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$,

(g) $u_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^{-n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$,

(h) $u_n = \dfrac{\cos(n)}{3^n}$.

Exercice 4.5. (**)

Pour chacune des suites suivantes, dire si la suite est périodique, majorée, minorée, bornée, convergente, si elle tend vers $\pm\infty$, ou si elle diverge (démontrez toutes vos réponses). Si elle est convergente, déterminer sa limite.

(a) $u_n = (-1)^n$,

(b) $u_n = \dfrac{1}{n}$,

(c) $u_n = \dfrac{1}{n^2}$,

(d) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$,

(e) $u_n = (-1)^n$,

(f) $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$,

(g) $u_n = \cos(n)$,

(h) $u_n = 2^{-n}$,

(i) $u_n = n + (-1)^n$,

(j) $u_n = n + (-1)^n n$,

(k) $u_n = \dfrac{n+1}{n^2}$.

(l) $u_n = \dfrac{2n^2+n+3}{n^2}$.

Exercice 4.6. (*)

Montrer que si ℓ est un nombre réel, et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite tendant vers ℓ, alors on peut en déduire des approximations de ℓ aussi bonnes que l'on veut.

Exercice 4.7. (*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs entières. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors elle est constante à partir d'un certain rang (ce qu'on peut traduite par l'assertion $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n = u_{n_0}$).

Exercice 4.8. (**)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs réelles.

— Montrer que si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont bornées, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

— Si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle nécessairement convergente ?

— Montrer que si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes et admettent la même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers ℓ.

— Montrer que si les trois suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

Exercice 4.9. (**) *Le nombre d'or*

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   La solution positive, notée ϕ, est appelée « nombre d'or ».
2. Démontrer qu'on a $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.
   On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme suit. On pose $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $|u_{n+1} - \phi| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - \phi|$. (Utiliser la question 2.)
5. En déduire, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a
$$|u_n - \phi| \leqslant (\frac{4}{9})^n .$$
6. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
7. Déterminer un entier n tel que u_n est une approximation de ϕ à 10^{-6} près.

Exercice 4.10. (**) *Racines carrées, méthode égyptienne*

On présente un algorithme pour obtenir des approximations de racines carrées. Soit a un nombre réel plus grand que 1 dont on cherche à déterminer la racine carrée. On suppose qu'on sait déterminer la partie entière $\lfloor\sqrt{a}\rfloor$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme suit : on part de $u_0 = \lfloor\sqrt{a}\rfloor + 1$, et on définit par récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2}$.

1. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et qu'on a $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} > \sqrt{a}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Montrer qu'on a $|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant \dfrac{|u_n - \sqrt{a}|^2}{2\sqrt{a}}$.

3. En déduire que la suite u_n tend vers $\sqrt{a}$.
4. Déterminer un entier n tel que u_n est une approximation de $\sqrt{a}$ à 10^{-6} près.

Exercice 4.11. (**)
Soit u_0 un entier positif quelconque. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n + 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ u_n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle croissante ? décroissante ?
2. Montrez que, pour toute valeur initiale $u_0 \in \mathbf{N}^*$, l'assertion

$$\exists N \in \mathbf{N}, u_N = 1.$$

   est vraie.

(Si on remplace $u_n + 1$ par $3u_n + 1$ dans la définition, alors c'est un problème ouvert de savoir si l'assertion est vraie. Cela s'appelle le *problème de Syracuse*.)

Limites de fonctions

Exercice 4.12. (**)
Dans cet exercice, on note f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto x^2$.

1. Soient a, b des nombres réels tels que $a < b$.
   (a) Trouver un nombre réel $C_{a,b}$ dépendant uniquement de a et de b tel que
   $$\forall x, y \in [a, b], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C_{a,b}|x - y|.$$
   (b) On admet que $\pi \in [3, 4]$. Combien de décimales de π suffit-il de connaître pour calculer π^2 avec une erreur $< 10^{-5}$?
   (c) Démontrer en utilisant la définition de la limite que la restriction de f à l'intervalle $[a, b]$ est continue.
2. Existe-t-il une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que
   $$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|?$$
3. L'application f est-elle continue ?

Exercice 4.13. (**) Dans cet exercice, on note f l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto x^3$.

1. Soient x et y des nombres réels. Développer et simplifier l'expression
   $$(x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

2. Soit M un nombre réel *strictement positif.* À l'aide de la question précédente, démontrer l'assertion suivante
$$\forall x, y \in [-M, M], \quad |x^3 - y^3| \leqslant 3M^2|x - y|.$$
3. On admet que $\pi \leqslant 4$. On suppose que x est un nombre réel tel que $|x - \pi| < 10^{-6}$. Majorer l'erreur commise en utilisant x^3 comme valeur approchée de π^3.
4. Démontrer, *en utilisant la définition d'une limite*, que pour tout $a \in \mathbf{R}$, x^3 tend vers a^3 quand x tend vers a. (Indication : on pourra prouver que si $|x - a| < 1$ alors $|x| \leqslant |a| + 1$ et utiliser la question 2).

Exercice 4.14. (**)

Dans cet exercice, on note f la fonction de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Soient a, b des nombres réels tels que $0 < a < b$.
   (a) Trouver une nombre réel $C_{a,b}$ dépendant uniquement de a et de b tel que
   $$\forall x, y \in [a, b], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C_{a,b}|x - y|.$$
   (b) On admet que $\pi \in [3, 4]$. Combien de décimales de π suffit-il de connaître pour calculer $\frac{1}{\pi}$ avec une erreur $< 10^{-5}$?
   (c) Démontrer en utilisant la définition de la limite que la restriction de f à l'intervalle $[a, b]$ est continue.
2. Existe-t-il une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que
$$\forall x, y \in \mathbf{R}^*, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|?$$
3. L'application f est-elle continue sur son domaine de définition ?

Exercice 4.15. (**)

On note f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer l'ensemble A des solutions de l'équation $f(x) = 1$.
3. Déterminer l'ensemble B des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4. Démontrer que 0 est adhérent à chacun des ensembles A et B.
5. Démontrer que f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 4.16. (**)

Soit f une fonction à valeur réelle définie sur une partie $\mathscr{D}_f$ de $\mathbf{R}$. On désigne par a un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}_f$. Soit $l \in \mathbf{R}$.

1. Démontrer que, si f admet pour limite l en a, alors

$$\exists M \in \mathbf{R},\ \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x-a| < \eta \Longrightarrow f(x) < M. \tag{44}$$

   Une fonction qui vérifie (44) est dite *localement majorée au voisinage de a*. (Indication : on pourra démontrer que $M = l + 1$ convient).

2. De même, démontrer que si f admet pour limite l en a alors

$$\exists m \in \mathbf{R},\ \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x-a| < \eta \Longrightarrow f(x) > m.$$

3. On suppose que la fonction f est donnée par $x \mapsto \frac{1}{x}(\sin(1/x) + 1)$.
   (a) Donner dans ce cas le domaine de définition de f.
   (b) Démontrer que f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 4.17. (**)

Calculer les limites suivantes (si elles existent) :

1. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3x}{1-x^3}\right)$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$, on pourra faire le changement de variable $y^6 = 1 + x$

Exercice 4.18. (***)

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. On suppose que $f(I) \subset I$ et que f est continue. Soit $a \in I$. On note $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ l'unique suite d'éléments de I qui vérifie les conditions suivantes

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite $\ell \in I$, alors $f(\ell) = \ell$.

Exercice 4.19. (***)

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. En utilisant uniquement la définition de dérivabilité donnée dans le cours, émontrer que l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $x \mapsto x^n$ est dérivable. Calculer sa dérivée.
2. Démontrer que toute fonction polynomiale est dérivable et donner une formule pour calculer sa dérivée.

Compléments

Ce paragraphe de compléments est réservé à une seconde lecture.

4.1. Achille et la tortue. — La notion de limite a connu un processus de maturation particulièrement long et n'a été formalisée correctement qu'au dix-neuvième siècle. Les difficultés pour aborder cette notion sont mises en relief dans la philosophie grecque avec les paradoxes de Zénon, né vers l'an -490. La célèbre paradoxe d'Achille et de la tortue peut être décrit ainsi. Le héros grec Achille faisant une course contre une tortue lui accorde une certaine distance d'avance. Zénon prétend alors qu'Achille ne peut rattraper la tortue : en effet, le temps qu'Achille arrive au point de départ de la tortue celle-ci a pu avancer de quelques mètres ; mais lorsqu'Achille aura parcouru ces quelques mètres, la tortue aura a nouveau avancée et ainsi de suite. Notons que sur la figure 18, il s'agit d'un Achille peu agile puisque qu'il ne va que trois fois plus vite que

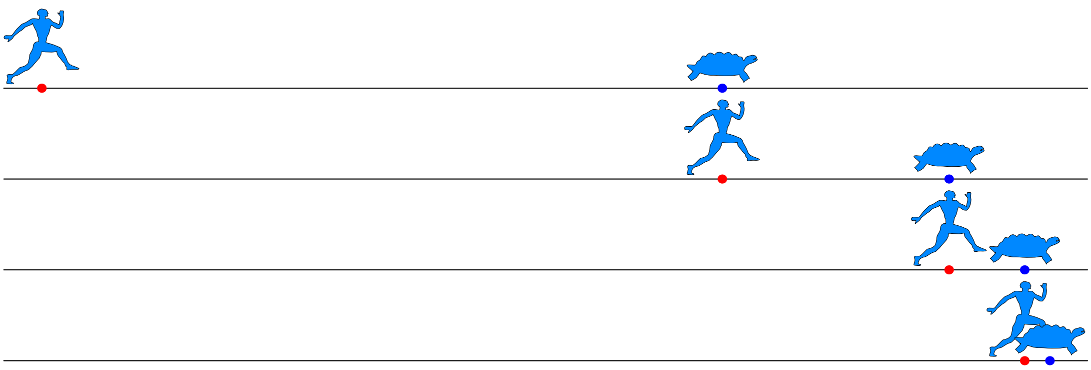


Figure 18. Achille et la tortue

la tortue.

Le même problème se pose pour les aiguilles d'une horloge : on suppose que les aiguilles des heures et des minutes ont chacune une vitesse de rotation constante. À midi tapant, elles sont parfaitement superposées. Elles seront à nouveau superposées à minuit exactement, mais à quelle heure de l'après-midi sont-elles exactement superposées pour la première fois ? En une heure, la grande aiguille sera exactement là ou la petite se trouvait à midi, mais entretemps l'aiguille des heures s'est déplacée sur le chiffre 1. Cinq minutes plus tard, la grand aiguille est sur le chiffre 1, mais la grande aiguille s'est également déplacée à un endroit qui sera atteint par la l'aiguille des minutes 5/12-ème de minute plus tard, etc. Le temps nécessaire pour que les aiguilles se superposent

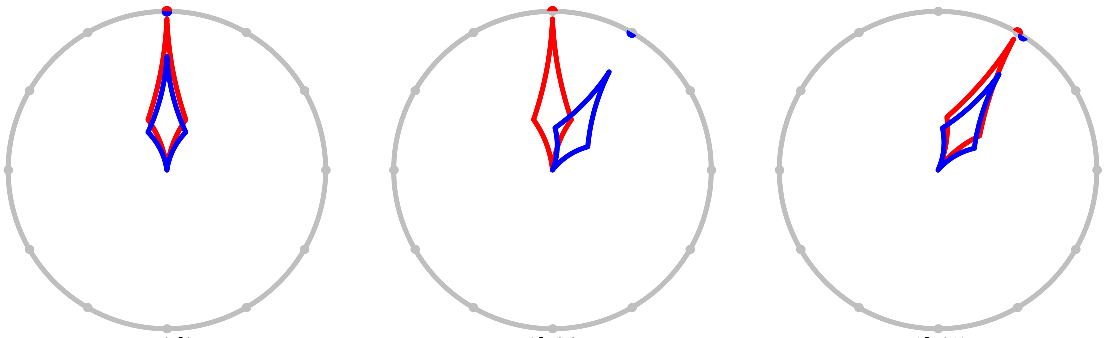


FIGURE 19. L'horloge

à nouveau est donc (en heures) :

$$1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \dots \tag{45}$$

Une autre façon de mettre en équation ce problème est d'écrire à l'instant t (en utilisant l'heure comme unité) l'angle Θ_t (resp. θ_t) donnant la position de la grande (resp. . petite) aiguille. En radians, ces positions sont

$$\begin{cases} \Theta_t = \frac{\pi}{2} - 2\pi t \\ \theta_t = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{12} t \end{cases}$$

Les aiguilles sont superposées quand la différence entre ces deux angles est un multiple de 2π, autrement dit lorsqu'on a la relation

$$\Theta_t - \theta_t = 2\pi m$$

pour un entier $m \in \mathbf{Z}$. On obtient l'équation

$$\left(-2\pi - \frac{-2\pi}{12}\right) t = 2\pi m$$

qui se simplifie en

$$t = -\frac{12}{11} m$$

ce qui assure que la première solution strictement positive est $\frac{12}{11}$-ème d'heure, ce qu'on peut aussi voir sans équations en notant qu'entre midi et minuit, la grande aiguille fait 12 fois le tour du cadran et la petite une fois.

Il résulte de ces raisonnements que la somme *infinie* donnée dans (45) doit valoir exactement $\frac{12}{11}$. Prenons les m premiers termes de cette somme, en utilisant une formule du chapitre **??**, on obtient l'égalité

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{12^k} = \frac{1-\frac{1}{12^m}}{1-\frac{1}{12}} = \frac{12}{11}\left(1-\frac{1}{12^m}\right)$$

qui tend bien vers $\frac{12}{11}$ et les différentes approches au problème sont cohérentes[10].

4.2. Newton et le calcul différentiel. — L'objectif de Newton était de déduire les lois deKépler décrivant les mouvements des planètes des lois de la physique dont il est l'inventeur. Pour atteindre cet objectif il a été amené à développer des concepts mathématiques de calcul différentiel. Le premier chapitre de son œuvre maîtresse, *PhilosophiæNaturalis Principia Mathematica* (1687) contient en particulier une notion

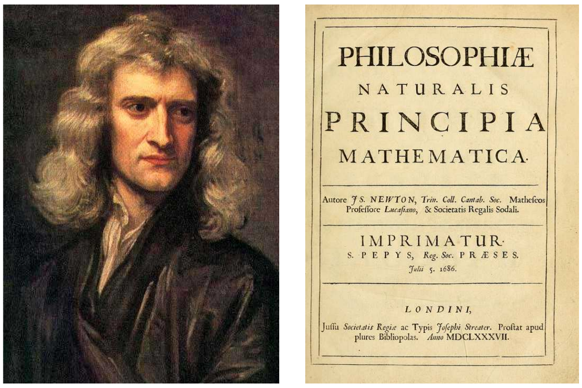


FIGURE 20. Isaac Newton et les Principia

concernant des quotients ultimes, avec lesquels il définit la dérivée, qu'il décrit ainsi : « Ces quotients ultimes [...] ne sont pas réellement des quotients de quantités ultimes, mais des limites [...] qui peuvent être approchées si bien que leur différence est plus petite que n'importe quelle quantité [...] ». Notons que Leibniz, contemporain de Newton et qui développe en même temps que lui les bases du calcul différentiel introduit des notations dx pour désigner des « infiniments petits ».

Ces définitions intuitives mais imprécises suffisent au contemporains de Newton pour découvrir de nombreux concepts fondamentaux en analyse et pour résoudre de nombreux problèmes de mécanique.

10. Nous laissons en exercice au lecteur la recherche de l'instant où Achille rattrape la tortue.

La définition de Newton est proche de celle donnée dans l'Encyclopédie par D'alembert en 1754 : « On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur quand la seconde peut s'approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche ; en sorte que la différence d'une pareille quantité à la limite est absolument inassignable. »

Notons toutefois que la définition de d'Alembert ne semble pas laisser la possibilité que la valeur qui tend vers la limite soit tantôt plus petite, tantôt plus grande que la limite.

4.3. Cauchy, Weierstrass, les ε et les δ. — Augustin-Louis Cauchy dans son cours d'analyse pour les élèves de Polytechnique formalise un certain nombre de raisonnements d'analyse qui l'amènent à utiliser –sans l'expliciter– une notion de limite très proche de notre définition moderne.

Mais c'est à Weierstrass qu'on attribue la définition correcte de limite avec les ε et les δ (noté η dans ces notes).

La difficulté conceptuelle se comprend peut-être mieux en termes de calcul de valeur approchée d'une fonction en un point : si on veut connaître la valeur de e^π avec une précision de 10 chiffres après la virgule, combien faut-il connaître de décimales de π ? Autrement dit la contrainte qui nous est donnée, c'est le nombre ε qui décrit l'erreur commise sur la valeur de la fonction. Ce que notre raisonnement doit démontrer c'est l'existence d'un nombre η (qui en général dépend de la fonction et du ε qui nous est donné) qui donne la précision requise sur le paramètre.

En un certain sens, si une fonction n'est pas continue, il est impossible à une calculatrice de calculer sa valeur à proximité des points de discontinuité. Notons par exemple E l'application qui à un nombre réel x associe sa *partie entière*, c'est à dire le plus grand entier $n \leqslant x$. L'application $t \mapsto E(\tan(t))$ n'est pas continue en $\pi/4$. Si vous prenez

$$t = 0.78539816339744830961566084581987572 1\ldots$$

vous ne savez pas à 1 près la valeur de l'application en t !

Géométrie

Pierre Dehornoy, d'après Agnès Coquio, Eric Dumas, Emmanuel Peyre et Bernard Ycart

Ce chapitre contient des rappels de géométrie du plan et de l'espace. On étudie d'abord la géométrie vectorielle, c'est-à-dire les vecteurs, dans $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$. Puis on étudie la géométrie affine, c'est-à-dire les points et les ensembles de points. Enfin on introduit la notion de transformation du plan, et utilise les nombres complexes pour les coder.

Cours

5.1. Géométrie vectorielle euclidienne. —

5.1.1. *Généralités en dimension quelconque.* — On a vu au chapitre précédent la notion d'ensemble-produit, et donc on sait ce que sont $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$, et en fait $\mathbf{R}^n$ pour tout entier naturel n. Les éléments de ces ensembles sont donc des couples, des triplets, ou des n-uplets de nombres réels, respectivement. Ainsi $(1, 2)$ est un élément de $\mathbf{R}^2$, tandis que $(-1, 0, 3)$ est un élément de $\mathbf{R}^3$, et que $(1, 4, -2, \pi, \sqrt{2})$ est un élément de $\mathbf{R}^5$.

Sur ces ensembles, il y a deux opérations naturelles :

- l'*addition*, qui prend deux n-uplets et ajoute les coordonnées correspondantes, ainsi pour $(u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n$, on a

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n),$$

- la *multiplication par un nombre réel*, qui multiplie toutes les coordonnés par un même nombre, ainsi pour $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\lambda.(u_1, u_2, \dots, u_n) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n).$$

Remarquez qu'on n'a pas parlé de soustraction. C'est simplement qu'on note $\vec{u} - \vec{v}$ pour $\vec{u} + (-1).\vec{v}$.

Définition 5.1 (Espace vectoriel réel)

Pour tout entier naturel n, l'espace $\mathbf{R}^n$ muni des deux opérations "somme de deux n-uplets" et "multiplication par un réel" est appelé *espace vectoriel réel de dimension n*.

Ses éléments sont appelés *vecteurs*, et, par contraste, les éléments de $\mathbf{R}$ sont appelés *scalaires*.

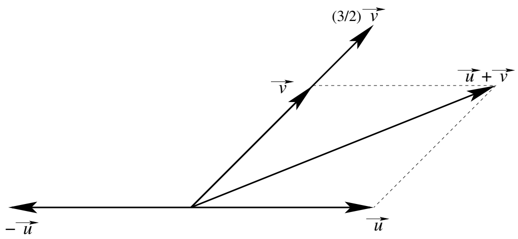


FIGURE 21. Addition de deux vecteurs et multiplication d'un vecteur par un réel.

Lorsqu'il sont notés abstraitement (par un symbole et non par leurs coordonnées), on met en général une flèche au-dessus des vecteurs, comme dans $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Cette définition correspond bien à ce que vous connaissez des vecteurs : étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on sait bien faire la somme $\vec{u} + \vec{v}$ et considérer des multiples $2\vec{u}$ et $-5\vec{v}$.

Le vecteur $(0, 0, \ldots, 0)$ est appelé *vecteur nul*, on le note $\vec{0}$.

Définition 5.2 (Colinéarité)

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda.\vec{v}$, ou que $\vec{v} = \vec{0}$.

Exemples 5.3. — Les vecteurs $(1, -1)$ et $(1, 1)$ ne sont pas colinéaires.

Les vecteurs $(1, 0, 2)$ et $(-2, 0, -4)$ sont colinéaires.

Définition 5.4 (Droite vectorielle)

L'ensemble des multiples d'un vecteur non nul $\vec{u}$ est appelé *droite vectorielle*. Si $\vec{\mathscr{D}}$ est cette droite, alors $\vec{\mathscr{D}} = \{\lambda.\vec{u}\,;\, \lambda \in \mathbf{R}\}$.

La définition ci-dessus est appelée *définition paramétrique d'une droite vectorielle*, puisqu'elle décrit tous les éléments de la droite à l'aide du paramètre λ.

Exemple 5.5. — La droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, -2)$ est l'ensemble $\{(x, -2x)\,;\, x \in \mathbf{R}\}$. Le vecteur $(-5, 10)$ appartient à cette droite, tandis que $(3, 6)$ ne lui appartient pas.

La notion de droite peut se généraliser si on part de plusieurs vecteurs :

Définition 5.6 (Combinaison linéaire)

Soit k et n deux entiers, et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ des vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ est un vecteur de la forme

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{u}_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\vec{u}_i\ ,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sont des nombres réels, appelés *coefficients* de la combinaison linéaire.

L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ est appelé *sous-espace engendré par* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$. On le note $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$.

Exemples 5.7. — Dans $\mathbf{R}^2$, prenons $\vec{u}_1 = (2, 1)$ et $\vec{u}_2 = (3, 2)$, alors le vecteur $\vec{v} = (1, 0)$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ puisqu'on a $\vec{v} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$.

Dans $\mathbf{R}^3$, prenons $\vec{u}_1 = (2, 1, 0)$ et $\vec{u}_2 = (3, 2, 0)$, alors le vecteur $\vec{v} = (0, 0, 1)$ n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2$. Pour s'en convaincre (dans ce cas particulier), on remarque que la troisième coordonnée de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ étant nulle, la troisième coordonnée de n'importe quelle combinaison linéaire sera aussi nulle, ce qui n'est pas le cas pour $\vec{v}$.

On remarque qu'une famille de deux vecteurs est libre si et seulement les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est faux à partir de trois vecteurs : pour deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires, les trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{v}$ forment une famille liée, alors qu'ils ne sont pas colinéaires.

La notion de combinaison linéaire permet de définir les deux notions importantes suivantes, qui mènent ensuite à la notion de base d'un espace vectoriel.

Définition 5.8

Soit k et n deux entiers, et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ des vecteurs de $\mathbf{R}^n$.

1. On dit que le k-uplets de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$ forme une *famille libre* si toute combinaison linéaire nulle est à coefficients nuls :
$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0\ .$$
2. On dit que le k-uplets de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$ forme une *famille génératrice* si tout vecteur de $\mathbf{R}^n$ peut être écrit comme une combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$:
$$\forall \vec{u} \in \mathbf{R}^n, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}, \quad \vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{u}_i\ .$$

Un résultat fondamental, qui sera démontré dans le cours d'algébre linéaire au 2e semestre est :

Théorème 5.9 (admis)

Soit n un entier.

1. Toute famille libre de $\mathbf{R}^n$ est de cardinal au plus n. Si une famille libre est de cardinal exactement n, alors elle est aussi génératrice.
2. Toute famille génératrice de $\mathbf{R}^n$ est de cardinal au moins n. Si une famille génératrice est de cardinal exactement n, alors elle est aussi libre.

Ainsi il existe des familles libres et génératrices, et elles sont de cardinal toujours n. On leur donne un nom :

Définition 5.10 (Base)

Soit n un entier. Une famille libre et génératrice de $\mathbf{R}^n$ est appelée *base de* $\mathbf{R}^n$ (on dit aussi *repère*).

Par le théorème précédent, une base de $\mathbf{R}^n$ est toujours de cardinal n.

Exemple 5.11. — Reprenons la famille $\vec{u}_1 = (2, 1)$ et $\vec{u}_2 = (3, 2)$ de $\mathbf{R}^2$. Elle est de cardinal 2. On vérifie qu'elle est libre, puisque $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que c'est une base, et en particulier que tout vecteur de $\mathbf{R}^2$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

La notion de produit scalaire permet des définitions simples des notions d'angles et de longueur. C'est cette notion de produit scalaire qui fait qu'on parle de géométrie vectorielle *euclidienne*.

Définition 5.12

Étant donnés deux vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathbf{R}^n$, leur *produit scalaire* est le nombre

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

Deux vecteurs sont dits *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul.

La norme $\|\vec{u}\|$ d'un vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est égale à la racine carrée du produit scalaire du vecteur avec lui-même, c'est-à-dire

$$\|\vec{u}\| := \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}.$$

Exemple 5.13. — On a $(2, 1)\cdot(-1, 3) = -2+3 = 1$, donc les vecteurs $(2, 1)$ et $(-1, 3)$ ne sont pas orthogonaux.

On a $(2, 1)\cdot(-1, 2) = -2+2 = 0$, donc les vecteurs $(2, 1)$ et $(-1, 2)$ sont orthogonaux.

On a $\|(1, 0, -2)\| = \sqrt{1^1 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 0 + 4} = \sqrt{5}$.

Notons que par application directe de la définition, le produit scalaire est *symétrique* au sens où $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$. Il est aussi *linéaire à gauche*, au sens où $(\vec{u_1}+\vec{u_2})\cdot\vec{v} = (\vec{u_1}\cdot\vec{v})+(\vec{u_2}\cdot\vec{v})$ et $(\lambda.\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$, et il est *linéaire à droite*, au sens où $\vec{u}\cdot(\vec{v_1}+\vec{v_2}) = (\vec{u}\cdot\vec{v_1})+(\vec{u}\cdot\vec{v_2})$ et $\vec{u}\cdot(\lambda.\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$. On dit alors qu'il est *bilinéaire*.

La norme vérifie aussi certaines propriétés qui découlent de sa définition (et en particulier du fait que le carré d'un nombre réel est toujours positif) : la norme est positive ou nulle pour tout vecteur et elle n'est nulle que si le vecteur est nul. En outre, elle vérifie l'égalité $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$ pour tous $\vec{u},\vec{v}$.

Le résultat suivant est très important au niveau théorique, puisqu'il permet de démontrer l'inégalité triangulaire 5.16.

Théorème 5.14 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Alors on a

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\ , \tag{46}$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

La preuve n'est pas si élémentaire, puisqu'elle utilise le discriminant des polynômes réels de degré 2. Elle peut être sautée en première lecteure. Elle est néanmoins très jolie (et un peu mystérieuse, car si la plupart des preuves de polycopié deviennent naturelles et presque évidentes après quelques années, l'auteur trouve toujours celle-ci un peu miraculeuse).

Démonstration. — Si $\vec{u}=\vec{0}$, les vecteurs sont colinéaires et $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = 0 = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$, ce qui démontre le résultat dans ce cas. Dans la suite, on suppose $\vec{u}\neq\vec{0}$. On considère alors l'application $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definie par

$$f(t) = \|t\vec{u}+\vec{v}\|^2$$

pour tout nombre réel t. Soit $t\in\mathbf{R}$. Calculons la valeur de $f(t)$ en utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire :

$$(t\vec{u}+\vec{v})\cdot(t\vec{u}+\vec{v}) = t^2(\vec{u}\cdot\vec{u}) + 2t(\vec{u}\cdot\vec{v}) + (\vec{v}\cdot\vec{v}).$$

Cette expression montre que f est une application polynômiale du second degré. Or en tout t elle prend une valeur positive ou nulle. Son discriminant ne peut pas être strictement positif, car sinon le polynôme aurait deux racines réelles distinctes entre lesquelles il prendrait des valeurs strictement négatives. Écrire que le discriminant est négatif ou nul donne :

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leqslant (\vec{u}\cdot\vec{u})\,(\vec{v}\cdot\vec{v})\ ,$$

soit

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2\ ,$$

ce qui entraîne (46). L'égalité a lieu si et seulement si le trinôme admet une racine double t, valeur pour laquelle $t\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur nul. □

La proposition précédente permet de donner une définition d'angle entre deux vecteurs. En effet, puisque $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$, on a $-\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$, et donc il existe un unique $t \in [-1, 1]$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = t\,\|u\|\,\|v\|$. Ensuite, comme la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$ et va de 1 à -1, il existe donc un unique $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = t$.

Définition 5.15 (Angle géomètrique entre deux vecteurs)

La *mesure de l'angle géométrique* de deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ est l'unique réel α appartenant à $[0, \pi]$ tel qu'on a
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|u\|\,\|v\| \cos(\alpha).$$

Il n'est pas clair que la définition précédente coïncide avec la notion classique d'angle. C'est bien le cas, mais ce fait n'est pas évident. Pour le démontrer il faudrait parler de bases orthonormées et de changement de base orthonormée pour vérifier d'une part que le produit scalaire ne dépend pas de la base, et donc que l'angle géométrique non plus, et d'autre part voir que dans une base orthonormée bien choisie, le nombre α sus-défini coïncide bien avec l'angle déjà connu. Nous ne le ferons pas ici.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz a aussi une conséquence pour les longueurs de vecteurs.

Corollaire 5.16 (Inégalité triangulaire)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de E. Alors
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \tag{47}$$
avec égalité si et seulement si $\vec{u} = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Démonstration. — En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a les relations
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2 \leqslant \|\vec{u}\|^2+2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|+\|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)^2.$$

L'égalité $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ implique l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et donc que les vecteurs sont colinéaires. Donc $\vec{u} = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Or, dans ce cas, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \geqslant 0$, ce qui donne $\lambda\|\vec{u}\|^2 \geqslant 0$ et donc $\lambda \geqslant 0$. □

Le produit scalaire permet de définir des bases plus intéressantes que les autres :

Définition 5.17 (Base orthonormée)

On dit qu'une famille $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ est *orthonormée* si elle vérifie

— $\forall i \in [\![1,k]\!],\ \|\vec{u}_i\| = 1$,

— $\forall i,j \in [\![1,k]\!],\ i \neq j \implies \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 1$.

Dans le cas $k = n$, on parle de *base orthonormée*.

Autrement dit, une base est orthonormée si chaque vecteur de base est de longueur 1 et si deux vecteurs distincts sont orhogonaux.

5.1.2. *Géométrie vectorielle euclidienne du plan.* — Voyons maintenant quelques notions spécifiques à l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$. Par habitude, on note plutôt (x, y) les coordonnées dans ce cas, et donc on notera plutôt $\vec{u} = (u_x, u_y)$.

Définition 5.18 (Déterminant de deux vecteurs du plan)

Étant donné deux vecteurs $\vec{u} = (u_x, u_y)$ et $\vec{v} = (v_x, v_y)$ de $\mathbf{R}^2$. Leur *déterminant*, noté $\mathrm{Dét}(\vec{u}, \vec{v})$, est le nombre réel

$$u_x v_y - u_y v_x.$$

Exemple 5.19. — On a $\mathrm{Dét}((2,1),(-1,3)) = 2 \times 3 - 1 \times (-1) = 7$.

Proposition 5.20 (Propriétés du déterminant)

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors on a

a) $\mathrm{Dét}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$,

b) $\operatorname{Dét}(\vec{v},\vec{u}) = -\operatorname{Dét}(\vec{u},\vec{v})$,

c) $\operatorname{Dét}(\lambda\vec{u},\vec{v}) = \lambda\operatorname{Dét}(\vec{u},\vec{v})$,

d) $\operatorname{Dét}(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = \operatorname{Dét}(\vec{u},\vec{v}) + \operatorname{Dét}(\vec{u},\vec{w})$.

Tout ceci se vérifie facilement à partir de la définition 5.18 du déterminant.

La propriété suivante est une façon simple de voir si deux vecteurs sont colinéaires, même si on peut souvent le voir très vite autrement. Son intérêt est surtout théorique.

Proposition 5.21

Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de $\mathbf{R}^2$. Ils sont colinéaires si et seulement si on a $\operatorname{Dét}(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

La proposition ci-dessus permet de donner une *équation implicite d'une droite vectorielle* : la droite engendrée par $\vec{u}$ est l'ensemble $\{\vec{v}\in\mathbf{R}^2 \mid \operatorname{Dét}(\vec{u},\vec{v}) = 0\}$.

Exemple 5.22. — Soit $u = (1,-2)$. Pour $\vec{v} = (v_x, v_y)$ un vecteur de $\mathbf{R}^2$, on a $\operatorname{Dét}(\vec{u},\vec{v}) = v_y+2v_x$. Par conséquent la droite engendrée par $\vec{u}$ est l'ensemble $\{(v_x,v_y)\in\mathbf{R}^2 \,|\, 2v_x+v_y = 0\}$.

Démonstration. — D'abord, si $\vec{v} = \vec{0}$, alors d'une part $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, et d'autre part, on a $v_{=}v_y = 0$, donc $\operatorname{Dét}(\vec{u},\vec{v}) = 0$. Ensuite, si $\vec{v}$ est non nul et si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Alors on a $\operatorname{Dét}(\vec{u},\vec{v}) = \operatorname{Dét}(\vec{u},\lambda\vec{v})= \lambda\operatorname{Dét}(\vec{u},\vec{u}) = \lambda\times 0 = 0$.

D'un autre côté si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, on peut écrire $\vec{u} = (u_x,u_y)$ et $\vec{v} = (v_x,v_y)$. Supposons u_x non nul. Alors il existe $\lambda\in\mathbf{R}$ tel que $v_x = \lambda u_x$. Dans ce cas, on a $v_y \neq \lambda u_y$, car sinon les deux vecteurs seraient colinéaires. On a alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{Dét}(\vec{u},\vec{v}) &= u_xv_y - u_yv_x \\
&= u_xv_y - u_y(\lambda u_x) \\
&= u_x(v_y-\lambda u_y) \neq 0.
\end{aligned}$$

Enfin, si u_x était nul, u_y ne pourrait l'être car le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs, et donc on peut appliquer le même argument en remplaçant u_x par u_y. □

En fait cette proposition peut être vue comme un cas particulier du théorème suivant qu'on ne démontrera pas.

Théorème 5.23 (Interprétation du déterminant dans le plan)

La valeur absolue du déterminant de deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de $\mathbf{R}^2$ est égale à l'aire du parallélogramme encadré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

FIGURE 22. La valeur absolue du déterminant est l'aire du parallélogramme.

D'après le théorème 5.9 et la définition 5.10, une famille de deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$ est libre forme une base. On en déduit donc que deux vecteurs non colinéaires de $\mathbf{R}^2$ forment toujours une base. Dans ce cas, toujours d'après le théorème 5.9, tout vecteur du plan peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux vecteurs de la base. Autrement dit, deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ tels que $\text{Dét}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ forment un repère, noté $(\vec{u}, \vec{v})$. On dit que le repère $(\vec{u}, \vec{v})$ est *direct* si $\text{Dét}(\vec{u}, \vec{v}) > 0$, et *indirect* si $\text{Dét}(\vec{u}, \vec{v}) < 0$.

L'angle géométrique entre deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ a été défini en 5.15 comme l'unique $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\alpha)\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$. Grâce au déterminant on peut raffiner cette notion :

Définition 5.24 (Angle orienté entre deux vecteurs du plan)

Étant donné deux vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}$ du plan, on appelle *angle orienté* entre $\vec{u}, \vec{v}$, noté $(\vec{u}, \vec{v})$, un réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\theta)\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ et $\text{Dét}(\vec{u}, \vec{v}) = \sin(\theta)\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$.

Par rapport à l'angle géométrique, on a mis une contrainte de signe en plus. Néanmoins, il n'est pas clair que les deux conditions sur $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ soient compatibles. En effet on doit toujours avoir $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$. Pour vérifier qu'un tel θ existe, il faut donc vérifier l'égalité

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \text{Dét}(\vec{u}, \vec{v})^2 = (\|\vec{u}.\|\vec{v}\|)^2 .$$

En termes de coordonnées, cela revient à l'égalité

$$(u_x v_x + u_y v_y)^2 + (u_x v_y - u_y v_x)^2 = (u_x^2 + u_y^2)(v_x^2 + v_y^2) \ ,$$

qui est bien toujours vraie.

On remarque que si l'angle géométrique est $\alpha \in [0, \pi]$, alors l'angle orienté est α ou $2\pi - \alpha$.

Étant donné un vecteur du plan, on peut vouloir trouver tout de suite un vecteur qui lui soit orthogonal. C'est facile :

Proposition 5.25

Soit $\vec{u} = (u_x, u_y)$ un vecteur non nul de $\mathbf{R}^2$. Alors le vecteur $\vec{u}'$ de coordonnées $(u_y, -u_x)$ est orthogonal à $\vec{u}$ et de même norme.

Démonstration. — C'est un calcul direct : on a $\vec{u} \cdot \vec{u}' = u_x u_y - u_y u_x = 0$, donc les vecteurs sont bien orthogonaux. De plus ils sont tous deux de norme $\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$. □

Notons qu'en général, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné est une droite vectorielle.

Proposition 5.26

Soit $\vec{u} = (u_x, u_y)$ un vecteur non nul de $\mathbf{R}^2$. Alors l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ est une droite vectorielle.

Réciproquement, pour toute droite vectorielle $\vec{\mathscr{D}}$, il existe un vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{\mathscr{D}} = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^2 \,|\, \vec{u} \cdot \vec{v} = 0\}$.

Démonstration. — Commençons par le sens direct. Notons $\vec{\mathscr{D}}'$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$, et notons $\vec{u}'$ le vecteur $(u_y, -u_x)$. D'après la proposition 5.25 le vecteur $\vec{u}'$ appartient à $\vec{\mathscr{D}}'$. Par linéarité du produit-scalaire, tout vecteur colinéaire à $\vec{u}'$ sera aussi orthogonal à $\vec{u}$. Il reste à montrer qu'il n'y a pas d'autre vecteur orthogonal à $\vec{u}$ que ceux de $\vec{\mathscr{D}}'$. Soit $\vec{v} = (v_x, v_y)$ un vecteur quelconque de $\vec{\mathscr{D}}'$. Comme $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux, ils forment un repère du plan, c'est-à-dire qu'on peut écrire $\vec{v}$ comme

$\lambda.\vec{u} + \mu.\vec{u}'$ pour deux réels λ, μ. On a alors

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{u} \cdot (\lambda.\vec{u} + \mu.\vec{u}') \\ &= \lambda\vec{u} \cdot \vec{u} + \mu\vec{u} \cdot \vec{u}' \\ &= \lambda\|u\|^2 + 0. \end{aligned}$$

Comme $\vec{v}$ appartient à $\vec{\mathscr{D}}$, cette quantité est nulle, et comme $\|u\|^2$ ne l'est pas, c'est qu'on a $\lambda = 0$, et donc $\vec{v} = \mu.\vec{u}'$.

Pour la réciproque, si $\vec{\mathscr{D}}$ est une droite vectorielle, par définition il existe un vecteur $\vec{u}'$ tel que $\vec{\mathscr{D}} = \{\lambda.\vec{u}'\,;\, \lambda \in \mathbf{R}\}$. Dans ce cas, on prend pour $\vec{u}$ le vecteur orthogonal à $\vec{u}'$ donné par la proposition 5.25. Alors on a $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$, et donc pour tout λ réel on a $\vec{u} \cdot (\lambda.\vec{u}) = 0$, donc $\vec{\mathscr{D}} \subset \{\vec{v} \in \mathbf{R}^2 \,|\, \vec{u} \cdot \vec{v} = 0\}$. □

5.1.3. *Géométrie vectorielle euclidienne de l'espace.* — Dans l'espace il y a encore la notion de droite vectorielle : c'est l'ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur donné. Mais étant donné deux vecteurs non colinéaires, ils vivent dans un plan particulier : le plan qu'ils engendrent.

Définition 5.27 (Plan vectoriel réel)

Étant donné deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de l'espace $\mathbf{R}^3$ non colinéaires, l'ensemble des vecteurs obtenus comme combinaison linéaire de $\vec{u}, \vec{v}$ est appelé *plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$*. Il s'agit de l'ensemble

$$\{\lambda.\vec{u} + \mu\vec{v}\,;\, \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}.$$

La définition précédente fournit une *définition paramétrique* d'un plan vectoriel, puisqu'elle décrit un plan vectoriel à partir de deux paramètres, ici λ et μ.

Pour obtenir une définition implicite, c'est-à-dire une équation, nous allons voir deux méthodes, en fait équivalentes. La première repose sur la notion de vecteur normal et de produit vectoriel. C'est la plus pratique et la plus facile à mettre en œuvre. La seconde repose sur la notion de déterminant. Elle est moins visuelle, mais se généralise mieux, d'où son intérêt théorique.

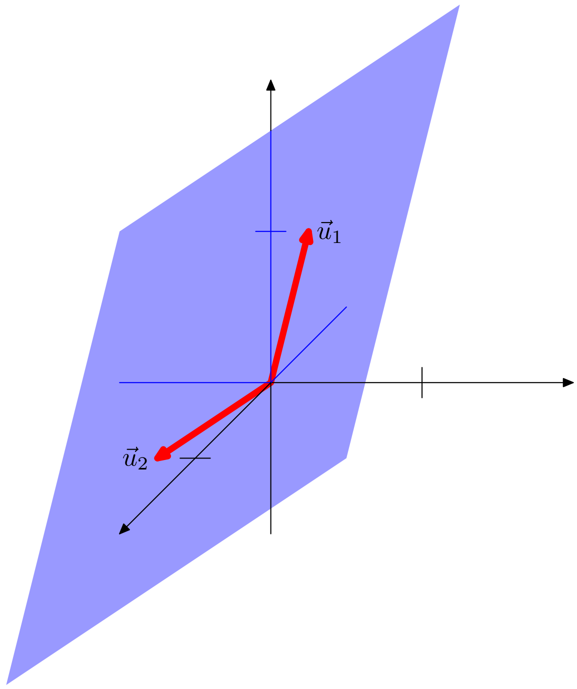


FIGURE 23. Plan vectoriel engendré par deux vecteurs

Définition 5.28 (Produit vectoriel)

Étant donné deux vecteurs $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ et $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ de l'espace $\mathbf{R}^3$. On définit leur *produit vectoriel*, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, comme le vecteur de coordonnées

$$(u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x).$$

Notez que pour se souvenir de ces formules, on peut se souvenir que pour la coordonnée x du produit vectoriel, il faut faire intervenir les coordonnées y et z de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il y a deux façons de les mélanger ($u_y v_z$ et $u_z v_y$). Il reste le signe : quand "on monte" de x vers y, ou de y vers z, ou de z vers x (en considérant que x est juste après z) alors le signe est positif, et quand "on descend" le signe est négatif.

Le produit vectoriel a plusieurs propriété intéresantes.

Proposition 5.29 (Propriétés du produit vectoriel)

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathbf{R}^3$. Alors on a

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires,
2. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

La première propriété donne une méthode pour voir si deux vecteurs de l'espace sont colinéaires.

Démonstration. — 1. Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, alors il est clair que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est nul. Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et non nuls, alors il existe λ réel tel que $\vec{u} = \lambda.\vec{v}$, c'est-à-dire $u_x = \lambda v_x, u_y = \lambda v_y, u_z = \lambda v_z$. Alors on a $u_x v_y - u_y v_x = \lambda v_x v_y - \lambda v_y v_x = 0$, et de même pour les deux autres coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Réciproquement, si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, alors on a $u_x v_y = u_y v_x, u_y v_z - u_z v_y = 0$, et $u_z v_x - u_x v_z = 0$. Si $\vec{u}$ est nul, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Sinon l'un parmi u_x, u_y, u_z est non nul, disons u_x. On a alors $v_y = (v_x/u_x)u_y$, $v_z = (v_x/u_x)u_z$, et évidemment $v_x = (v_x/u_x)u_x$. De ces trois équations on déduit $\vec{v} = (v_x/u_x).\vec{u}$, et donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. Il suffit de calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$. On a

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) &= u_x(u_y v_z - u_z v_y) + u_y(u_z v_x - u_x v_z) + u_z(u_x v_y - u_y v_x) \\ &= u_x u_y v_z - u_x u_z v_y + u_y u_z v_x - u_y u_x v_z + u_z u_x v_y - u_z u_y v_x = 0, \end{aligned}$$

et donc $\vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont orthogonaux. Le calcul est similaire pour montrer que $\vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont orthogonaux.

□

L'existence et le calcul du produit vectoriel donnent un moyen simple pour obtenir l'équation d'un plan vectoriel engendré par deux vecteurs :

Proposition 5.30 (Équation implicite du plan engendré par deux vecteurs)

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ non colinéaires. On note (p_x, p_y, p_z) les coordonnées de leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Alors le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble

$$\begin{aligned} & \{\vec{w} \in \mathbf{R}^3 \,|\, (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{r} = 0\} \\ = \; & \{(w_x, w_y, w_z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, p_x w_x + p_y w_y + p_z w_z = 0\}. \end{aligned}$$

Nous n'allons pas démontrer cette proposition : nous allons plutôt utiliser l'approche par le déterminant ci-dessous, et nous verrons cette proposition comme une autre version du corollaire 5.36 ci-dessous.

Voyons maintenant la seconde méthode pour déterminer l'équation d'un plan :

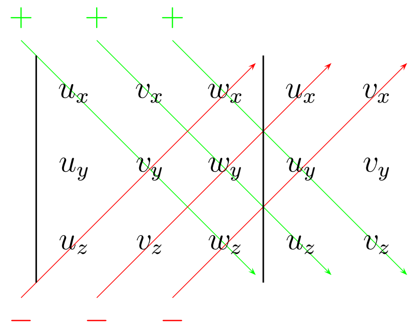
Définition 5.31 (Déterminant de 3 vecteurs de $\mathbf{R}^3$)

Étant donné trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace $\mathbf{R}^3$, de coordonnées respectives $(u_x, u_y, u_z), (v_x, v_y, v_z), (w_x, w_y, w_z)$, leur *déterminant* est le nombre réel

$$\mathrm{Dét}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) := u_x v_y w_z - u_x v_z w_y + u_y v_z w_x - u_y v_x w_y + u_z v_x w_y - u_z v_y w_x.$$

Cette formule compliquée sera justifiée (et généralisée en toute dimension) au second semestre, dans le cours d'algèbre linéaire.

Remarque 5.32. — Pour calculer le déterminant de trois vecteurs au brouillon, on peut utiliser la règle de Sarrus : on réécrit les deux premières colonnes de la matrice à la droite de celle-ci, puis on effectue tous les produits en diagonale. On affecte du signe $+$ les diagonales descendantes, du signe $-$ les diagonales montantes, et on ajoute le tout.



Le déterminant a plusieurs propriétés importantes qui en fait le caractérisent (c'est-à-dire que c'est la seule fonction ayant ces propriétés, à un multiple près).

Proposition 5.33 (Propriétés du déterminant en dimension 3)

1. Le déterminant est *multi-linéaire*, c'est-à-dire qu'on a
$$\begin{aligned}
\mathrm{Dét}(\lambda.\vec{u}+\mu.\vec{u'},\vec{v},\vec{w}) &= \lambda\,\mathrm{Dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+\mu\,\mathrm{Dét}(\vec{u'},\vec{v},\vec{w})\\
\mathrm{Dét}(\vec{u},\lambda.\vec{v}+\mu.\vec{v'},\vec{w}) &= \lambda\,\mathrm{Dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+\mu\,\mathrm{Dét}(\vec{u},\vec{v'},\vec{w})\\
\mathrm{Dét}(\vec{u},\vec{v},\lambda.\vec{w}+\mu.\vec{w'}) &= \lambda.\,\mathrm{Dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+\mu\,\mathrm{Dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w'}).
\end{aligned}$$
2. Le déterminant est *alterné*, c'est-à-dire qu'on a
$$\mathrm{Dét}(\vec{u},\vec{u},\vec{w})=\mathrm{Dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{v})=\mathrm{Dét}(\vec{w},\vec{v},\vec{w})=0.$$
3. Le déterminant est *antisymétrique*, c'est-à-dire qu'on a
$$\mathrm{Dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=-\,\mathrm{Dét}(\vec{v},\vec{u},\vec{w})=-\,\mathrm{Dét}(\vec{u},\vec{w},\vec{v})=-\,\mathrm{Dét}(\vec{w},\vec{v},\vec{u}).$$

Ces trois propritétés fondamentales se vérifient directement sur les formules définissant le déterminant.

Définition 5.34 (Coplanarité)

Soit $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$. On dit que les vecteurs *coplanaires* s'ils forment une famille liée, autrement dit s'il existe λ,μ,ν réels non tous nuls tels que $\lambda.\vec{u}+\mu.\vec{v}+\nu.\vec{w}=\vec{0}$.

En supposant $\lambda\neq 0$ et en divisant par λ, on voit que cela revient à écrire $\vec{u}=-(\mu/\lambda).\vec{v}-(\nu/\lambda).\vec{w}$, c'est-à-dire que $\vec{u}$ est situé dans le plan engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$. C'est ce qui explique le terme *coplanaire*.

L'intérêt du déterminant réside dans la proposition suivante.

Proposition 5.35 (Critère de coplanarité)

Soit $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Alors $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement on a
$$\mathrm{Dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0.$$

Démonstration. — Nous démontrons le sens direct, et laissons le sens indirect pour le cours d'algèbre linéaire du 2e semestre.

Supposons donc $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires. Quitte à échanger $\vec{u}$ avec $\vec{v}$ ou $\vec{w}$, on peut supposer $\lambda \neq 0$. Alors on trouve $\vec{u} = -(\mu/\lambda).\vec{v} - (\nu/\lambda).\vec{w}$. Par multi-linéarité du déterminant on a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dét}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \mathrm{Dét}(-(\mu/\lambda).\vec{v} - (\nu/\lambda).\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}) \\
&= -(\mu/\lambda)\,\mathrm{Dét}(\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}) - (\nu/\lambda)\,\mathrm{Dét}(\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}).
\end{aligned}$$

Par alternance du déterminant, les deux termes sont nuls, et donc on a bien $\mathrm{Dét}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$. □

De cette proposition, on déduit une *équation implicite du plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$* :

Corollaire 5.36 (Équation implicite du plan vectoriel engendré par deux vecteurs)

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbf{R}^3$. Alors le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble

$$\{\vec{w} \in \mathbf{R}^3 \mid \mathrm{Dét}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0\}.$$

Si $\vec{u}, \vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (u_x, u_y, u_z) et (v_x, v_y, v_z), cet ensemble admet la forme plus explicite

$$\{(w_x, w_y, w_z) \in \mathbf{R}^3 \mid (u_y v_z - u_z v_y) w_x + (u_z v_x - u_x v_z) w_y + (u_x v_y - u_y v_x) w_z = 0\}.$$

On voit ici que les coefficients devant w_x, w_y, w_z sont exactement les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Ainsi on a $\mathrm{Dét}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$, ce qui prouve bien la proposition 5.30.

Résumons, on a vu que trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur déterminant est nul. Lorsqu'ils ne sont pas coplanaires, ils forment une famille libre, donc par le théorème 5.9 ils forment une base (ou un repère, c'est la même chose) de $\mathbf{R}^3$. On peut alors distinguer deux types de repères :

Définition 5.37

Étant donné trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathbf{R}^3$ non coplanaires. On dit que le repère $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est *direct* si on a $\mathrm{Dét}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) > 0$, et *indirect* si on a $\mathrm{Dét}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) < 0$ (voir Figure 24).

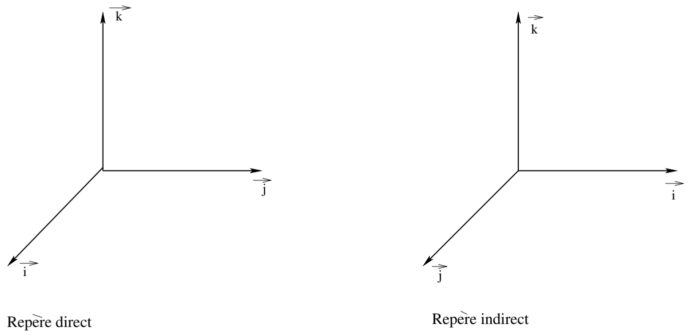


FIGURE 24. Repères $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormés direct et indirect.

Terminons cette partie avec deux propriétés géométriques que nous ne démontrerons pas, l'une concernant l'interprétation du produit vectoriel, et l'autre concernant le déterminant.

Proposition 5.38 (Caractérisation géométrique du produit vectoriel)

Étant donné deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbf{R}^3$, alors leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur qui est

1. orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
2. de longueur égale à l'aire du parallèllogramme défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
3. de sorte que, lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le repère $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est direct (règle de la main droite).

Proposition 5.39 (Caractérisation géométrique du déterminant)

Étant donné trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathbf{R}^3$, alors la valeur absolue de leur déterminant $\mathrm{Dét}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le volume du parallépipède défini par $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, et le signe du déterminant est positif si le repère $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est direct et négatif s'il est indirect.

5.2. Géométrie affine euclidienne. — La géométrie vectorielle vue dans la partie précédente est commode puisqu'on peut ajouter des vecteurs et les multiplier par des

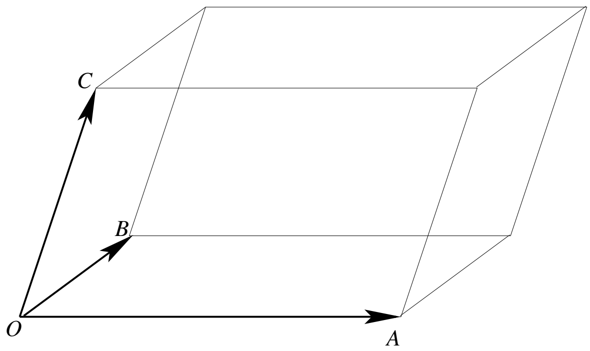


FIGURE 25. La valeur absolue du déterminant est le volume du parallélépipède.

nombres réels. Par contre, elle ne capture pas bien la géométrie du monde physique, puisque toutes les droites et tous les plans considérés contiennent toujours le vecteur $\vec{0}$, c'est-à-dire passent par l'origine.

Pour pouvoir étudier plus de droites et de plans (ou d'autres ensembles de points), on passe à la géométrie affine, celle dont les éléments de base sont des points dans un espace de type $\mathbf{R}^n$. La différence avec les vecteurs c'est que deux points ne peuvent être ajoutés, et on ne sait pas multiplier un point par un nombre réel. En revanche, on peut considérer les vecteurs entre les points, et donc on va s'appuyer sur la géométrie vectorielle de la partie précédente.

5.2.1. *Généralités en dimension quelconque.* — L'espace dans lequel on travaille est toujours l'ensemble $\mathbf{R}^n$. À deux points $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ de $\mathbf{R}^n$, on associe un vecteur, noté $\overrightarrow{AB}$, de coordonnées $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)$.

Définition 5.40 (Espace affine)

Pour tout entier naturel n, l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de l'opération qui à deux points A, B associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé *espace affine réel de dimension* n. Ses éléments sont appelés *points*.

On dit qu'il est *dirigé par l'espace vectoriel réel de dimension* n.

Il est tentant de confondre points et vecteurs puisque les deux vivent dans $\mathbf{R}^n$. La principale différence est qu'il y a un vecteur particulier, le vecteur nul $\vec{0}$, mais il n'y a pas de point particulier : évidemment le point $(0, 0, \ldots, 0)$ est particulier, mais en fait il est seulement lié au choix du repère. Un autre choix de repère changerait ce point particulier (mais nous ne parlerons pas de changement de repère dans ce cours). En revanche le vecteur nul est toujours le vecteur nul, dans tous les repères.

Étant donné un point A dans un espace affine et un vecteur $\vec{u}$ dans l'espace vectoriel le dirigeant, il existe un unique point B tel $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On note ce point $A + \vec{u}$. Ainsi on peut ajouter un vecteur à un point. Comme les vecteurs peuvent aussi s'ajouter entre deux, on peut en fait ajouter autant de vecteurs qu'on veut à un point.

Définition 5.41 (Droite affine)

Étant donné un point A et un vecteur non nul $\vec{u}$, la *droite affine passant par A et dirigée par $\vec{u}$*, notée $\mathscr{D}(A, \vec{u})$, est l'ensemble

$$\mathscr{D}(A, \vec{u}) := \{A + t\vec{u}\,;\, t \in \mathbf{R}\}.$$

Le vecteur $\vec{u}$ est appelé *vecteur directeur* de $\mathscr{D}(A, \vec{u})$.

La définition ci-dessus est paramétrique, puisqu'à partir d'un paramètre, noté ici t, on a décrit tous les points de la droite. Notons que le vecteur directeur n'est pas unique : tout vecteur colinéaire non nul est aussi directeur.

Insistons une fois de plus sur la différence avec les droites vectorielles : ici la droite passe par A qui est un point quelconque, et non nécessairement l'origine du repère.

Définition 5.42 (Distance entre deux points)

Étant donné deux points A, B dans un espace réel affine, la *distance* $d(A, B)$ entre A et B est définie comme la norme du vecteur les reliant, c'est-à-dire

$$d(A, B) := \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Définition 5.43 (Orthogonalité de deux droites)

Soit $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ deux droites affines, on dit que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont orthogonales si elles admettent des vecteurs directeurs orthogonaux.

5.2.2. *Géométrie affine euclidienne du plan réel.* — On passe maintenant à des choses spécifiques à la dimension 2.

On commence par une caractérisation implicite des droites, c'est-à-dire une façon de décrire une droite affine comme un ensemble de points satisfaisant une propriété la plus simple possible.

Proposition 5.44 (Équation implicite d'une droite affine)

Soit A un point de l'espace affine $\mathbf{R}^2$ et un $\vec{u}$ un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$. Alors la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ est donnée par

$$\mathscr{D}(A,\vec{u}) = \{B \in \mathbf{R}^2 \mid \text{Dét}(\overrightarrow{AB},\vec{u}) = 0\}.$$

En coordonnées, si A a pour coordonnées (a_x, a_y) et $\vec{u}$ pour coordonnées (u_x, u_y), alors

$$\mathscr{D}(A,\vec{u}) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-a_x)u_y - (y-a_y)u_x = 0\}.$$

On dit alors que $(x-a_x)u_y-(y-a_y)u_x = 0$ est une équation implicite de $\mathscr{D}(A,\vec{u})$.

Réciproquement, étant donné trois réels a, b, c avec $(a, b) \neq (0, 0)$, l'ensemble

$$\{(x,y) \in \mathbf{R} \mid ax + by + c = 0\}$$

est une droite affine. Elle passe par les points $(-c/a, 0)$ et $(0, -c/b)$ si a et b respectivement ne sont pas nuls. Elle est dirigée par le vecteur $(b, -a)$.

Il est clair qu'on n'a pas unicité de l'équation d'une droite. En effet, si $ax+by+c = 0$ est une équation d'une droite, alors pour tout $\lambda \neq 0$, $\lambda ax+\lambda by+\lambda c = 0$ est une équation de la même droite.

Réciproquement si $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont deux équations de la même droite $\mathscr{D}$, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$. En effet, le vecteur de coordonnées $(b, -a)$ est vecteur directeur de $\mathscr{D}$ donc satisfait $a'b - b'a = 0$. Donc il existe $\lambda \neq 0$ tel que $(a', b') = \lambda(a, b)$. En considérant ensuite un point de $\mathscr{D}$, on obtient $c' = \lambda c$.

On dit que deux droites affines dans le plan sont parallèles si elles admettent un même vecteur directeur. Ainsi, pour deux droites affines, il y a trois possibilités pour leur position relatives respectives.

Proposition 5.45 (Positions relatives de deux droites affines)

Soit $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ deux droites affines. On suppose que $\mathscr{D}_1$ contient un point A_1 et est dirigée par un vecteur $\vec{u}_1$, tandis que $\mathscr{D}_2$ contient un point A_2 et est dirigée par un vecteur $\vec{u}_2$. On suppose que $\mathscr{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R} \mid a_1x+b_1y+c_1 = 0\}$ et $\mathscr{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R} \mid a_2x + b_2y + c_2 = 0\}$. Alors l'une exactement des trois possibilités suivantes a lieu :

1. Les deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont confondues.

   Ce cas correspond à la situation où les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\overrightarrow{A_1A_2}$ sont colinéaires. Aussi les vecteurs (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont colinéaires.
2. Les deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles. Il n'y a aucun point d'intersection entre les deux droites.

   Ce cas correspond à la situation où les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ sont colinéaires, mais pas colinéaires avec $\overrightarrow{A_1A_2}$. Aussi les vecteurs (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont colinéaires, mais pas (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2).
3. Les deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes. Il y a un point d'intersection obtenu en résolvant le système de deux équations à deux inconnues donné par
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{cases}$$
   Ce cas correspond à la situation où les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires. Dans ce cas le point d'intersection est l'unique point qui est à la fois de la forme $A_1 + t_1\vec{u}_1$ et $A_2 + t_2\vec{u}_2$ avec $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$.

Passons maintenant aux notions de distance. Pour cela, la notion de *vecteur normal unitaire* est utile.

Proposition 5.46 (Vecteur unitaire normal à une droite affine)

Soit $\mathscr{D}$ une droite affine du plan réel qui admet pour équation $ax + by + c = 0$. Alors le vecteur $\vec{n} := \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ est de norme 1, et il est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

La *projection orthogonale* utilise le fait qu'il existe une seule perpendiculaire à une droite donnée passant par un point extérieur à cette droite (figure 26).

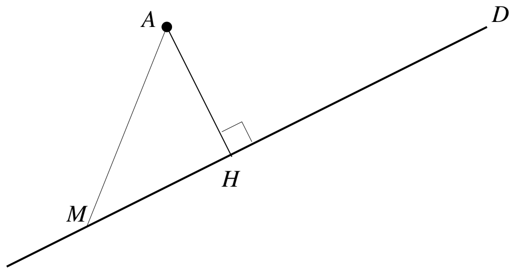


FIGURE 26. Projection orthogonale d'un point sur une droite.

Définition 5.47 (Distance d'un point à une droite)

Soit $\mathscr{D}$ une droite et A un point du plan affine réel. On appelle *projeté orthogonal* de A sur $\mathscr{D}$ le point d'intersection de $\mathscr{D}$ avec la droite orthogonale à $\mathscr{D}$ passant par A. On appelle *distance du point A à la droite $\mathscr{D}$* la distance du point à sa projection orthogonale sur la droite.

En fait, on peut montrer que la distance du point A à la droite $\mathscr{D}$ correspond à la distance minimale entre A et un point de $\mathscr{D}$, d'où la terminologie.

Dans le cas où la droite est définie par une équation implicite, la distance d'un point à cette droite se calcule très simplement.

Proposition 5.48 (Formule pour la distance d'un point à une droite)

Dans le plan affine réel, soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation implicite $ax + by + c = 0$, et P le point de coordonnées (p_x, p_y). La distance du point P à la droite $\mathscr{D}$ est :

$$\frac{|ap_x + bp_y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

Démonstration. — Si $P \in \mathscr{D}$ la distance est nulle, et la formule est vraie. Supposons maintenant que le point P n'appartienne pas à la droite $\mathscr{D}$ (figure 26). Le vecteur de coordonnées (a, b), que nous noterons $\vec{n}$, est orthogonal au vecteur de coordonnées $(-b, a)$, qui est un vecteur directeur de la droite. Notons H la projection orthogonale de P sur $\mathscr{D}$. Tout point M de la droite vérifie :

$$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{HM} - \overrightarrow{HP}) \cdot \vec{n} = -\overrightarrow{HP} \cdot \vec{n} ,$$

car $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. Comme $\overrightarrow{HP}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, la valeur absolue de leur produit scalaire est le produit des normes. On obtient donc :

$$|\overrightarrow{HP} \cdot \vec{n}| = \|\overrightarrow{HP}\| \, \|\vec{n}\| \ .$$

Par définition, $\|\overrightarrow{HP}\|$ est la distance de P à la droite, et $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2+b^2}$. Il reste à évaluer le produit scalaire de $\overrightarrow{PM}$ et $\vec{n}$.

$$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = a(m_x - p_x) + b(m_y - p_y) = -(ap_x + bp_y + c) \ ,$$

car $am_x + bm_y + c = 0$. D'où le résultat. □

On a vu les équations de droites. Voyons maintenant d'autres sous-ensembles particuliers du plan $\mathbf{R}^2$.

Définition 5.49 (Demi-plan)

Soit a, b, c trois réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$. Alors l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax+by+c \geq 0\}$ est appelé *demi-plan fermé*, tandis que l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax+by+c > 0\}$ est appelé *demi-plan ouvert*.

Définition 5.50 (Cercle et disque)

Soit A un point de coordonnées (a_x, a_y) et r un réel positif. Alors le *cercle* (resp. le *disque*) de centre A et de rayon r est l'ensemble des points du plan à distance r (resp. au plus r) de A.

Le cercle a pour équation implicite $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-a_x)^2 + (y-a_y)^2 = r^2\}$, et le disque $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-a_x)^2 + (y-a_y)^2 \leq r^2\}$.

5.2.3. *Géométrie affine euclidenne de l'espace* $\mathbf{R}^3$. — Tout comme le plan affine contient des droites, l'espace affine $\mathbf{R}^3$ contient naturellement des droites et des plans. L'équation paramétrique d'une droite a été vue en 5.41. Avoir une équation implicite est plus compliqué, car nous verrons qu'il faut en fait deux équations. Commençons donc par les plans.

Définition 5.51 (Plan affine)

Étant donné un point A de l'espace affine $\mathbf{R}^3$ et deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non colinéaires, le *plan affine passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$* est l'ensemble

$$\mathscr{P} := \{A + \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}\,;\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}^2\}.$$

Le plan vectoriel associé, alors noté $\vec{\mathscr{P}}$, est l'ensemble

$$\vec{\mathscr{P}} := \{\lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}\,;\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}^2\}.$$

La définition précédente donne une équation paramétrique d'un plan affine dans l'espace. Pour obtenir une équation implicite, nous allons utiliser le produit vectoriel :

Proposition 5.52 (Équation implicite d'un plan affine)

Tout plan affine $\mathscr{P}$ admet une équation du type

$$\mathscr{P} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0\},$$

où a, b, c, d sont quatre nombre réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Si $\mathscr{P}$ est donné paramétriquement par $\mathscr{P} := \{P + \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}\,;\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}^2\}$, alors on peut prendre pour (a, b, c) le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et pour d le nombre $-ap_x - bp_y - cp_z$.

Démonstration. — Soit M un point de coordonnées (x, y, z). On note que le point M appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{PM}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont orthogonaux. À l'aide de la proposition 5.30 c'est équivalent à dire que (x, y, z) est solution de l'équation :

$$(u_y v_z - u_z v_y)(x - p_x) + (u_z v_x - u_x v_z)(y - p_y) + (u_x v_y - u_y v_x)(z - p_z) = 0.$$

□

Comme dans le cas des droites du plan, on a le résultat suivant :

Théorème 5.53

$ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont les équations du même plan si et seulement si il existe $\lambda \neq 0$ tel que $(a', b', c', d') = \lambda(a, b, c, d)$.

Si $\mathscr{P}$ est un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, on obtient tous les plans parallèles ou confondus à $\mathscr{P}$ en prenant les équations $ax + by + cz + d' = 0$, où d' décrit $\mathbf{R}$.

Soit $\mathscr{P}_1$ un plan d'équation $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$. Soit $\mathscr{P}_2$ un plan d'équation $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles si et seulement si (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont colinéaires. Si ce n'est pas le cas, des équations implicites de la droite d'intersection sont données par :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

On a vu que les équations du type $ax+by+cz+d = 0$ (appelées équations linéaires) correspondent à des plans dans l'espace. On peut alors se demander comment obtenir des équations de droites. Le plus simple est en fait de voir que toute droite est à l'intersection de deux plans non parallèles, et, comme on vient de le voir, deux plans non parallèles se coupent le long d'une droite. Ainsi toute droite admet une équation du type

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Proposition 5.54 (Vecteur directeur d'une droite donnée comme intersection de deux plans)

Supposons que la droite $\mathscr{D}$ soit donnée comme l'intersection de deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$. Soit $\vec{n_1}$ (resp. $\vec{n_2}$) un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_1$ (resp. $\mathscr{P}_2$). Alors un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est donné par $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2}$.

Démonstration. — En effet $\vec{u} \neq \vec{0}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ si et seulement si il appartient à la fois au plan vectoriel associé à $\mathscr{P}_1$ et au plan vectoriel associé à $\mathscr{P}_2$ donc si et seulement si il est orthogonal à $\vec{n_1}$ et à $\vec{n_2}$ donc si et seulement si il est colinéaire à $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2}$. $\square$

Si $\mathscr{P}$ est un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) et (a, b, c) sont liés, ce qu'on peut vérifier en utilisant par exemple la proposition (5.52).

Si ce n'est pas le cas, on trouve les coordonnées du point d'intersection en résolvant le système

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Les notions de projection orthogonale et de distance sont définies de la même façon en dimension 3.

Proposition 5.55

Dans l'espace affine réel euclidien de dimension 3, soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation implicite $ax + by + cz + d = 0$, et M le point de coordonnées (m_x, m_y, m_z). La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est :

$$\frac{|am_x + bm_y + cm_z + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} .$$

La preuve est semblable au cas dans $\mathbf{R}^2$.

5.3. Géométrie complexe. — Maintenant on revient au plan affine euclien. Comme vu dans le chapitre précédent, on peut associer à tout point de coordonnées (x, y) le nombre complexe $x + \mathrm{i}y$, appelé *affixe* du point. Si M désigne un point, on note z_M son affixe.

Le premier résultat concerne les mesures de distances et d'angles.

Théorème 5.56

Soient A, B et C trois points distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

1. La distance entre A et B est le module de $z_B - z_A$.
2. Une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est égal à l'argument du rapport $(z_B - z_C)/(z_A - z_C)$.

Remarque 5.57. — Rappelons que l'ensemble des points à distance fixée r d'un point A est le cercle de centre A et de rayon r. Ainsi, en termes complexes, ce cercle est l'ensemble $\{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_A| = r\}$. On peut aussi écrire ce cercle comme l'ensemble des points d'affixe $z_C + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où θ décrit $[0, 2\pi[$.

De même l'ensemble des points z regardant un segment $[AB]$ sous un angle donné est un arc de cercle, un segment, ou deux demi-droites dont les extrémités sont A et B. Ainsi, en termes complexes, ces arcs de cercles sont de la forme $\left\{z \in \mathbf{C} \mid \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \theta\right\}$ pour un θ fixé. Le cas où cet arc de cercle est en fait le segment $[AB]$ correspond à $\theta = \pi$, et celui où cet arc de cercle est le complémentaire $(AB) \mathbin{\text{—}} [AB]$ correspond à $\theta = 0$. Les cas $\theta = \pi/2$ et $\theta = 3\pi/2$ correspondent aux deux demi-cercles de diamètre $[AB]$.

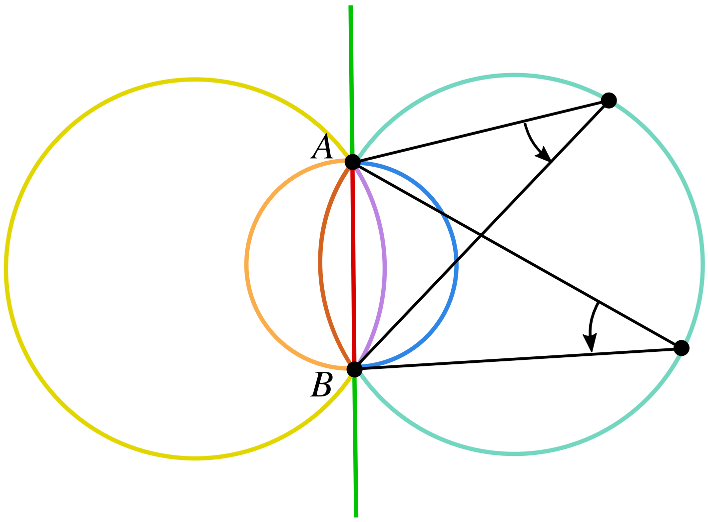


FIGURE 27. L'ensemble des points regardant un segment $[AB]$ selon un angle orienté donné. Si l'angle est π, alors on retrouve le segment $[AB]$ (en rouge). Si l'angle est 0, on retrouve $(AB) \mathbin{\text{—}} [AB]$ (en vert). Pour les autres angles, il s'agit d'un arc de cercle d'extrémités A et B, par exemple $\pi/2$ en bleu, ou $3\pi/2$ en orange.

Voyons maintenant les transformations les plus naturelles du plan complexe.

Définition 5.58

Soit f une application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$. On note F l'application du plan dans lui-même qui au point d'affixe z associe le point d'affixe $f(z)$. Soit A un point du plan, d'affixe z_A.

1. *Translation :* L'application F est la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$, si et seulement si f est l'application qui à z associe $z + z_A$.
2. *Homothétie :* Soit r un réel. L'application F est l'homothétie de centre A et de rapport r si et seulement si f est l'application qui à z associe le complexe $f(z)$ tel que $f(z) - z_A = r(z - z_A)$.
3. *Rotation :* Soit θ un réel. L'application F est la rotation de centre A et d'angle θ si et seulement si f est l'application qui à z associe le complexe $f(z)$ tel que $f(z) - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - z_A)$.
4. *Symétrie orthogonale* Soit θ un réel. L'application F est la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par A et de vecteur directeur d'affixe $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}$ si et seulement si f est l'application qui à z associe le complexe $f(z)$ tel que $f(z) - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\overline{z} - \overline{z_A})$.
5. *Symétrie glissée* Soit θ un réel et r un réel non nul. L'application F est la symétrie glissée par rapport à la droite passant par A et de vecteur directeur d'affixe $r\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}$ si et seulement si f est l'application qui à z associe le complexe $f(z)$ tel que $f(z) - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\overline{z} - \overline{z_A}) + r\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}$.

Toutes les transformations précédentes sont des exemples de similitudes, comme nous allons le montrer.

Définition 5.59

Une *similitude plane* est une application φ du plan dans lui-même telle qu'il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que pour tout couple de points (A, B) du plan on ait

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = \lambda d(A, B).$$

Cela détermine le nombre réel λ qu'on appelle la *rapport* de la similitude.

Une similitude dont le rapport est de module 1 est appelée une *isométrie*.

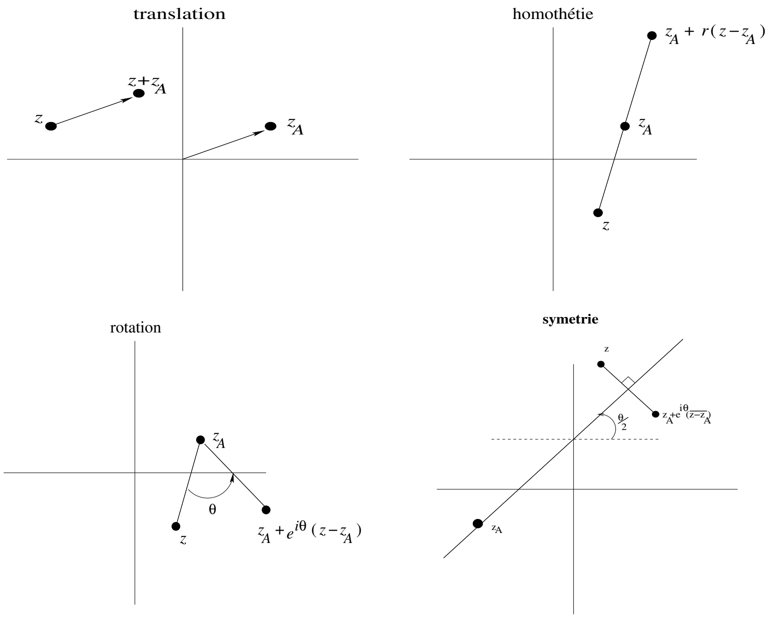


FIGURE 28. Translation, homothétie, rotation et symétrie orthogonale dans le plan complexe.

Exemple 5.60. — Les translations, les rotations et les symétries sont des similitudes de rapport 1.

Une homothétie de rapport λ est une simillitude de rapport λ.

Remarques 5.61. — i) La composée de deux similitudes de rapports respectifs λ et μ est une similitude de rapport $\lambda\mu$. Toute similitude de rapport λ est une bijection dont la réciproque est une similitude de rapport λ^{-1}.

ii) Il résulte de ce qui précède que toute similitude est la composée d'une homothétie de rapport λ et d'une isométrie.

Remarque 5.62. — Notons $M(z)$ le point du plan d'affixe z. Si z et z' sont des nombres complexes, le produit zz' peut être décrit comme l'unique nombre complexe tel qu'il existe une similitude directe qui envoie le triangle $(M(0), M(z'), M(zz'))$ sur le triangle $(M(0), M(1), M(z))$. (figure 29). En particulier, ces triangles sont *semblables*.

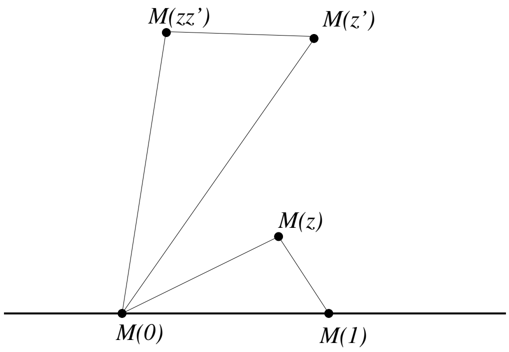


FIGURE 29. Interprétation géométrique du produit de deux complexes.

Théorème 5.63

a) Soient a et b des nombres complexes avec $a \neq 0$. L'application qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $az + b$ est une similitude de rapport $|a|$. Une telle similitude est dite *directe*.

b) Soient a et b des nombres complexes avec $a \neq 0$. L'application qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $a\bar{z} + b$ est une similitude de rapport $|a|$. Une telle similitude est dite *indirecte*.

c) Toute similitude du plan complexe est soit une similitude directe au sens du point a) soit une similitude indirecte au sens du point b).

Démonstration. — a) On a $|(az+b)-(az'+b)| = |a|.|z-z'|$, donc la transformation $z \mapsto az + b$ multiplie bien toutes les longueurs par $|a|$.

b) On a $|(a\bar{z} + b) - (a\bar{z}' + b)| = |a|.|\bar{z} - \bar{z}'| = |a|.|z - z'|$, donc la transformation $z \mapsto a\bar{z} + b$ multiplie bien toutes les longueurs par $|a|$.

c) C'est la partie difficile, mais la preuve est jolie.

Soit f une similitude quelconque. Comme la composée de deux simillitudes est encore une similitude, on va composer f avec des similitudes bien comprises jusqu'à la comprendre complètement.

Notons $z_0 = f(0)$ et t_0 la translation de vecteur $-z_0$. Alors $t_0 \circ f$ est une similitude qui fixe le point 0, puisque celui-ci est envoyé en z_0 par f, puis ramené en 0 par t_0. Soit h_0 l'homothétie de centre 0 et de rapport λ^{-1} inverse de celui λ de f. Alors $h_0 \circ t_0 \circ f$ est une similitude fixant 0 et de rapport 1, donc une isométrie. Comme 0 est fixé, le point 1 est envoyé par $h_0 \circ t_0 \circ f$ sur un point de norme 1, notons-le $e^{i\theta_0}$. Soit r_0 la rotation de centre 0 et d'angle $-\theta_0$. Alors $r_0 \circ h_0 \circ t_0 \circ f$ est une isométrie qui fixe les points 0 et 1.

Nous affirmons qu'il n'y a que deux isométries qui fixent à la fois 0 et 1, à savoir l'identité $z \mapsto z$, et la symétrie $z \mapsto \bar{z}$. En effet soit z un point complexe de $\mathbf{C} - \{0, 1\}$, les deux cercles passant par z et centrés en 0 et 1 respectivement ne se coupent qu'en deux points, les points z et $\bar{z}$. Comme l'image de z doit être à l'intersection de ces deux cercles, l'application considérée est bien $z \mapsto z$ ou $z \mapsto \bar{z}$.

Ainsi on a $f(z) = r_0^{-1}(h_0^{-1}(t_0^{-1}(z))) = e^{i\theta_0}\lambda(z+z_0)$ ou $f(z) = r_0^{-1}(h_0^{-1}(t_0^{-1}(\bar{z}))) = e^{i\theta_0}\lambda(\bar{z} + z_0)$. Ce sont bien des transformations de type $z \mapsto az + b$ et $z \mapsto a\bar{z} + b$ respectivement.

$\square$

Fiche de révision

5.1. Géométrie vectorielle euclidienne. —

- espace vectoriel : ensemble de vecteurs, qu'on peut additionner et multiplier par des réels.
- $\vec{u}, \vec{v}$ *colinéaires* : $\exists \lambda \in \mathbf{R}$ tq $\vec{u} = \lambda.\vec{v}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
- droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$: $\{\lambda.\vec{u}\,;\ \lambda \in \mathbf{R}\}$.
- combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$: vecteur de la forme $\sum_i^n \lambda_i \vec{u}_i$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$.
- famille liée : il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tq $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0}$.
- famille libre : la seule façon d'obtenir $\vec{0}$ est de prendre $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$, c'est le contraire de liée.
- famille génératrice : tout vecteur de l'espace peut être écrit comme combinaison linéaire d'éléments de la famille.
- base : famille libre et génératrice.
- Théorème : toutes les bases de $\mathbf{R}^n$ sont de cardinal n. Une famille libre de cardinal n est une base. Une famille génératrice de cardinal n est une base.
- produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$.
  $\vec{u}, \vec{v}$ orthogonaux : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
  norme : $\|\vec{u}\| := \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$.
- inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$.
  égalité ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires.
- angle géométrique entre deux vecteurs : unique $\alpha \in [0, \pi]$ tq $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|u\|\,\|v\| \cos(\alpha)$.
- inégalité triangulaire : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
  égalité ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ positivement colinéaires.
- base orthonormée : tous les vecteurs sont de norme 1, deux vecteurs distincts sont orthogonaux.

5.1.1. *Géométrie vectorielle euclidienne du plan.* —

- déterminant de deux vecteurs du plan : $\text{Dét}(\vec{u}, \vec{v}) = u_x v_y - u_y v_x$.

— $\text{Dét}(\vec{u},\vec{u}) = 0$,
$\text{Dét}(\vec{v},\vec{u}) = -\text{Dét}(\vec{u},\vec{v})$,
$\text{Dét}(\lambda\vec{u},\vec{v}) = \lambda\,\text{Dét}(\vec{u},\vec{v})$,
$\text{Dét}(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = \text{Dét}(\vec{u},\vec{v}) + \text{Dét}(\vec{u},\vec{w})$.

— vecteur orthogonal : $(u_y, -u_x)$ orthogonal à (u_x, u_y) et de même norme.

— équation implicite d'une droite vectorielle du plan :
$$\begin{aligned}\{\lambda.\vec{u}\,;\,\lambda\in\mathbf{R}\} &= \{\vec{v}\in\mathbf{R}^2 \mid \text{Dét}(\vec{u},\vec{v}) = 0\}\\ &= \{(v_x,v_y)\in\mathbf{R}^2 \mid u_xv_y - u_yv_x = 0\}\end{aligned}$$

— interprétation du déterminant dans le plan : $|\,\text{Dét}(\vec{u},\vec{v})|$ = aire du parallélogramme encadré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

— $(\vec{u},\vec{v})$ base de $\mathbf{R}^2 \quad\Leftrightarrow\quad \text{Dét}(\vec{u},\vec{v}) \neq 0$.

5.1.2. *Géométrie vectorielle euclidienne de l'espace.* —

— plan vectoriel engendré par $\vec{u},\vec{v}$: $\{\lambda.\vec{u}+\mu\vec{v}\,;\,\lambda,\mu\in\mathbf{R}\}$.

— produit vectoriel : $\vec{u}\wedge\vec{v} = (u_yv_z - u_zv_y, u_zv_x - u_xv_z, u_xv_y - u_yv_x)$. .

— $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$ ssi $\vec{u}$, $\vec{v}$ colinéaires,
$\vec{u}\wedge\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$,
$(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ repère direct (règle de la main droite).

— déterminant de 3 vecteurs de $\mathbf{R}^3$:
$\text{Dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) := u_xv_yw_z - u_xv_zw_y + u_yv_zw_x - u_yv_xw_y + u_zv_xw_y - u_zv_yw_x.$,
$\text{Dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$.

— $\text{Dét}(\lambda.\vec{u}+\mu.\vec{u'},\vec{v},\vec{w}) = \lambda\,\text{Dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) + \mu\,\text{Dét}(\vec{u'},\vec{v},\vec{w})$,
$\text{Dét}(\vec{u},\vec{u},\vec{w}) = \text{Dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{v}) = \text{Dét}(\vec{w},\vec{v},\vec{w}) = 0$,

— $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ liés (ou coplanaires) : $\exists\lambda,\mu,\nu$ tq $\lambda.\vec{u}+\mu.\vec{v}+\nu.\vec{w} = \vec{0}$.

— $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ coplanaires ssi $\text{Dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$.

— équation implicite du plan engendré par deux vecteurs :
$\vec{w} := \vec{u}\wedge\vec{v}$
$$\begin{aligned}\{\lambda.\vec{u}+\mu\vec{v}\,;\,\lambda,\mu\in\mathbf{R}\} &= \{\vec{x}\in\mathbf{R}^3 \mid (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{x} = 0\}\\ &= \{\vec{x}\in\mathbf{R}^3 \mid \text{Dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{x}) = 0\}\\ &= \{(r_x,r_y,r_z)\in\mathbf{R}^3 \mid w_xr_x + w_yr_y + w_zr_z = 0\}\\ &= \{(r_x,r_y,r_z)\in\mathbf{R}^3 \mid (u_yv_z - u_zv_y)r_x\\ &\qquad +(u_zv_x - u_xv_z)r_y + (u_xv_y - u_yv_x)r_z = 0\}\end{aligned}$$

— caractérisation géométrique du déterminant :
$|\,\text{Dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|$ volume du parallépipède défini par $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$,
$\text{Dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) > 0$ si le repère $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est direct, < 0 si indirect.

— $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ base de $\mathbf{R}^3 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Dét}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0$.

5.2. Géométrie affine euclidienne. —

— espace affine : ensemble de points tels que toute paire est reliée par un vecteur.

— droite affine passant par A, dirigée par $\vec{u}$: $\{A + t\vec{u}\,;\, t \in \mathbf{R}\}$.

— distance entre deux points : $d(A,B) := \|\overrightarrow{AB}\|$.

— $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ orthogonales si elles admettent des vecteurs directeurs non nuls orthogonaux.

5.2.1. *Géométrie affine euclidienne du plan réel.* —

— équation implicite d'une droite affine :

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(A,\vec{u}) &= \{B \in \mathbf{R}^2 \,|\, \text{Dét}(\overrightarrow{AB},\vec{u}) = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, (x-a_x)u_y - (y-a_y)u_x = 0\} \end{aligned}$$

— $\{(x,y) \in \mathbf{R} \,|\, ax + by + c = 0\}$, où $(a,b) \neq (0,0)$, est une droite affine dirigée par $(b,-a)$.

— droites affines parallèles si elles admettent un même vecteur directeur.

— positions relatives de deux droites affines $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}(A_1,\vec{u}_1) = \{(x,y) \,|\, a_1x + b_1y + c_1 = 0\}$, $\mathscr{D}_2 = \mathscr{D}(A_2,\vec{u}_2) = \{(x,y) \,|\, a_2x + b_2y + c_2 = 0\}$:

  — $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ confondues : $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\overrightarrow{A_1A_2}$ colinéaires,
  (a_1,b_1,c_1) et (a_2,b_2,c_2) colinéaires.

  — $\mathscr{D}_1$ $\mathscr{D}_2$ parallèles : $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ colinéaires, mais pas $\overrightarrow{A_1A_2}$.
  (a_1,b_1) et (a_2,b_2) colinéaires, mais pas (a_1,b_1,c_1) et (a_2,b_2,c_2).

  — $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ sécantes : $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ non colinéaires,
  le point d'intersection vérifie

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c &= 0 \\ a_2x + b_2y + c &= 0 \end{cases}$$

— vecteur unitaire normal à une droite affine $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, ax + by + c = 0\}$: $\vec{n} := \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

— projection orthogonale de A sur $\mathscr{D}$: point d'intersection de $\mathscr{D}$ avec la droite orthogonale à $\mathscr{D}$ passant par A.
distance du point A à $\mathscr{D}$: distance du point à sa projection orthogonale sur $\mathscr{D}$.

— distance à une droite dans le plan affine euclidien : si $\mathscr{D} = \{(x, y) \mid ax+by+c = 0\}$, et $A = (a_x, a_y)$.
distance de A à $\mathscr{D}$:

$$\frac{|aa_x + ba_y + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

— $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by + c \geq 0\}$ *demi-plan fermé.*
$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by + c > 0\}$ *demi-plan ouvert.*

— cercle de centre A et de rayon r : $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - a_x)^2 + (y - a_y)^2 = r^2\}$,
disque de centre A et de rayon r : $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - a_x)^2 + (y - a_y)^2 \leq r^2\}$.

5.2.2. *Géométrie affine euclidenne de l'espace* $\mathbf{R}^3$. —

— plan affine passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\{A + \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}\,;\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}$
plan vectoriel associé : $\{\lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}\,;\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}$

— équation implicite d'un plan affine : tout plan affine $\mathscr{P}$ admet une équation du type $\mathscr{P} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid ax+by+cz+d = 0\}$ avec a, b, c, d tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
si $\mathscr{P} = \{A+\lambda.\vec{u}+\mu.\vec{v}\,;\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}$, alors on peut prendre pour $(a, b, c) = \vec{u}\wedge\vec{v}$ et $d = -aa_x - ba_y - ca_z$.
$ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont les équations du même plan si et seulement si il existe $\lambda \neq 0$ tel que $(a', b', c', d') = \lambda(a, b, c, d)$.
si $\mathscr{P} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0\}$, alors plan parallèle à $\mathscr{P}$: $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid ax + by + cz + d' = 0\}$, où $d' \neq d$.

— position relative de deux plans : $\mathscr{P}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0\}$, $\mathscr{P}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\}$
$\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ parallèles ou confondus ssi (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) colinéaires.
sinon, droite d'intersection donnée par : $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\}$.

— distance à un plan dans l'espace affine euclidien : $\mathscr{P} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0\}$, $M = (m_x, m_y, m_z)$.
distance de M à $\mathscr{P}$: $\dfrac{|am_x + bm_y + cm_z + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

— vecteur directeur d'une droite donnée comme intersection de deux plans : $\vec{n_1}$ (resp. $\vec{n_2}$) vecteur normal à $\mathscr{P}_1$ (resp. $\mathscr{P}_2$). Alors vecteur directeur de $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ donné par $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2}$.

5.3. Géométrie complexe. —

- point A du plan $\mapsto$ affixe $z_A \in \mathbf{C}$.
- distance entre A et B : $|z_B - z_A|$.
- mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$: argument de $(z_B - z_C)/(z_A - z_C)$.
- transformations :
  - translation de vecteur $\vec{a}$: $f(z) = z + z_a$.
  - homothétie de rapport r et de centre A : $f(z) - z_A = r(z - z_A)$.
  - rotation centre A et d'angle θ : $f(z) - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - z_A)$.
  - symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par A et de vecteur directeur $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}$: $f(z) - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\overline{z} - \overline{z_A})$
  - symétrie glissée par rapport à la droite passant par A et de vecteur directeur $r\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}$: $f(z) - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\overline{z} - \overline{z_A}) + r\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}$.
- similitude plane de rapport λ : transformation φ telle que $d(\varphi(A), \varphi(B)) = \lambda d(A, B)$.

  isométrie : similitude de rapport 1.
- caractérisation des similitudes : ou bien $f(z) = az + b$ (similitude directe), ou bien $f(z) = a\bar{z} + b$ (similitude indirecte) .

Exercices

Géométrie vectorielle

Exercice 5.1. (*) On travaille dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On considérera les cas suivants :

$$\vec{u}\ :\ (1,1)\quad \vec{v}\ :\ (1,-1)$$
$$\vec{u}\ :\ (2,2)\quad \vec{v}\ :\ (-4,-4)$$
$$\vec{u}\ :\ (1,2)\quad \vec{v}\ :\ (1,1)$$

1. Calculer $\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v})$ et en déduire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. En déduire si $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
2. Dans le cas où $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de $\mathbf{R}^2$, écrire les vecteurs $\vec{w}_1=(1,0), \vec{w}_2=(0,1)$ et $\vec{w}_3=(-3,2)$ comme combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. Dans le cas où $(\vec{u},\vec{v})$ est une famille liée, exhiber $(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ tel que $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=\vec{0}$.

Exercice 5.2. (**)

Soient $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace vectoriel euclidien. On considérera les cas suivants.

$$\vec{u}:(1,0,0)\ ,\quad \vec{v}:(1,1,0)\ ,\quad \vec{w}:(1,1,1)\ .$$
$$\vec{u}:(0,2,2)\ ,\quad \vec{v}:(1,0,1)\ ,\quad \vec{w}:(1,2,0)\ .$$
$$\vec{u}:(0,5,1)\ ,\quad \vec{v}:(2,1,-1)\ ,\quad \vec{w}:(-1,2,1)\ .$$
$$\vec{u}:(1,2,3)\ ,\quad \vec{v}:(4,5,6)\ ,\quad \vec{w}:(7,8,9)\ .$$

1. Calculer les trois produits vectoriels $\vec{u}\wedge\vec{v}$, $\vec{u}\wedge\vec{w}$, $\vec{v}\wedge\vec{w}$.
2. Calculer les trois produits scalaires $\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})$, $\vec{v}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{u})$, $\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})$.
3. Calculer le déterminant $\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ par la règle de Sarrus.
4. En déduire si la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ forme une famille libre ou liée.
5. Dans le cas où la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est libre, écrire le vecteur $\vec{k}:(0,0,1)$ comme combinaison linéaire de $\vec{u},\vec{v}$, et $\vec{w}$.
6. Dans le cas où la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est liée, trouver $\lambda,\mu,\nu\in\mathbf{R}$ non tous nuls tels que $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}+\nu\vec{w}=\vec{0}$.

Géométrie affine

Exercice 5.3. (*)

Soit A un point d'un plan affine réel. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul. On considérera les cas suivants.

$$A : (-1, 1)\ , \quad \vec{u} : (1, 0)\ .$$
$$A : (2, 1)\ , \quad \vec{u} : (-3, -1)\ .$$
$$A : (0, 1)\ , \quad \vec{u} : (1, 2)\ .$$
$$A : (-3, 1)\ , \quad \vec{u} : (1, -1)\ .$$

1. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite $\mathscr{D}$ passant par A, admettant $\vec{u}$ comme vecteur directeur.
2. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite $\mathscr{D}'$ passant par A, et perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

Exercice 5.4. (*)

Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites dans le plan affine, données par leurs équations implicites ou paramétriques. Déterminer si les droites sont sécantes, parallèles ou confondues. Dans le cas où elles sont sécantes, donner les coordonnées de leur point d'intersection.

$$\mathscr{D}_1 : 3x + 5y - 2 = 0\ ; \quad \mathscr{D}_2 : x - 2y + 3 = 0\ .$$
$$\mathscr{D}_1 : 2x - 4y + 1 = 0\ ; \quad \mathscr{D}_2 : -5x + 10y + 3 = 0\ .$$
$$\mathscr{D}_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3 + 4\lambda \\ y & = & 2 - \lambda \end{array} \right. \ ; \quad \mathscr{D}_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 5 - \mu \\ y & = & 2 + 3\mu \end{array} \right. \ .$$
$$\mathscr{D}_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2\lambda \\ y & = & 2 - 3\lambda \end{array} \right. \ ; \quad \mathscr{D}_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3 - 4\mu \\ y & = & -1 + 6\mu \end{array} \right. \ .$$
$$\mathscr{D}_1 : x - 2y + 3 = 0\ ; \quad \mathscr{D}_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 + \mu \\ y & = & 3 - 2\mu \end{array} \right. \ .$$
$$\mathscr{D}_1 : 3x - 2y + 1 = 0\ ; \quad \mathscr{D}_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 - 4\mu \\ y & = & 2 - 6\mu \end{array} \right. \ .$$

Exercice 5.5. (**)

Soit a, b deux réels. Dans le plan $\mathbf{R}^2$, soit $\mathscr{D}_1$ la droite d'équation $2x + ay - 1 = 0$ et $\mathscr{D}_2$ la droite d'équations paramétriques $x = b - \lambda$, $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Discuter suivant les valeurs de a et b si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes, parallèles ou confondues.

Exercice 5.6. (**) *Intersection entre un cercle et une droite*

Déterminer et représenter les points d'intersection entre le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ dans les cas suivants :

1. $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2=1\}$ et $\mathscr{D} = \{(2t, 1-t)\,;\, t \in \mathbf{R}\}$,
2. $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2=4\}$ et $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2$
   $, x+y=1\}$,
3. $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2-2x+y^2+2y=-1\}$ et $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 2x+y=1\}$,
4. $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2=1\}$ et $\mathscr{D} = \{(x,y) \,|\, x+\lambda y=1\}$,en fonction du réel λ.

Exercice 5.7. (**) *Sous-ensembles du plan*

Déterminer et représenter les ensembles sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$ suivants

1. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 2x+3y=1\}$,
2. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 2x-y \geq 1\}$,
3. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2-2y \leq 0\}$,
4. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 2x-3y \leq 1\} \cap \{(x,y) \,|\, x-2y \leq 1\}$,
5. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 2x-3y \leq 1\} \cup \{(x,y) \,|\, x-2y \leq 1\}$,
6. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\} \cap \{(x,y) \,|\, x-2y \leq 1\}$,
7. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2-y \geq 1\}$,
8. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, xy > 1\}$,
9. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, xy > 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x-y \geq 0\}$,
10. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, (x+y-1)(2x-y) \geqslant 0\}$,
11. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, (x^2+y^2-1)(x^2+(y-1)^2-\frac{1}{4}) \leqslant 0\}$,
12. $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, (x^2+y^2-1)(x^2+(y-1)^2-\frac{1}{4}) = 0\}$.

Exercice 5.8. (**) *Sous-ensembles du plan*

Représenter les ensembles suivants :

1. $F = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x+3y=1\}$;
2. $G = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x+3y>1\}$;
3. $H = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$;
4. $H \setminus G$;
5. $F \cap H$.

Exercice 5.9. (**) *Sous-ensembles du plan*

Soit $E = \{0,1\}^2$, $F = \{(0,0),(1,1)\}$ et $G = E \setminus F$. Si $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, $(a,b) \neq (0,0)$ et $c \in \mathbf{R}$, on définit $H_{a,b,c} = \{(x,y) \in \mathbf{R} \mid ax+by+c \geqq 0\}$.

Peut-on avoir $F \subset H_{a,b,c}$ et $G \subset \mathbf{R}^2 \setminus H_{a,b,c}$?

Exercice 5.10. (*)

On travaille dans l'espace affine réel de dimension 3.

1. Dire dans chacun des cas suivants si les points A, B, C, donnés par leurs coordonnées, sont alignés.

$$A\ :\ (1,1,0)\quad B\ :\ (1,-1,2)\quad C\ :\ (-1,0,3)$$

$$A\ :\ (1,1,0)\quad B\ :\ (1,-1,2)\quad C\ :\ (1,-2,3)$$

   Donner selon les cas des équations implicites ou paramétriques de la droite ou du plan qu'ils engendrent.

2. Dire dans chacun des cas suivants si les points A, B, C, D donnés par leurs coordonnées sont coplanaires.

$$A\ :\ (1,1,0)\quad B\ :\ (1,-1,2)\quad C\ :\ (-1,0,3)\quad D\ :\ (2,1,6)$$

$$A\ :\ (1,1,0)\quad B\ :\ (1,-1,2)\quad C\ :\ (-1,0,3)\quad D\ :\ (2,3,-3)$$

   Dans le cas où ils sont coplanaires, donner l'équation implicite et les équations paramétriques du plan qu'ils engendrent.

Exercice 5.11. (*)

Soit A un point de l'espace affine euclidien $\mathbf{R}^3$. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul donné par ses coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considérera les cas suivants.

$$A : (1,0,0)\ ,\quad \vec{u} : (1,1,1)\ .$$

$$A : (1,-1,1)\ ,\quad \vec{u} : (1,1,1)\ .$$

$$A : (1,0,0)\ ,\quad \vec{u} : (1,-1,1)\ .$$

$$A : (1,2,3)\ ,\quad \vec{u} : (3,2,1)\ .$$

1. Donner des équations paramétriques et implicites pour la droite $\mathscr{D}$, de vecteur directeur $\vec{u}$, passant par A.
2. Donner des équations paramétriques et implicites pour le plan $\mathscr{P}$ passant par A et orthogonal à $\mathscr{D}$.
3. Calculer la distance de O à $\mathscr{P}$ et de O à $\mathscr{D}$.

Exercice 5.12. (**)

Soit $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{P}$) une droite (resp. un plan) de l'espace donnée par leurs équations paramétriques ou implicites.

Déterminer l'intersection $\mathscr{P} \cap \mathscr{D}$ dans les quatre cas suivants :

1. $\mathscr{D} : \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 4 \\ x - 2z = 5 \end{array} \right. \qquad \mathscr{P} : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda - \mu \\ y = 3 - \lambda + 2\mu \\ z = 4 - 2\lambda - 3\mu \end{array} \right. .$
2. $\mathscr{D} : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = 6 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{array} \right. \qquad \mathscr{P} : x - y - 2z = 3.$
3. $\mathscr{D} : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = 6 - \lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{array} \right. \qquad \mathscr{P} : \left\{ \begin{array}{l} x = 4 + 2\lambda - \mu \\ y = 7 - \lambda + 3\mu \\ z = 6 - \lambda + \mu \end{array} \right. .$
4. $\mathscr{D} : \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 4 \\ x - 2z = 5 \end{array} \right. \qquad \mathscr{P} : x - 3y - 6z = 11.$

Exercice 5.13. (**)

Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans non parallèles et A un point n'appartenant ni à $\mathscr{P}_1$ ni à $\mathscr{P}_2$ dans un espace de dimension 3. Les deux plans sont donnés par des équations implicites et A par ses coordonnées. On note $\mathscr{D}$ la droite intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$. On considérera les cas suivants.

$$\mathscr{P}_1 : z = 0 \; ; \quad \mathscr{P}_2 : y = 0 \; , \quad A : (1,1,1) \; .$$
$$\mathscr{P}_1 : x + y = 0 \; ; \quad \mathscr{P}_2 : x + z + 1 = 0 \; , \quad A : (1,1,1) \; .$$
$$\mathscr{P}_1 : x + y + z + 2 = 0 \; ; \quad \mathscr{P}_2 : 2x - y + 3z - 4 = 0 \; , \quad A : (2,1,0) \; .$$
$$\mathscr{P}_1 : 2x + y - z - 2 = 0 \; ; \quad \mathscr{P}_2 : x + 3y + 7z - 11 = 0 \; , \quad A : (1,2,1) \; .$$
$$\mathscr{P}_1 : 2x - y + 1 = 0 \; ; \quad \mathscr{P}_2 : 3y - z - 2 = 0 \; , \quad A : (3,-1,2) \; .$$
$$\mathscr{P}_1 : x + y + z - 1 = 0 \; ; \quad \mathscr{P}_2 : -x + y - z + 1 = 0 \; , \quad A : (1,1,2) \; .$$

1. Vérifier que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.
2. Donner des équations paramétriques de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
3. Donner des équations paramétriques de $\mathscr{D}$.
4. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite orthogonale à $\mathscr{P}_1$ passant par A.
5. Donner des équations paramétriques et implicites de la droite orthogonale à $\mathscr{P}_2$ passant par A.
6. Donner des équations paramétriques et implicites du plan orthogonal à $\mathscr{D}$ passant par A.
7. Calculer la distance de A à $\mathscr{P}_1$, puis à $\mathscr{P}_2$, puis à $\mathscr{D}$.

Exercice 5.14. (***) *Perpendiculaire commune à deux droites*

Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites non parallèles dans l'espace affine eculidien réel $\mathbf{R}^3$.
$\mathscr{D}_1$ est donnée par un point A_1 et un vecteur directeur $\vec{u_1}$.
$\mathscr{D}_2$ est donnée par un point A_2 et un vecteur directeur $\vec{u_2}$.
On note $\vec{v} = \vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$.

1. Montrer que $\vec{v} \neq \vec{0}$.
2. On considère le plan $\mathscr{P}_1$ passant par A_1 et de direction $\vec{u_1}, \vec{v}$ et le plan $\mathscr{P}_2$ passant par A_2 et de direction $\vec{u_2}, \vec{v}$.

   Montrer que $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ est une droite de direction $\vec{v}$.

   On la notera Δ.
3. Montrer que $\mathscr{P}_1$ coupe $\mathscr{D}_2$ en un point qu'on notera H_2 et que $\mathscr{P}_2$ coupe $\mathscr{D}_1$ en un point qu'on notera H_1.

   Montrer que $H_1 \in \mathscr{D}_1 \cap \Delta$ et $H_2 \in \mathscr{D}_2 \cap \Delta$.

   La droite Δ est appelée la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

   Pourquoi cette appelation ?
4. Montrer que pour tout point M_1 de $\mathscr{D}_1$ et tout point M_2 de $\mathscr{D}_2$, $M_1M_2 \geqslant H_1H_2$.

   Montrer qu'on a égalité si et seulement si $M_1 = H_1$ et $M_2 = H_2$.

   Ainsi H_1H_2 est la distance entre les deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
5. Montrer en utilisant la relation $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1H_1} + \overrightarrow{H_2A_2} + \overrightarrow{H_1H_2}$ que
$$H_1H_2 = \frac{|[\vec{u_1}, \vec{u_2}, \overrightarrow{A_1A_2}]|}{\|\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}\|}.$$
6. Déterminer la perpendiculaire commune aux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ si elle existe dans les deux cas suivants :

   (a) $\mathscr{D}_1$ est donnée par les équations paramétriques $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

   $\mathscr{D}_2$ est donnée par les équations implicites $\begin{cases} 3x + 2y + 4z + 8 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

   (b) $\mathscr{D}_1$ est donnée par les équations implicites $\begin{cases} x + z = 2 \\ y = -1 \end{cases}$.

   $\mathscr{D}_2$ est donnée par les équations implicites $\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

Exercice 5.15. **(***)** *Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, trois vecteurs non coplanaires, donnés par leurs coordonnées. On considérera les cas suivants.

$$\vec{u} : (1,0,0)\ , \quad \vec{v} : (1,1,0)\ , \quad \vec{w} : (1,1,1)\ .$$
$$\vec{u} : (0,2,2)\ , \quad \vec{v} : (1,0,1)\ , \quad \vec{w} : (1,2,0)\ .$$
$$\vec{u} : (0,2,1)\ , \quad \vec{v} : (2,1,-1)\ , \quad \vec{w} : (-1,2,1)\ .$$
$$\vec{u} : (1,-3,2)\ , \quad \vec{v} : (-5,3,4)\ , \quad \vec{w} : (-2,3,-1)\ .$$

1. Calculer $\|\vec{u}\|$. On pose $\vec{u}' = (1/\|\vec{u}\|)\vec{u}$. Calculer les coordonnées de $\vec{u}'$.
2. On pose :
$$\vec{v}_1 = \vec{v} - (\vec{u}' \cdot \vec{v})\vec{u}'\ ,$$
puis $\vec{v}' = (1/\|\vec{v}_1\|)\vec{v}_1$. Calculer les coordonnées de $\vec{v}'$.
3. On pose :
$$\overrightarrow{w_1} = \vec{w} - (\vec{u}' \cdot \vec{w})\vec{u}' - (\vec{v}' \cdot \vec{w})\vec{v}'\ ,$$
puis $\vec{w}' = (1/\|\overrightarrow{w_1}\|)\overrightarrow{w_1}$. Calculer les coordonnées de $\vec{w}'$.
4. Vérifier que $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ est une base orthonormée. (On rappelle qu'une base est *orthonormée* si tous ses éléments sont des vecteurs de norme 1 et s'ils sont deux à deux orthogonaux.)
5. Démontrer que si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base quelconque de l'espace vectoriel, alors $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ est une base orthonormée.

Géométrie complexe

Exercice 5.16. **(**)**

À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe $f(z) = (z - 4\mathrm{i})/(z + 2)$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. L'ensemble des points d'affixe z tels que $f(z)$ est réel est un cercle.
2. L'ensemble des points d'affixe z tels que $f(z)$ est réel est une droite privée d'un point.
3. L'ensemble des points d'affixe z tels que $f(z)$ est imaginaire pur est un cercle privé d'un point.
4. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$ est un cercle.
5. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$ est une droite privée d'un point.
6. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$ est une droite.

Exercice 5.17. (**)

Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbf{C}$

1. $\{z \in \mathbf{C} \mid |z - \mathrm{i}| = 1\}$,
2. $\{z \in \mathbf{C} \mid |z - 1 + \mathrm{i}| \leq \sqrt{2}\}$,
3. $\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}((1+\mathrm{i})z) = 0\}$,
4. $\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}((3-2\mathrm{i})z) = 2\}$,
5. $\{z \in \mathbf{C} \mid \arg\left(\dfrac{z-2}{z}\right) = 0\}$,
6. $\{z \in \mathbf{C} \mid \arg\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\}$,
7. $\{z \in \mathbf{C} \mid \arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = \pi\}$.

Exercice 5.18. (*)

Soient A, B, C, D quatre points d'un plan affine. Soient I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$, $[D, A]$, $[A, C]$, $[B, D]$.

1. En utilisant les nombres complexes, montrer que les segments $[I, K]$, $[J, L]$ et $[M, N]$ ont le même milieu.
2. Montrer que le quadrilatère de sommets I, J, K, L est un parallélogramme.

Exercice 5.19. (*)

L'application qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $\mathrm{i}z - 1$ est (vrai ou faux et pourquoi) ?

1. une translation.
2. une homothétie de rapport i.
3. une rotation.
4. une rotation dont le centre est le point d'affixe 1.
5. une rotation dont le centre est le point d'affixe $-(1 + \mathrm{i})/2$.
6. une rotation d'angle $-\pi/2$.

Exercice 5.20. (*)

L'application qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $\mathrm{i}\,\overline{z}$ est (vrai ou faux et pourquoi) ?

1. une homothétie de rapport i.
2. une rotation.
3. une symétrie.
4. la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
5. la symétrie par rapport à la première bissectrice.

Exercice 5.21. (*)
Décrire chaque transformation suivante du plan complexe en donnant son type (translation, rotation, homothétie, symétrie, autre ?) et ses caractéristiques (vecteur, angle, centre, rapport, droite, etc).

1. $z \mapsto z + \mathrm{i}$
2. $z \mapsto z + 2 - \mathrm{i}$
3. $z \mapsto \mathrm{i}z - 1$
4. $z \mapsto -z - 2\mathrm{i}$
5. $z \mapsto (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z - 2$
6. $z \mapsto (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})z/2 + 2$
7. $z \mapsto -\bar{z}$

Exercice 5.22. (**)
Donner la forme des transformations suivantes, vues comme applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$:

1. une translation de vecteur d'affixe $1 + \mathrm{i}$,
2. une homothétie de centre 1 et de rapport 2,
3. une rotation de centre $-\mathrm{i}$ et d'angle $\pi/2$,
4. la composée d'une rotation de centre 1 et d'angle $2\pi/3$ (d'abord) et d'une translation de vecteur d'affixe 1 (ensuite),
5. la composée d'une translation de vecteur d'affixe 1 (d'abord) et d'une rotation de centre 1 et d'angle $2\pi/3$ (ensuite),

Exercice 5.23. (**)
On considère des transformations du plan dans lui-même, vues comme applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

1. Montrer que la composée de deux translations est une translation.
2. Montrer que la composée de deux rotations est une rotation ou une translation. À quelle condition sur les angles a-t-on une translation ?
3. Montrer que la composée de deux symétries axiales est une rotation ou une translation. À quelle condition sur les axes a-t-on une translation ?

Exercice 5.24. (**)
Soit A, B deux points du plan. On considère les rotations r_A, r_B de centres respectifs A, B et d'angle π.

1. Montrer que la composée $r_B \circ r_A$ est une translation.
2. On suppose qu'on a un point C tel que $r_A(r_B(r_A(r_B(C)))) = C$. Montrer qu'alors les points A et B sont confondus.

Exercice 5.25. (**)

Soit A, B, C trois points du plan. On considère les rotations r_A, r_B, r_C de centres respectifs A, B, C et d'angle $2\pi/3$.

1. Montrer que la composée $r_C \circ r_B \circ r_A$ est une translation.
2. À quelle condition sur A, B, C la composée $r_C \circ r_B \circ r_A$ est-elle l'application identité $z \mapsto z$?

Exercice 5.26. (**)

On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi/3}$. Soit A, B, C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si on a $z_A + j\, z_B + j^2\, z_C = 0$ ou $z_A + j^2\, z_B + j\, z_C = 0$.

Exercice 5.27. (***)

On va démontrer le théorème de Napoléon (pour savoir si l'empereur a effectivement démontré ce théorème, rendez-vous sur Wikipedia ou sur
`https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/pe/node19.html`).

Soit A, B, C trois points quelconques du plan, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C. On suppose qu'on tourne autour de ABC dans le sens trigonométrique direct. On construit à l'extérieur du triangle ABC trois triangles équilatéraux ABI, BCJ et CAK. On note P, Q, R les centres de ces triangles équilatéraux.

1. Donner les affixes des points I et P en fonction de z_A et z_B.
2. Donner de mêmes les affixes des points J, K, Q, R en fonction de z_A, z_B et z_C.
3. Montrer que le triangle PQR est équilatéral.

Exercice 5.28. (***) *Inverses et commutateurs*

On considère des transformations du plan dans lui-même, vues comme applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

1. Soit f une transformation affine, c'est-à-dire de la forme $z \mapsto az + b$. Montrer qu'il existe une unique transformation affine g telle que la composition $g \circ f$ soit l'identité. Montrer que dans le cas, la transformation $f \circ g$ est aussi l'identité.

   La transformation g est alors appelée l'*inverse* de f, et notée f^{-1}.
2. Montrer que l'inverse d'une translation est une translation, et l'inverse d'une rotation une rotation dont on déterminera l'angle.
3. Étant donné deux transformations f et g, on appelle *commutateur* de f et g, noté $[f, g]$ la transformation $g^{-1} \circ f^{-1} \circ g \circ f$. Montrer que si f et g sont deux transformations affines, alors leur commutateur est une translation.

4. Montrer que le commutateur de deux translations est l'identité.
5. À quelle condition le commutateur de deux rotations est-il l'identité ? (On pourra utiliser le fait qu'une translation est l'identité si et seulement si elle a un point fixe.)
6. À quelle condition le commutateur de deux homothéties est-il l'identité ?
7. Soit A, B, C, D quatre points distincts du plan. Montrer qu'il existe une unique transformation affine envoyant A en B et D en C, on la note f_1.
8. De façon semblable on note f_2 l'unique transformation envoyant A en C et D en B. Montrer que le commutateur $[f_1, f_2]$ est l'identité.

Compléments

5.1. La géométrie du triangle. — Les Éléments d'Euclide, écrits au IIIe siècle avant notre ère, contenaient déjà de nombreux résultats sur la géométrie des triangles. Les formulations d'Euclide sont très différentes des nôtres, car il ne disposait pas des fonctions trigonométriques et raisonnait uniquement en termes de longueurs et d'aires. De plus il n'était pas question de traiter les quantités à ôter comme des quantités négatives à ajouter. Pour cette raison, les propositions 12 et 13 du livre II des Éléments, séparent le cas d'un triangle obtusangle (ayant un angle obtus) et celui d'un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus). La proposition 12 est énoncée comme suit. Avec un peu de réflexion, vous devriez pouvoir y reconnaître le théorème d'Al-Kashi.

Dans les triangles obtusangles, le carré du côté qui soutient l'angle obtus est plus grand que les carrés des deux autres côtés, de la quantité de deux fois le rectangle formé d'un des côtés contenant l'angle obtus, à savoir celui sur le prolongement duquel tombe la hauteur, et de la ligne prise en-dehors entre le pied de la hauteur et l'angle obtus.

L'astronome et mathématicien Al-Battani généralisa le résultat d'Euclide à la géométrie sphérique au début du Xe siècle, ce qui lui permit d'effectuer des calculs de distance angulaire entre étoiles. Ghiyath Al-Kashi, mathématicien de l'école de Samarcande, mit le théorème sous une forme utilisable pour la triangulation, au cours du XVe siècle.

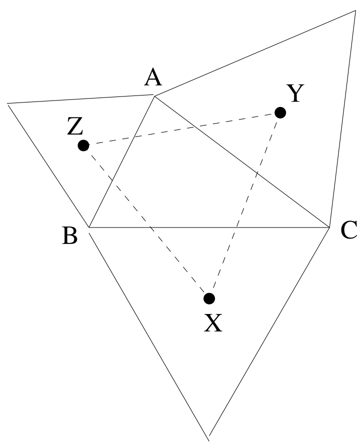


FIGURE 30. Le théorème de Napoléon.

Le théorème suivant, n'a été attribué (faussement) à Napoléon Bonaparte qu'au début du vingtième siècle. Il a été maintes fois redécouvert, et on ignore s'il était ou non connu des grecs.

Théorème 5.64

Soit ABC un triangle quelconque. Soient X, Y, Z les isobarycentres des 3 triangles équilatéraux extérieurs au triangle ABC, construits sur chacun des trois côtés. Le triangle XYZ est équilatéral (figure *30*).

Il est connu que Napoléon se piquait de mathématiques, et qu'il a eu plusieurs conversations avec Laplace et Lagrange. Sur ses capacités réelles, les avis divergent, selon l'interprétation de ce que lui aurait dit Laplace, lors d'un dîner le 11 décembre 1797. Voici deux versions.

1. *H. Poincaré :* « Nous attendions tout de vous, Général, sauf des leçons de géométrie »
2. *H.S.M. Coxeter et S.L. Greitzer :* « The last thing we want from you, General, is a lesson in geometry »

Cette anecdote a été si souvent rapportée qu'il peut être utile d'écouter un témoin : Dubois-Aymé (1779–1846) [11].

> Entouré d'artistes et de savants, il [Bonaparte] en retira un éclat de savoir qui éblouit toujours la multitude. L'Institut, selon l'ancienne coutume de toutes les académies, d'appeler dans leur sein des hommes puissants pour s'en faire un appui, l'élut membre de la section de mécanique à la place de Carnot proscrit, et il tira habilement parti de cette couronne académique dont le faux éclat éblouit ses soldats et sembla l'élever au-dessus de tous les autres généraux, ses rivaux de gloire.
>
> Je me rappelle qu'à cette époque, Bonaparte, entretenant un jour le célèbre Laplace et quelques autres membres de l'Institut d'un nouvel ouvrage, intitulé *Geometria del compasso*, dont Mascheroni lui avait récemment, fait hommage à Milan, fit, à l'occasion d'une proposition tout à fait élémentaire, une figure sur le tableau avec de la craie pour mieux se faire comprendre, prétendit-il, et que Laplace, soit moquerie comme je le crus alors, soit flagornerie comme je l'ai cru depuis, lui dit « Je ne m'attendais pas, général,

11. Dubois-Aymé : Marie-Thérèse de Bouès. Pascal Beyls éd. Grenoble, p. 233 (2009).

> à recevoir une leçon de mathématiques de vous ». Les aides-de-camp de Bonaparte et ses flatteurs, il n'en manquait pas déjà, répétèrent à l'envi ce qu'ils appelaient l'aveu de Laplace lui-même de la supériorité de Napoléon sur lui en mathématiques, et la foule hébétée le répéta après eux. La vérité est que Bonaparte avait oublié depuis longtemps le peu de mathématiques dont il avait eu besoin pour entrer dans l'artillerie avant la Révolution, et que lorsqu'il fut reçu à l'Institut il n'eût certes pas pu être reçu à l'école polytechnique.

À vous de conclure ! En attendant, vous pouvez démontrer vous-même le « théorème de Napoléon », par exemple en utilisant le calcul dans le plan complexe.

Le magnifique théorème suivant, en revanche, ne prête pas à polémique. Il a bien été démontré par Frank Morley (1860-1937), en 1899.

Théorème 5.65

Soit ABC un triangle quelconque. Soient X, Y, Z les points d'intersection deux à deux des trissectrices adjacentes du triangle. Le triangle XYZ est équilatéral (figure *31*).

Pourquoi les grecs ne l'avaient-ils pas trouvé ? Peut-être parce qu'il est impossible de construire les trissectrices d'un angle à la règle et au compas...

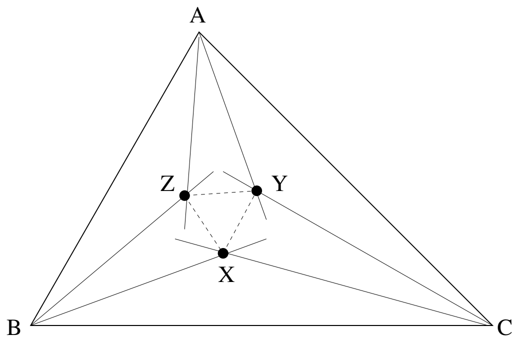


FIGURE 31. Le théorème de Morley.

5.2. La proposition XXXII. — Le père de Blaise Pascal avait peut-être acheté « Les quinze livres des éléments géométriques d'Euclide : plus le livre des donnez du mesme

Euclide aussi traduict en françois par ledit Henrion, et imprimé de son vivant », en 1632. Voici ce qu'on y lit, page 54.

THEOR 22. PROP. XXXII

> En tout triangle, l'vn des costez estant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux opposez interieurs ; et de chacun triangle les trois angles interieurs sont egaux à deux droicts.

Pas de quoi s'émerveiller pensez-vous ? Commencez par vérifier que vous savez le démontrer, puis lisez la suite. La scène se passe en 1635 et c'est la sœur de Blaise qui raconte.

> Son génie pour la géométrie commença à paraître qu'il n'avait encore que douze ans, par une rencontre si extraordinaire, qu'il me semble qu'elle mérite bien d'être déduite en particulier.
>
> Mon père était savant dans les mathématiques, et il avait habitude par là avec tous les habiles gens en cette science, qui étaient souvent chez lui. Mais comme il avait dessein d'instruire mon frère dans les langues, et qu'il savait que la mathématique est une chose qui remplit et satisfait l'esprit, il ne voulut point que mon frère en eût aucune connaissance, de peur que cela ne le rendit négligent pour le latin et les autres langues dans lesquelles il voulait le perfectionner. Par cette raison il avait fermé tous les livres qui en traitent. Il s'abstenait d'en parler avec ses amis, en sa présence : mais cette précaution n'empêchait pas que la curiosité de cet enfant ne fût excitée, de sorte qu'il priait souvent mon père de lui apprendre les mathématiques. Mais il le lui refusait en lui proposant cela comme une récompense. Il lui promettait qu'aussitôt qu'il saurait le latin et le grec, il les lui apprendrait. Mon frère, voyant cette résistance, lui demanda un jour ce que c'était que cette science, et de quoi on y traitait ; mon père lui dit en général que c'était le moyen de faire des figures justes, et de trouver les proportions qu'elles ont entre elles, et en même temps lui défendit d'en parler davantage et d'y penser jamais. Mais cet esprit qui ne pouvait demeurer dans ces bornes, dès qu'il eut cette simple ouverture, que la mathématique donnait des moyens de faire des figures infailliblement justes, il se mit lui-même à rêver, et, à ses heures de récréation, étant venu dans une salle où il avait accoutumé de se divertir, il prenait du charbon et faisait des figures sur des carreaux, cherchant les moyens, par exemple, de faire un cercle parfaitement rond, un triangle dont les côtés et les angles fussent égaux, et d'autres choses semblables. Il trouvait tout cela lui seul sans peine ; ensuite il cherchait les proportions des figures entre elles. Mais comme le soin de mon père avait été si grand de lui cacher

toutes ces choses qu'il n'en savait pas même les noms, il fut contraint lui-même de s'en faire. Il appelait un cercle un rond, une ligne une barre, ainsi des autres. Après ces noms il se fit des axiomes, et enfin des démonstrations parfaites ; et comme l'on va de l'un à l'autre dans ces choses, il passa et poussa sa recherche si avant, qu'il en vint jusqu'à la trente-deuxième proposition du premier livre d'Euclide. Comme il en était là-dessus, mon père entra par hasard dans le lieu où il était, sans que mon frère l'entendît ; il le trouva si fort appliqué, qu'il fut longtemps sans s'apercevoir de sa venue. On ne peut dire lequel fut le plus surpris ; ou le fils de voir son père, à cause de la défense expresse qu'il lui en avait faite, ou le père de voir son fils au milieu de toutes ces choses. Mais la surprise du père fut bien plus grande lorsque lui ayant demandé ce qu'il faisait, il lui dit qu'il cherchait telle chose, qui était la trente-deuxième proposition du premier livre d'Euclide. Mon père lui demanda ce qui l'avait fait penser à cela. Il dit que c'était qu'il avait trouvé telle chose. Et sur cela, lui ayant fait encore la même question, il lui dit encore quelques démonstrations qu'il avait faites ; et enfin en rétrogradant et s'expliquant toujours par les noms de rond et de barre, il en vint à ses définitions et à ses axiomes.

Mon père fut si épouvanté de la grandeur et de la puissance de ce génie, que sans lui dire un mot il le quitta et alla chez M. Le Pailleur, qui était son ami intime, et qui était aussi très savant. Lorsqu'il y fut arrivé, il demeura immobile comme transporté. M. Le Pailleur, voyant cela, et voyant même qu'il versait quelques larmes, fut épouvanté, et le pria de ne lui pas celer plus longtemps la cause de son déplaisir. Mon père lui répondit : « Je ne pleure pas d'affliction, mais de joie ; vous savez le soin que j'ai pris pour ôter à mon fils la connaissance de la géométrie, de peur de le détourner de ses autres études : cependant voyez ce qu'il a fait. » Sur cela il lui montra même ce qu'il avait trouvé, par où l'on pouvait dire en quelque façon qu'il avait trouvé la mathématique.

M. Le Pailleur ne fut pas moins surpris que mon père l'avait été, et lui dit qu'il ne trouvait pas juste de captiver plus longtemps cet esprit, et de lui cacher encore cette connaissance ; qu'il fallait lui laisser voir les livres sans le retenir davantage.

Mon père, ayant trouvé cela à propos, lui donna les Éléments d'Euclide, pour les lire à ses heures de récréation. Il les vit et les entendit tout seul, sans avoir jamais eu besoin d'explication ; et pendant qu'il les voyait, il composait et allait si avant, qu'il se trouvait régulièrement aux conférences qui

> se faisaient toutes les semaines, où tous les habiles gens de Paris s'assemblaient pour porter leurs ouvrages, et pour examiner ceux des autres. Mon frère tenait fort bien son rang, tant pour l'examen que pour la production ; car il était de ceux qui y portaient le plus souvent des choses nouvelles. On voyait souvent aussi dans ces assemblées des propositions qui étaient envoyées d'Allemagne et d'autres pays étrangers, et on prenait son avis sur tout avec autant de soin que de pas un autre ; car il avait des lumières si vives, qu'il est arrivé qu'il a découvert des fautes dont les autres ne s'étaient point aperçus. Cependant il n'employait à cette étude que les heures de récréation ; car il apprenait le latin sur des règles que mon père lui avait faites exprès. Mais comme il trouvait dans cette science la vérité qu'il avait toujours cherchée si ardemment, il en était si satisfait, qu'il y mettait tout son esprit ; de sorte que, pour peu qu'il s'y occupât, il y avançait tellement, qu'à l'âge de seize ans il fit un Traité des Coniques qui passa pour un si grand effort d'esprit, qu'on disait que depuis Archimède on n'avait rien vu de cette force. Tous les habiles gens étaient d'avis qu'on l'imprimât dès lors, parce qu'ils disaient qu'encore que ce fût un ouvrage qui serait toujours admirable, néanmoins, si on l'imprimait dans le temps que celui qui l'avait inventé n'avait encore que seize ans, cette circonstance ajouterait beaucoup à sa beauté : mais comme mon frère n'a jamais eu de passion pour la réputation, il ne fit point de cas de cela ; et ainsi, cet ouvrage n'a jamais été imprimé.

5.3. Les Sangakus. — La bataille de Sekigahara s'est déroulée les 20 et 21 octobre 1600 sous une pluie battante. Elle allait décider de l'avenir du pays pour 2 siècles et demi. Le vainqueur, Ieyasu Tokugawa, s'empara du pouvoir et transféra la capitale dans une petite bourgade tranquille promise à un certain avenir : l'ancienne Edo devint finalement Tokyo. Sous l'ère Edo donc, les dirigeants successifs appliquèrent une stricte politique d'isolement qui permit de maintenir la paix. Commerçants chinois, missionnaires européens, tous ces fauteurs de troubles porteurs d'idées nouvelles n'étaient pas les bienvenus. Ceci engendra le développement de particularités culturelles originales dans tous les domaines, du théâtre à la poésie, en passant par la musique... et les mathématiques. Certains prirent l'habitude d'accrocher au fronton des temples des planches de bois décorées exposant des énigmes mathématiques, les *sangakus*. Exposés aux intempéries et à l'indifférence, beaucoup de ces sangakus du XVII^e^ au XIX^e^ siècle se sont perdus : environ 800 seulement ont été conservés. Les auteurs viennent de toutes les classes sociales, jeunes ou vieux, hommes ou femmes. Offrande aux Dieux, ex-voto, publicité, ostentation ou simple amusement ? Si le sens religieux ou mystique s'est perdu, en revanche l'intérêt esthétique et la signification mathématique restent parfaitement clairs. Jusque de nos jours, des passionnés affichent encore leurs énigmes, et il en est même qui en proposent sur le web. Ce sont en général des problèmes de géométrie euclidienne, à base de cercles, de carrés et de triangles.

Nous vous proposons celui de la figure 32. Dans un cercle de rayon R on trace 4 cercles dans chacun des quarts du cercle initial, tangents entre eux et au grand cercle. Entre ces 4 cercles, on considère le cercle tangent aux 4, concentrique au grand cercle. Soit r son rayon : quel est le rapport de r à R ? Essayez de jouer le jeu : pas de logiciel de calcul, pas d'équation algébrique, pas de nombres complexes… Après tout peu importe : faites comme vous voulez, mais trouvez $3-2\sqrt{2}$.

FIGURE 32. Sangaku du temple d'Isaniwa Jinjya, 107×77 cm (1937)

5.4. La règle de Sarrus. — Âgé de 17 ans, Pierre-Frédéric Sarrus [12], natif de Saint-Affrique dans l'Aveyron, descend à Montpellier pour y faire ses études. Nous sommes à la rentrée 1815, Napoléon vient d'être chassé du pouvoir, et il ne fait pas bon être à la fois protestant et bonapartiste. Sarrus, qui hésite encore entre mathématiques et médecine, va l'apprendre à ses dépens. Pour exercer la médecine, il faut un « certificat de bonne vie et mœurs », qu'il demande au maire de Saint-Affrique. Voici la réponse.

> Le maire pense qu'un jeune homme auteur et propagateur de chansons séditieuses, outrageantes pour le roi et la famille royale, qui avant l'interrègne se permit d'arracher et de fouler aux pieds le ruban blanc que portait à la boutonnière un de ses camarades, et qui, dans une autre circonstance, lui prend la fleur de lys et fait semblant de la conspuer, ne peut être un bon citoyen, et ne mérite pas le certificat qu'il demande.

12. J.-B. Hirriart-Urruty et H. Caussinus : Sarrus, Borel, Deltheil. Le Rouergue et ses mathématiciens *Gazette de la SMF (104) p. 88–97 (2005)*

Ce sera donc les mathématiques. Il deviendra professeur et même doyen de la Faculté des Sciences de Strasbourg. Il est l'auteur de publications d'un nombre et d'un niveau tout à fait respectables, et il est quelque peu injuste qu'il soit surtout connu pour sa règle de calcul d'un déterminant d'ordre 3, qui n'est au fond qu'une astuce mnémotechnique, et qu'il n'a probablement pas publiée lui-même. Elle apparaît en 1846 dans les « Éléments d'Algèbre » de P.J.E. Finck, son collègue à l'Université de Strasbourg, à propos de la résolution des systèmes linéaires 3×3.

> Pour calculer, dans un exemple donné, les valeurs de x, y, et z, M. Sarrus a imaginé la méthode pratique suivante, qui est fort ingénieuse. D'abord on peut calculer le dénominateur, et à cet effet on écrit les coefficients des inconnues ainsi
>
> $$\begin{array}{rlll} & a & b & c \\ & a' & b' & c' \\ & a'' & b'' & c'' \\ \text{On répète les trois premiers} & a & b & c \\ \text{et les trois suivants} & a' & b' & c' \end{array}$$
>
> Alors partant de a, on prend diagonalement du haut en bas, en descendant à la fois d'un rang, et reculant d'autant à droite, $ab'c''$; on part de a' de même, et on a $a'b''c$; de a'', et on trouve $a''bc'$; on a ainsi les trois termes positifs (c'est-à-dire à prendre avec leurs signes) du dénominateur. On commence ensuite par c et descendant de même vers la gauche on a $cb'a''$, $c'b''a$, $c''ba'$, ou les trois termes négatifs (ou plutôt les termes qu'il faut changer de signe).

5.5. Les géodésiens. — Si dans un triangle on connaît les longueurs de deux côtés et la valeur de l'angle entre ces deux côtés, alors on peut calculer l'autre côté et les deux autres angles, grâce au théorème d'Al-Kashi. De même si on connaît la longueur d'un côté et la valeur des deux angles à ses extrémités, alors on peut calculer les longueurs des deux autres côtés et l'angle restant. Connus au moins depuis Euclide, ces résultats ont été longtemps utilisés pour les calculs de longueur, tant en astronomie que pour les relevés terrestres. Il sont la base de la *triangulation*, seule méthode possible pour mesurer de grandes distances, avant le laser et les satellites.

Ses réflexions sur la gravitation universelle avaient conduit Newton à affirmer que la Terre est un ellipsoïde aplati aux pôles (Principia Naturalis, 1687). Depuis, l'Europe savante, et en particulier l'Académie Royale des Sciences se passionnait pour la vérification de cette affirmation. Les Cassini, père puis fils, avaient recueilli une masse impressionnante de données en triangulant le territoire français. Leurs conclusions semblaient infirmer celles de Newton. La polémique s'étend sur des centaines de pages dans les comptes-rendus de l'Académie pour les années 1720. Arguant de considérations géopolitiques autant que scientifiques, le secrétaire de l'Académie Maurepas, réussit à persuader le roi Louis XV de financer deux expéditions. L'une ira en Laponie mesurer un degré de méridien au voisinage du pôle, l'autre devra mesurer un degré de méridien à l'équateur. Si la Terre est bien aplatie, un degré de méridien au pôle doit être plus court qu'en France, et à l'équateur il doit être plus long.

Le 16 mai 1735, l'expédition de l'équateur, composée de dix scientifiques et ingénieurs s'embarque à La Rochelle, en direction du Pérou, une colonie espagnole qui recouvrait la plus grande partie de la Bolivie, de l'Equateur et du Pérou actuels. Il est impossible de décrire ici l'extraordinaire aventure scientifique et humaine que fut cette expédition [13]. Il y eut dans la dizaine d'années que dura cette épopée, deux meurtres, une dizaine de procès, d'innombrables maladies, un mort de fièvre jaune, un dans un accident d'échafaudage, un disparu dans la jungle, un mariage, des affaires de cœur, du trafic d'or et d'objets de luxe, une affaire d'espionnage.

Scientifiquement, rien ne semblait pourtant présenter de difficulté insurmontable. Pour mesurer un degré de méridien, il faut essentiellement trois étapes. La première consiste à mesurer, par arpentage direct sur le terrain, une base rectiligne. La seconde est la triangulation. On construit à partir de la base un maillage, composé de triangles dont on mesure tous les angles, et dont on calcule les longueurs des côtés. On en déduit, par projection orthogonale, la longueur d'un arc de méridien. Il reste ensuite à déterminer la différence des latitudes des deux extrémités de l'arc dont la longueur a été mesurée.

Suite aux difficultés du voyage, la mesure de la base ne put pas avoir lieu avant l'automne 1736. Une toise, spécialement amenée de Paris, sert d'étalon pour des perches en bois, que l'on met bout à bout pour mesurer, en deux équipes indépendantes, une étendue de terrain préalablement défriché, aplani et aménagé pour les mesures. Selon l'heure de la journée, il faut tenir compte des variations des longueurs des perches avec la température et l'humidité. Quand les deux équipes confrontent leurs résultats, la différence sur plus de 12 kilomètres est de l'ordre de la dizaine de centimètres !

Forts de ce succès, les savants se lancent dans une triangulation d'envergure : 43 triangles seront mesurés sur une longueur de 354 kilomètres. La région de Quito où se déroulent les mesures est montagneuse, et pour être bien visibles, les repères marquant les extrémités des triangles sont placés en altitude. Dès la première visée, les savants passent une nuit à 4600 mètres, sous une tempête de neige. Ce n'est que le début d'une épreuve de trois ans, passés pour l'essentiel sur des sentiers de montagne ou dans des campements de fortune, où ni les nombreuses maladies, ni les vols de matériel, ni la

13. F. Trsytram : Le procès des étoiles, *Seghers, Paris (1979)*

crainte des animaux sauvages ne les empêcheront de mesurer leurs triangles, toujours avec le souci de précision le plus extrême. Leur plan initial prévoyait trois équipes, mesurant chacune deux angles de chaque triangle, de manière à ce que tous les angles soient systématiquement mesurés deux fois. Même si les dissensions et les circonstances les empêcheront de s'en tenir à un programme aussi contraignant, c'est la satisfaction du travail bien fait qui domine fin 1739. Ils s'offrent même le luxe, nécessaire à leurs yeux, de mesurer une deuxième base à l'autre extrémité de leur triangulation, afin de vérifier leurs calculs en les reprenant à l'envers. Tous pensent que le plus facile reste à faire : déterminer la latitude des deux extrémités de l'arc. Il leur faudra encore des années de travail et de polémique pour parvenir à un résultat.

Non pas que l'enjeu scientifique soit bien grand : en 1737, une mauvaise nouvelle leur est parvenue. Fortement aidé par l'astuce et la puissance de calcul de Clairaut, Maupertuis, qui dirigeait l'expédition en Laponie, n'a mis que quelques mois à ramener le résultat qu'on attendait : la Terre est bien aplatie aux pôles. Maupertuis s'est déjà fait représenter en majesté pour la postérité, devant un globe terrestre exagérément aplati, la main négligemment posée sur un exemplaire des *Principia Naturalis* de Newton !

Longtemps après cette aventure, la triangulation de la terre devait occuper encore de nombreux mathématiciens. Enjeux scientifiques, mais aussi économiques et surtout militaires, les raisons pour établir des cartes précises, et donc mesurer des triangulations sur le terrain ne manquaient pas. Au cours des XVIII[e] et XIX[e] siècles, ces mesures furent souvent confiées à des militaires, qui devaient parfois se montrer aussi bons alpinistes que mathématiciens. Lors de la triangulation des Pyrénées en 1825, les officiers géodésiens Peytier et Hossard utilisèrent pour leurs calculs le sommet du Balaïtous (3144m). En 1865, C. Packes, pensant être le premier à réaliser l'ascension de ce pic, fut plutôt déçu d'y trouver le repère que Peytier et Hossard avaient édifié 40 ans plus tôt. Un sommet proche a été baptisé de leurs noms, et un autre s'appelle « pointe des géodésiens ». Dans les Alpes, la pointe Helbronner, la pointe Dufour, la pointe Durand portent aussi des noms de géodésiens.

Annales

Énoncé partiel 2016

Pour les exercices 2 à 6, justifiez succinctement chaque réponse donnée.

Dans cet énoncé, $\mathbf{R}$ *désigne l'ensemble des nombres réels et* $\mathbf{N}$ *l'ensemble des entiers positifs ou nuls.*

Question de cours. Donner la définition de la limite d'une fonction en un point.

Exercice 1. Représenter avec soin sur des dessins les ensembles qui suivent en utilisant au besoin des hachures de couleur ; préciser la nature des ensembles E, F et H.

1. $E = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \,\}$;
2. $F = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - 2y = 1 \,\}$;
3. $G = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - 2y \leqslant 1 \,\}$;
4. $H = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x + 1)^2 + y^2 \leqslant 1 \,\}$;
5. $E \cup H$;
6. $E \cap G$;
7. $H - G$;

Exercice 2. On rappelle que $\mathbf{R}_+ = \{\, x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 0 \,\}$. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ l'application donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = x^2.$$

et $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ l'application donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

1. Déterminer $g \circ f$.
2. Déterminer $f \circ g \circ f$.
3. L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?
4. L'applicaton g est-elle bijective ? Si c'est le cas, déterminer sa réciproque.

Exercice 3. Démontrer les assertions suivantes (on pourra faire une preuve par récurrence sur n) :

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(k - \frac{1}{2}\right) = \frac{n^2 - 1}{2}$;
2. $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k3^k = \frac{2n-1}{4} 3^{n+1} + \frac{3}{4}$.

Dans les exercices qui suivent, on pourra utiliser sans démonstration que, pour tout $a \in \mathbf{R}_+$*,*

$$\sqrt{x} \xrightarrow[x \to a]{} \sqrt{a},$$

et, pour tout $a \in \mathbf{R}$*,*

$$|x| \xrightarrow[x \to a]{} |a|.$$

Exercice 4. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que f admet la limite 2 en 1.

1. La fonction f^2 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $f^2 : x \mapsto (f(x))^2$ admet-elle toujours une limite en 1 ? Si c'est le cas, donner la valeur de la limite.
2. La fonction $1/f$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $1/f : x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ admet-elle toujours une limite en 1 ? Si c'est le cas, donner la valeur de la limite.
3. La fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \sqrt{f(1-x)}$ admet-elle toujours une limite en 1 ? Si c'est le cas, donner la valeur de la limite. Cette fonction admet-elle toujours une limite en 0 ? Si c'est le cas, donner la valeur de la limite.

Exercice 5. Déterminer l'existence et l'éventuelle valeur des limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{|x|}}{x^2 + 2}$;
2. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2 - 1}$;
3. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{|x+1|}{x^2 - 1}$.

Exercice 6. Soit $a \in \mathbf{R}$.

1. Donner, sans la démontrer, la formule du binôme de Newton.

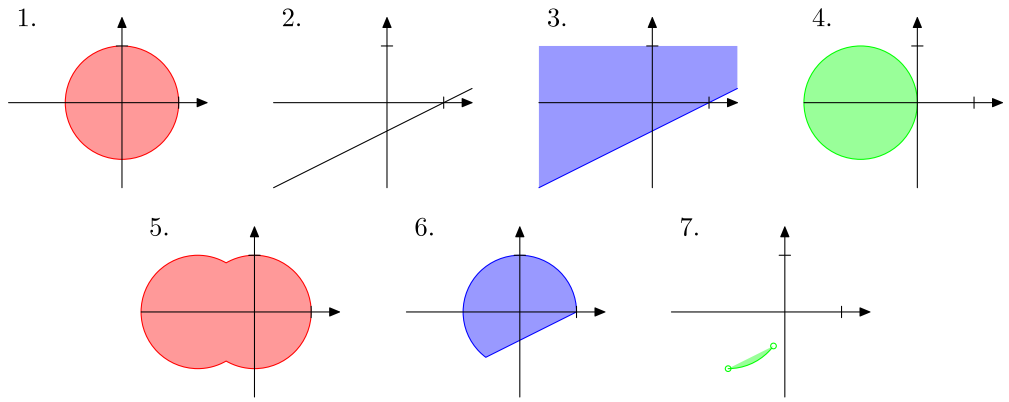
2. Justifier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la formule
$$\sum_{k=0}^{n} a^k \binom{n}{k} = (a+1)^n.$$
3. Développer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression $(a-1)^n$.
4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Écrire la somme
$$\sum_{k=0}^{n} a^{2k} \binom{2n}{2k}$$
comme la somme de deux termes.

Corrigé partiel 2016

Question de cours. Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, soit $l \in \mathbf{R}$ et soit a un point adhérent au domaine de définition de f. La fonction f admet la limite l au point a si

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Exercice 1. L'ensemble E est le disque fermé de centre en $(0,0)$ et de rayon 1, F est la droite passant par les points $(0,-1/2)$ et $(1,0)$ et G un demi-plan dont le bord est F. Par le théorème de Pythagore, $(x+1)^2 + y^2$ est le carré de la distance de (x,y) à $(-1,0)$, donc H est le disque fermé de centre $(-1,0)$. (On peut aussi voir cela en faisant un changement de coordonnées $x' = x+1$ et $y' = y$). Cela conduit aux dessins suivants :



Dans la figure 7, le segment de droite $F \cap H$ ne fait pas partie de la figure.

Exercice 2.

1. La fonction $g \circ f$ est l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ donnée par $g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ pour $x \in \mathbf{R}$.
2. La fonction $f \circ g \circ f$ est l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ donnée par $x \mapsto f(|x|) = |x|^2 = x^2$.
3. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a $x = \sqrt{x}^2 = f(\sqrt{x})$ donc l'application f est surjective. Par contre $f(-1) = 1 = f(1)$ donc f n'est pas injective.
4. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a $x = \sqrt{x^2} = g(x^2)$ donc g est surjective. Soient $x, y \in \mathbf{R}_+$ tels que $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ alors $x = \sqrt{x}^2 = \sqrt{y}^2 = y$ donc g est injective. Elle est donc bijective. Comme
$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad x = g(x^2),$$
la réciproque de g est l'application g^{-1} de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$ donnée par $x \mapsto x^2$.

Exercice 3. 1. Si $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{0}\left(k-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} = \frac{0-1}{2}.$$

ce qui prouve l'égalité dans ce cas. Supposons la formule vérifiée pour un entier n.

$$\sum_{k=0}^{n+1}\left(k-\frac{1}{2}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)\right) + (n+1) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n^2-1}{2} + n + \frac{1}{2} = \frac{n^2-1+2n+1}{2} = \frac{(n+1)^2-1}{2}.$$

ce qui démontre l'égalité pour $n+1$. Par récurrence, l'égalité vaut pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2. Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{0} k3^k = 0 = -\frac{2\times 0-1}{4}3 + \frac{3}{4}.$$

Supposons la formule démontrée pour un entier n.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k3^k = \left(\sum_{k=0}^{n} k3^k\right) + (n+1)3^{n+1} = \frac{2n-1}{4}3^{n+1} + (n+1)3^{n+1} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{2n-1+4n+4}{4}3^{n+1} + \frac{3}{4} = \frac{6n+3}{4}3^{n+1} + \frac{3}{4} = \frac{2(n+1)-1}{4}3^{n+2} + \frac{3}{4}$$

ce qui démontre le résultat pour $n+1$. Par récurrence, la formule vaut pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 4. 1. Par le résultat sur la limite d'un produit de fonctions

$$f(x)^2 \xrightarrow[x\to 1]{} 2^2 = 4\ .$$

2. Comme la limite de f en 1 est non nulle, on peut appliquer le résultat sur la limite d'un quotient de fonctions et

$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2}\ .$$

3. Soit g l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto 1-x$. Comme g est polynomiale, $g(x) \xrightarrow[x\to 1]{} g(1) = 0$ et $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} g(0) = 1$.

Pour démontrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{f(1-x)}$ n'admet pas toujours de limite en 1, considérons par exemple l'application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et par $f(x) = 2$ si $x \geqslant 0$. Alors, cette application admet la limite 2 en 1, mais $\sqrt{f(1-x)} = 0$ si $x > 1$ et $\sqrt{f(1-x)} = \sqrt{2}$ si $x < 1$. En considérant les limites à droite et à gauche en 1, on obtient que l'application $x \mapsto \sqrt{f(1-x)}$ n'admet pas de limite pour ce choix de l'application f ce qui prouve que cette fonction n'admet pas toujours de limite en 1.

Revenons au cas général. En appliquant le théorème sur la composée de fonctions à f et g, on obtient que, pour toute application f telle que $f(x)$ tend vers 2 quand x tend vers 1,

$$f(1-x) \xrightarrow[x \to 0]{} 2 .$$

et comme

$$\sqrt{x} \xrightarrow[x \to 2]{} \sqrt{2},$$

en appliquant à nouveau ce théorème, on en déduit que

$$\sqrt{f(1-x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \sqrt{2}$$

Exercice 5. 1. En appliquant le théorème sur la composée d'application

$$\sqrt{|x|} \xrightarrow[x \to -1]{} 1 .$$

L'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto x^2+2$ est polynomiale, donc continue. Donc

$$x^2+2 \xrightarrow[x \to -1]{} 3 .$$

Comme cette dernière limite est non nulle, on peut appliquer le résultat sur la limite du quotient

$$\frac{\sqrt{|x|}}{x^2+2} \xrightarrow[x \to -1]{} \frac{1}{3} .$$

2.
$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x \neq -1}} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2},$$

où la dernière égalité résulte de la limite d'un quotient de fonctions.

3. En utilisant la limite obtenue à la question précédente, on obtient les formules suivantes :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{|x+1|}{x^2-1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{-(x+1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{|x+1|}{x^2-1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$$

Comme les limites à droite et à gauche en -1 diffèrent, la fonction considérée n'admet pas de limite en -1.

Exercice 6. 1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tous $a, b \in \mathbf{C}$, la formule du binôme s'écrit

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2. On applique la formule du binôme avec $b = 1$.
3. En appliquant la formule du binôme avec $b = -1$,

$$(a-1)^n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-a)^k.$$

4. En sommant les égalités des questions 1 et 2, on obtient

$$(a+1)^n + (1-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(a^k + (-a)^k\right)$$

La somme $a^k + (-a)^k$ est nulle si k est impair et vaut $2a^k$ si k est pair, c'est-à-dire de la forme $k = 2k'$. Dans le cas où $n = 2n'$, on obtient donc

$$\sum_{k'=0}^{2n'} 2a^{2k'} \binom{2n'}{2k'} = (a+1)^{2n'} + (1-a)^{2n'}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{2n} a^{2k} \binom{2n}{2k} = \frac{1}{2}(a+1)^{2n} + \frac{1}{2}(a-1)^{2n}.$$

Énoncé première session 2016

Pour les exercices 1 à 6, justifiez succinctement chaque réponse donnée.

Dans cet énoncé, **C** *désigne l'ensemble des nombres complexes.*

Question de cours. Donner la définition de la limite d'une fonction en un point.

Exercice 1. Soient E et F des ensembles. Soit f une application de E dans F. Soient B et B' des parties de F.

1. Rappeler la définition de la partie $f^{-1}(B)$ de E.
2. Démontrer que si $B \subset B'$, alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
3. Démontrer l'egalité $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
4. Démontrer l'égalité $f^{-1}(F - B) = E - f^{-1}(B)$.

Exercice 2. Dans cet exercice, x et y désignent des nombres réels.

1. Soient p et q des entiers naturels tels que $p \leqslant q$. On suppose $x \neq 1$. Donner, sans démonstration, la valeur de la somme
$$\sum_{k=p}^{q} x^k.$$
2. Soit n un entier tel que $n > 1$. Calculer
$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k.$$
3. On suppose que le nombre réel y n'est pas nul et que $x \neq y$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x}{y}\right)^k$$
puis
$$\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}.$$
Quelles identités remarquables retrouve-t-on pour $n = 1$ et $n = 2$?

Exercice 3. Déterminer, en le justifiant, l'existence et l'éventuelle valeur des limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{x^2+3x+2}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-x}$

Exercice 4. Dans cet exercice, $\mathrm{i} \in \mathbf{C}$ vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.

1. Vérifier l'égalité
$$|5+12\mathrm{i}| = 13.$$
2. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $5+12\mathrm{i}$.
3. En déduire les solutions complexes de l'équation
$$(1+\mathrm{i})X^2 + X - 2 - \mathrm{i} = 0.$$

Exercice 5. Dans cet exercice, on se place dans un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On note A le point de coordonnées $(1,2,3)$, B celui de coordonnées $(-1,3,4)$, C celui de coordonnées $(2,2,2)$ et D celui de coordonnées $(1,0,5)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ?
3. Donner une équation implicite d'un plan $\mathscr{P}$ contenant les trois points A, B et C. Le point D appartient-il à $\mathscr{P}$? Que vaut le produit mixte $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$?

Dans la suite de l'exercice, on considère l'ensemble
$$\mathscr{H} = \{\, M \in \mathscr{E} \mid AM = BM \,\}.$$

4. En considérant le milieu I du segment $[A, B]$, donner les coordonnées d'un point de $\mathscr{H}$.
5. Soit M un point de $\mathscr{E}$, démontrer la formule
$$AM^2 - BM^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM}\,.$$
(Indication : on pourra considérer le produit scalaire $(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM})$.)
6. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{H}$ est un plan affine dont on donnera une équation implicite.

Corrigé première session 2016

Question de cours. Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, soit $l \in \mathbf{R}$ et soit a un point adhérent au domaine de définition de f. La fonction f admet la limite l au point a si

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Exercice 1.

1. Par définition,

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in E \mid f(x) = B \,\}$$

2. On suppose que $B \subset B'$. Soit $x \in f^{-1}(B)$. Par définition, $f(x) \in B$. Comme $B \subset B'$, cela implique $f(x) \in B'$. Donc $x \in f^{-1}(B')$. Ceci démontre l'inclusion $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
3. Soit $x \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(B \cup B') \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in B \cup B' \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in B \text{ ou } f(x) \in B' \\ \Leftrightarrow\ & x \in f^{-1}(B) \text{ ou } x \in f^{-1}(B') \\ \Leftrightarrow\ & x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

4. Soit $x \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(F - B) \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in F - B \\ \Leftrightarrow\ & \neg(f(x) \in B) \\ \Leftrightarrow\ & \neg(x \in f^{-1}(B)) \\ \Leftrightarrow\ & x \in E - f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(F - B) = E - f^{-1}(B)$.

Exercice 2.

1. Par la formule pour la somme d'une série géométrique, comme $x \neq 1$,

$$\sum_{k=p}^{q} x^k = \frac{x^p - x^{q+1}}{1-x}.$$

2. De la formule précédente, on déduit les égalités :
$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3-3^n}{1-3} = \frac{3^n-3}{2}.$$
3. La formule de la question 1 donne également l'égalité
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x}{y}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{y}}.$$
En multipliant les deux côtés de l'égalité précédente par y^n, on en déduit les formules,
$$\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} = y^n \left(\frac{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{y}} \right) = \frac{y^{n+1}-x^{n+1}}{y-x}.$$
Pour $n=1$ on retrouve la formule $y^2-x^2=(y-x)(y+x)$, et pour $n=2$ la formule
$$y^3-x^3=(y-x)(y^2+yx+x^2).$$

Exercice 3. 1. Comme une application polynomiale est continue,
$$x^2+3x+2 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 6$$
et comme $6 \neq 0$, on peut appliquer la proposition sur la limite d'un quotient qui donne
$$\frac{x^2}{x^2+3x+2} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{6}.$$
2. Pour $x \neq 1$ et $x \neq 2$, on a les égalités
$$\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}.$$
Donc
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{x+1}{x-2} = \frac{2}{-1} = -2,$$
où l'avant-dernière égalité résulte de la proposition sur la limite d'un quotient.
3. Notons tout d'abord que pour tout $x \in \mathbf{R}$
$$\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|.$$

Par conséquent, si $x \neq 1$ et $x \neq 0$,

$$\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-x} = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x > 1. \\ \frac{-1}{x} \text{ si } x < 1. \end{cases}$$

Il en résulte que les limites à gauche et à droite de la fonction considérée sont données par

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x} = -1.$$

Comme les limites à droite et à gauche diffèrent, la fonction considérée n'admet pas de limite en 1.

Exercice 4. 1. La norme de $5+12\mathrm{i}$ est donnée par

$$|5+12i| = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13.$$

2. Si $\delta = x + y\mathrm{i}$, avec $x, y \in \mathbf{R}$ est une racine carrée de $5+12\mathrm{i}$, alors x et y vérifient le système d'équations

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 13 \\ x^2-y^2 = 5 \\ 2xy = 12. \end{cases}$$

Donc $x^2 = 9$, $y^2 = 4$ et $xy > 0$. Par conséquent $\delta = 3+2\mathrm{i}$ ou $\delta = -3-2\mathrm{i}$. Il en résulte que les racines carrées de $5+12\mathrm{i}$ sont $3+2\mathrm{i}$ et $-3-2\mathrm{i}$.

3. On calcule le discriminant de l'équation :

$$\Delta = 1 + 4(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) = 1 + 4(1+3\mathrm{i}) = 5+12\mathrm{i}.$$

les deux solutions de l'équation sont donc

$$z_1 = \frac{-1+3+2\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})} = 1$$

et

$$z_2 = \frac{-1-3-2\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})} = \frac{-1}{2}(2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

Exercice 5. 1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2,1,1)$, et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ pour coordonnées $(1,0,-1)$.

2. Les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont
$$(-1, 1-(-2)\times(-1), -1) = (-1, -1, -1).$$
Comme ce produit est non nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
3. Une équation implicite de l'unique plan $\mathscr{P}$ contenant A, B et C est
$$-(x-1)-(y-2)-(z-3)=0$$
ou encore
$$x+y+z-6=0$$
Comme $1+0+5-6=0$, le point D appartient au plan $\mathscr{P}$. Il en résulte que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. Donc
$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0.$$
4. Le point I, milieu du segment $[A,B]$ a pour coordonnées $(0, \frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ et comme on a égalité des distances $AI = BI$, le point I appartient à $\mathscr{H}$.
5. Par la relation de Chasles,
$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}.$$
D'autre part, comme I est le milieu de $[A,B]$, $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = 0$. Donc
$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{IM}.$$
On a donc les égalités
$$AM^2 - BM^2 = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM})\cdot(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) = 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IM}$$
6. Comme les distances sont positives, $AM = BM$ si et seulement si $AM^2 = BM^2$. Par la question précédente, cela équivaut à dire que $\overrightarrow{IM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Donc $\mathscr{H}$ est le plan orthogonal à la droite (AB) passant par I. Une équation implicite de $\mathscr{H}$ est donné par
$$-2(x-0)+(y-\frac{5}{2})+(z-\frac{7}{2})=0$$
soit
$$-2x+y+z-6=0.$$

Énoncé seconde session 2016

Pour les exercices 2 à 5, justifiez succinctement chaque réponse donnée.

Dans cet énoncé, $\mathbf{N}$ *désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls,* $\mathbf{R}$ *désigne l'ensemble des nombres réels,* $\mathbf{R}_+$ *l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls et* $\mathbf{R}_+^*$ *l'ensemble des nombres réels strictement positifs.*

Question de cours. Soit E un espace vectoriel. À quelle condition dit-on que des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?

Exercice 1. Dans cet exercice, f désigne une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour chacune des assertions suivantes dire quelle propriété de l'application f est caractérisée par l'assertion donnée :

1. $\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = y$;
2. $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, f(x) = y$;
3. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall x' \in \mathbf{R}, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall x' \in \mathbf{R}, x' > x \Rightarrow f(x') > f(x)$;
5. $\forall a \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$;
6. $\exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \forall \eta \in \mathbf{R}_+^*, \exists x \in \mathbf{R}, |x - a| < \eta$ et $|f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie par $f(t) = t^2 - 2t + 2$ pour $t \in \mathbf{R}$.

1. Étudier les variations de f et tracer le graphe de l'application f.
2. Déterminer les ensembles suivants $f([0,1])$, $f([0,2])$, $f(\mathbf{R}_+)$.
3. Déterminer les ensembles suivants $f^{-1}([1,2])$, $f^{-1}([0,2])$, $f^{-1}(\mathbf{R}_+)$.
4. Déterminer $f^{-1}(f([1,2]))$.

Exercice 3. Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout nombre réel t, on définit

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t - k).$$

Par convention, $P_0(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

1. Écrire $P_1(t)$ et $P_2(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$, sans utiliser le signe $\prod$.
2. Calculer $P_n(m)$ pour $n \in \mathbf{N}$ et $m \in \{0, \ldots, n-1\}$.
3. Calculer $P_n(n)$ pour $n \in \mathbf{N}$.
4. On suppose que $m > n$, écrire $P_n(m)$ en termes du coefficient binomial $\binom{m}{n}$.

5. Démontrer la formule

$$P_n(t+1) - P_n(t) = P_{n-1}(t) \tag{48}$$

pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in \mathbf{R}$. Quelle formule concernant les coefficients binomiaux retrouve-t-on ainsi si t est un entier m ?

6. Déduire de la formule (48), en raisonnant par récurrence sur m, une démonstration de la formule

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(m-1)m(m+1)}{6}.$$

7. Démontrer, pour $m, n \in \mathbf{N}$, la formule

$$\sum_{k=0}^{m} P_n(k) = P_{n+1}(m+1).$$

Exercice 4. Dans cet exercice, la lettre x désigne un nombre réel.

1. En utilisant la formule de Moivre, écrire $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en termes de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$.
2. Écrire $\cos(4x)$ en termes de $\cos(x)$.

Exercice 5. Dans cet exercice, on se place dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note A le point de coordonnées $(-1, 1)$, B celui de coordonnées $(1, 3)$ et C celui de coordonnées $(3, -3)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Que peut-on dire de ces deux vecteurs ?
2. Calculer les distances AB et AC. En déduire la distance BC.
3. On note I le milieu du segment $[A, B]$, J celui de $[B, C]$ et K le milieu du segment $[A, C]$. Calculer les coordonnées de I, J et K.
4. Donner une équation implicite pour chacune des médianes du triangle ABC, c'est-à-dire des droites (AJ), (BK) et (CI).
5. Calculer les coordonnées du point G d'intersection des droites (AJ) et (BK). Vérifier que le point G appartient à la droite (CI).
6. Calculer le vecteur
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}.$$

Corrigé seconde session 2016

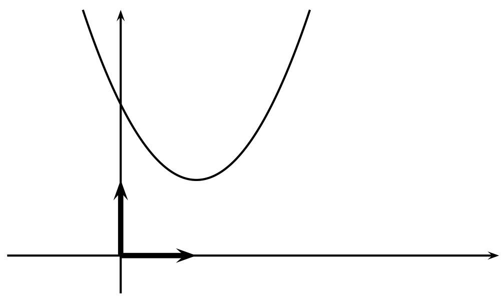
Question de cours. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Exercice 1.
1. L'application f est constante ;
2. l'application f est surjective ;
3. l'application f est injective ;
4. l'application f est strictement croissante ;
5. l'application f est continue ;
6. l'application f n'est pas continue.

Exercice 2.
1. Comme $f(t) = (t-1)^2+1$ et que l'application $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et qu'elle a pour image $\mathbf{R}+$ sur ces deux intervalles, les variations de f sont données par le tableau suivant :

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe a donc l'allure suivante



2. L'application f est décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$ donc $f([0, 1]) \subset [f(1), f(0)] = [1, 2]$. Pour tout $y \in [1, 2]$, le nombre réel y a un unique antécédent par f dans $[0, 1]$, à savoir $1 - \sqrt{y-1}$ donc $f([0, 1]) = [1, 2]$.

   L'application f est croissante sur $[1, 2]$, donc $f([1, 2]) \subset [f(1), f(2)] = [1, 2]$. Pour tout $y \in [1, 2]$, le nombre réel y a un unique antécédent par f dans $[1, 2]$, à savoir $1 + \sqrt{y-1}$ donc $f([1, 2]) = [1, 2]$.

$$f([0, 2]) = f([0, 1] \cup [1, 2]) = f([0, 1]) \cup f([1, 2]) = [1, 2].$$

D'après le tableau de variation,

$$f(\mathbf{R}_+) = f([0,1]) \cup f([1,+\infty[) = [1,2] \cup [1,+\infty[= [1,+\infty[$$

3. Par le tableau de variations, comme $f(0) = f(2) = 2$,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) \leqslant 2 \Longrightarrow x \in [0,2].$$

Donc $f^{-1}([1,2]) \subset [0,2]$. Inversement,par la question précédente, on a l'inclusion $f([0,2]) \subset [1,2]$ ce que implique que $f(x) \in [1,2]$ pour tout $x \in [0,2]$. Cela implique l'inclusion inverse.

Comme $f(\mathbf{R}) \subset [1,+\infty]$, on a les égalités :

$$f^{-1}([0,2]) = f^{-1}([1,2]) = [0,2].$$

De plus $f^{-1}(\mathbf{R}_+) = \mathbf{R}$.

4. On a vu que $f([1,2]) = [1,2]$. Donc

$$f^{-1}(f([1,2])) = f^{-1}([1,2]) = [0,2].$$

Exercice 3. 1. Par définition, $P_1(t) = \frac{1}{1}\prod_{k=0}^{0}(t-k) = t$ et

$$P_2(t) = \frac{t(t-1)}{2}.$$

2. Si $m \in \{0,\dots,n-1\}$, alors dans le produit $\prod_{k=0}^{n-1}(m-k)$, le terme correspondant à $k = m$ est nul, si bien que le produit est nul. Donc $P_n(m)$ vaut alors 0.

3. On a les égalités

$$P_n(n) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n}(n-k) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n} k = \frac{n!}{n!} = 1.$$

4. Si $m > n$, alors

$$P_n(m) = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}.$$

5. On écrit la différence :

$$\begin{aligned}
P_n(t+1) - P_n(t) &= \frac{1}{n!}\left(\prod_{k=0}^{n-1}(t+1-k) - \prod_{k=0}^{n-1}(t-k)\right) \\
&= \frac{1}{n!}\left((t+1)\prod_{k=1}^{n-1}(t-(k-1)) - (t-n+1)\prod_{k=0}^{n-2}(t-k)\right) \\
&= \frac{1}{n!}\left((t+1)\prod_{k=0}^{n-2}(t-k) - (t-n+1)\prod_{k=0}^{n-2}(t-k)\right) \\
&= \frac{t+1-(t-n+1)}{n!}\prod_{k=0}^{n-2}(t-k) \\
&= \frac{n}{n!}\prod_{k=0}^{n-2}(t-k) = P_{n-1}(t).
\end{aligned}$$

En prenant pour t un entier m, on retrouve, à l'aide de la question 4, la formule du triangle de Pascal :

$$\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n-1} + \binom{m}{n}.$$

6. Remarquons que $P_2(k) = \frac{k(k-1)}{2}$ et $P_3(m+1) = \frac{(m-1)m(m+1)}{6}$. La formule à démontrer est donc

$$\sum_{k=0}^{m} P_2(k) = P_3(m+1),$$

pour tout entier $m \geqslant 0$. Démontrons-la par récurrence.
Initialisation. Pour $m = 0$,

$$\sum_{k=0}^{0} P_2(k) = P_2(0) = 0 = P_3(1).$$

Hérédité. Supposons la formule vraie pour m, c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{m} P_2(k) = P_3(m+1).$$

Démontrons-la pour $m+1$. On a

$$\sum_{k=0}^{m+1} P_2(k) = \left(\sum_{k=0}^{m} P_2(k)\right) + P_2(m+1) = P_3(m+1) + P_2(m+1)$$

En appliquant la formule (48), on obtient que cette somme est égale à $P_3(m+2)$ ce qui démontre la formule pour $m+1$.

Par récurrence, la formule est donc vraie pour tout $m \in \mathbf{N}$.

7. On fixe l'entier $n \in \mathbf{N}$ et on démontre la formule par récurrence sur l'entier m. *initialisation.* Pour $m = 0$, d'après la question 2,

$$\sum_{k=0}^{0} P_n(k) = P_n(0) = 0 = P_{n+1}(1).$$

Hérédité. Supposons la formule vraie pour m, c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{m} P_n(k) = P_{n+1}(m+1).$$

Démontrons-la pour $m+1$. On a

$$\sum_{k=0}^{m+1} P_n(k) = \left(\sum_{k=0}^{m} P_n(k)\right) + P_n(m+1) = P_{n+1}(m+1) + P_n(m+1)$$

En appliquant la formule (48), on obtient que cette somme est égale à $P_{n+1}(m+2)$ ce qui démontre la formule pour $m+1$.

Par récurrence, la formule est donc vraie pour tout $m \in \mathbf{N}$.

Exercice 4. 1. La formule de Moivre donne la relation

$$\cos(4x) + i\sin(4x) = e^{4ix} = (\cos(x) + i\sin(x))^4,$$

pour tout nombre réel x. Mais par la formule du binôme et le triangle de Pascal on a l'identité remarquable

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

On a donc

$$\cos(4x)+i\sin(4x) = \cos(x)^4+4\cos(x)^3\sin(x)i-6\cos(x)^2\sin(x)^2-4\cos(x)\sin(x)^3i+\sin(x)^4.$$

En prenant les parties réelles et imaginaires, cela donne

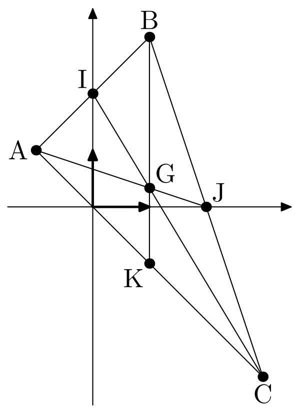
$$\begin{cases} \cos(4x) = \cos(x)^4 - 6\cos(x)^2\sin(x)^2 + \sin(x)^4; \\ \sin(4x) = 4\cos(x)^3\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x)^3, \end{cases}$$

pour tout nombre réel x.

2. En utilisant la relation $\cos(x)^2+\sin(x)^2 = 1$, valide pour tout $x \in \mathbf{R}$, on en déduit que

$$\cos(4x) = \cos(x)^4 - 6\cos(x)^2(1-\cos(x)^2) + (1-\cos(x)^2)^2 = 1 - 8\cos(x)^2 + 8\cos(x)^4.$$

Exercice 5. Traçons la figure correspondant aux points donnés



1. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(2, 2)$, celles de $\overrightarrow{AC}$ sont $(4, -4)$. Le produit scalaire de ces deux vecteurs vaut

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 4 + 2 \times (-4) = 0.$$

Ces deux vecteurs sont donc orthogonaux.

2. Les distances sont données par

$$AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$AC = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

En appliquant le théorème de Pythagore, on en déduit que

$$BC = \sqrt{8 + 32} = 2\sqrt{10}.$$

3. Les coordonnées des milieux sont données par

$$I = (\frac{1}{2}(-1+1), \frac{1}{2}(1+3)) = (0, 2), \quad J = (2, 0) \quad \text{et} \quad K = (-1, 1).$$

4. Rappelons que l'équation implicite d'une droite passant par des points distincts A de coordonnées (x_A, y_A) et J de coordonnées (x_J, y_J) est donnée par
$$(y_J - y_A)(x - x_A) - (x_J - x_A)(y - y_A) = 0.$$
La droite (AJ) admet donc l'équation
$$(0 - 1)(x - (-1)) - (2 - (-1))(y - 1) = 0$$
qui équivaut à
$$x + 3y = 2.$$
La droite (BK) a pour équation
$$4(x - 1) + 0(y - 3) = 0$$
ou encore $x = 1$. La droite (CI) a pour équation
$$5(x - 3) + 3(y + 3) = 0$$
soit $5x + 3y = 6$.
5. Il nous faut résoudre le système d'équations
$$\begin{cases} x + 3y & = 2 \\ x & = 1 \end{cases}$$
ce qui nous donne $x = 1$ et $y = \frac{1}{3}$. Le point G a donc les coordonnées $(1, \frac{1}{3})$. Comme $5 \times 1 + 3 \times \frac{1}{3} = 6$, le point G appartient également à la droite (CI).
6. Le vecteur $\overrightarrow{GA}$ a les coordonnées $(-2, \frac{2}{3})$, le vecteur $\overrightarrow{GB}$ les coordonnées $(0, \frac{8}{3})$ et le vecteur $\overrightarrow{GC}$ les coordonnées $(2, -\frac{10}{3})$. En faisant la somme, on obtient que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ a pour coordonnées $(0, 0)$. C'est donc le vecteur nul.

Énoncé partiel 2017

Pour les exercices 2 à 3 et le problème, justifiez succinctement chaque réponse donnée. *Dans cet énoncé,* $\mathbf{N}$ *désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls,* $\mathbf{R}$ *l'ensemble des nombres réels et* $\mathbf{R}_+^*$ *l'ensemble des nombres réels strictement positifs.*

Question de cours. Donner la définition de la surjectivité pour une application.

Exercice 1. Soient P, Q et R des assertions. À l'aide d'une table de vérité à huit lignes, montrer que l'implication

$$\big((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)\big) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$$

est une tautologie (c'est-à-dire toujours vraie).

Exercice 2. Soient A et B des parties d'un ensemble E. On rappelle que $E - B$ désigne le complémentaire de B dans E.

1. Représenter $A \cap (E - B)$ à l'aide d'un diagramme de Venn.
2. Démontrer l'équivalence

$$A \cap (E - B) = \emptyset \Longleftrightarrow A \subset B.$$

Exercice 3. Démontrer l'assertion suivante

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} (4k+1) = (2n+1)(n+1)$$

(on pourra faire une preuve par récurrence).

Problème. On note exp l'application exponentielle et ln le logarithme népérien. On rappelle que $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ et que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on note $\sqrt[3]{x} = \exp\big(\frac{1}{3}\ln(x)\big)$. On pose également $\sqrt[3]{0} = 0$ et pour un nombre réel strictement négatif x, $\sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{-x}$.

On note f l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $f(t) = t^3$ pour $t \in \mathbf{R}$.

1. (a) Avec les notations qui précèdent, calculer, pour $x \in \mathbf{R}$, $(\sqrt[3]{x})^3$ (on pourra faire une disjonction de cas).

   (b) Démontrer que f est surjective.
2. (a) Démontrer que f est strictement croissante.

   (b) Démontrer que f est bijective.
3. (a) Démontrer que l'application réciproque f^{-1} est strictement croissante.

   (b) Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Exprimer $\sqrt[3]{xy}$ en termes de $\sqrt[3]{x}$ et de $\sqrt[3]{y}$.

4. (a) Soient u et v des nombres réels. Écrire la différence $u^3 - v^3$ comme le produit de deux termes.

   (b) Soient x et y des nombres réels strictement positifs. Démontrer la formule :
$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \cdot$$

5. Soit $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ un nombre réel strictement positif. Démontrer qu'il existe un nombre réel $C_\alpha > 0$ dépendant uniquement de α tel que
$$\forall x, y \in \,]\alpha, +\infty[\,, \quad |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| \leqslant C_\alpha |x - y|$$
(on pourra utiliser la question précédente).

6. En utilisant le fait que $\pi > 1$, combien de décimales de π suffit-il de connaître pour calculer $\sqrt[3]{\pi}$ avec une erreur $< 10^{-5}$?

7. Soit $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. Démontrer, en utilisant la définition de la limite, que la restriction de f^{-1} à $]\alpha, +\infty[$ est continue.

8. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbf{R}_+^*$, l'application f^{-1} admet une limite en a.

9. (a) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, trouver $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\sqrt[3]{\eta} \leqslant \varepsilon$.

   (b) Démontrer que f^{-1} admet une limite en 0.

10. Existe-t-il une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que
$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| \leqslant C|x - y|?$$

11. L'application f^{-1} est-elle continue ?

Corrigé partiel 2017

Question de cours. Soient E et F des ensembles, une application $f : E \to F$ est surjective si

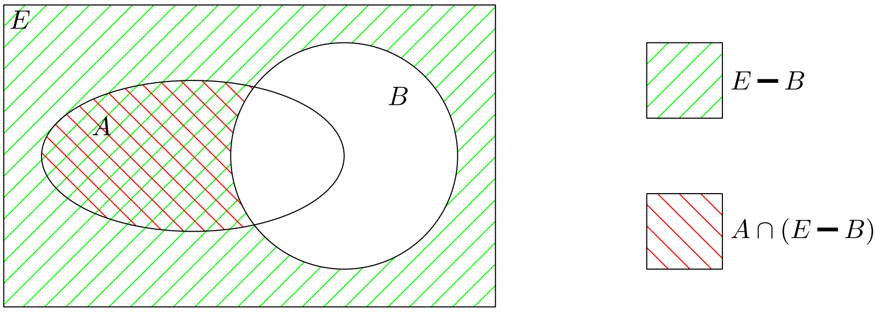
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).$$

Exercice 1.

P	Q	R	$P\Rightarrow Q$	$Q\Rightarrow R$	$(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R)$	$P\Rightarrow R$	$((P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R))\Rightarrow(P\Rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Donc l'assertion $\big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ est une tautologie.

Exercice 2. 1.



2. Supposons que $A \cap (E - B) = \emptyset$. Soit $x \in A$. Si $x \in E - B$, alors $x \in A \cap (E - B)$ ce qui contredit l'hypothèse faite sur cette intersection. Donc $x \notin E - B$ et donc $x \in B$. On a prouvé l'inclusion $A \subset B$.

   Réciproquement, supposons que $A \subset B$. Alors

$$\forall x \in A, \quad x \in B.$$

   Donc

$$\forall x \in A, \quad x \notin E - B.$$

   Cela prouve que l'intersection $A \cap (E - B)$ est vide.

Exercice 3. *Première solution :*

$$\sum_{k=0}^{n}(4k+1) = 4\Big(\sum_{k=0}^{n} k\Big)+n+1 = 4\frac{n(n+1)}{2}+n+1 = 2n(n+1)+n+1 = (2n+1)(n+1),$$

où la deuxième inégalité résulte d'une formule du cours.

Deuxième solution : On démontre la formule par récurrence sur n :
Initialisation : Pour $n=0$, on a $\sum_{k=0}^{0}(4k+1) = (4\times 0+1) = 1 = (2\times 0+1)(0+1)$. La formule est donc vraie dans ce cas.
Hérédité : On suppose la formule vérifiée pour n, on a alors

$$\sum_{k=0}^{n+1}(4k+1) = \Big(\sum_{k=0}^{n}(4k+1)\Big)+4(n+1)+1 = (2n+1)(n+1)+4(n+1)+1 = 2n^2+7n+6.$$

Or $(2n+3)(n+2) = 2n^2+7n+6$. La formule est donc vraie pour $n+1$.

Par récurrence, on obtient

$$\forall n\in \mathbf{N},\quad \sum_{k=0}^{n}(4k+1) = (2n+1)(n+1).$$

Problème.

1. (a) Si $x>0$, alors $(\sqrt[3]{x})^3 = \exp(\frac{1}{3}\ln(x))^3 = \exp(3\times\frac{1}{3}\ln(x)) = x$. Pour $x=0$, $(\sqrt[3]{0})^3 = 0^3 = 0$. Enfin si $x<0$, alors $-x>0$ et $(\sqrt[3]{x})^3 = (-\sqrt[3]{-x})^3 = -(-x) = x$. On obtient donc
$$\forall x\in\mathbf{R},\quad (\sqrt[3]{x})^3 = x.$$
   (b) Tout nombre réel x admet un antécédent par f, à savoir $\sqrt[3]{x}$, donc f est surjective.
2. (a) Soient $x,y\in\mathbf{R}$ tels que $x<y$. Considérons la formule
$$y^3-x^3 = (y-x)((x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2).$$
Comme y et x ne sont pas tous les deux nuls, il en de même de $x+\frac{1}{2}y$ et y. Donc les deux termes du produit sont strictement positifs. Donc $x^3<y^3$.
   (b) Soient $x,y\in\mathbf{R}$ tels que $x\neq y$. On a alors $x<y$ ou $y<x$ D'après (a), dans les deux cas, $f(x)\neq f(y)$. Donc f est injective. D'après la question 1.(b), elle est surjective. Elle est donc bijective.
3. (a) Soient $x,y\in\mathbf{R}$ tels que $x<y$. Raisonnons par l'absurde : si $f^{-1}(y)\leqslant f^{-1}(x)$, par la question 2.(a), $y=f(f^{-1}(y))\leqslant f(f^{-1}(x))=x$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur x et y. Donc $f^{-1}(y)>f^{-1}(x)$, ce qui prouve que f^{-1} est strictement croissante.

(b) On a les égalités :

$$f(\sqrt[3]{xy}) = xy = (\sqrt[3]{x})^3(\sqrt[3]{y})^3 = (\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y})^3 = f(\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y}).$$

Comme f est injective, cela prouve que

$$\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y},$$

pour tous $x, y \in \mathbf{R}$.

4. (a)

$$u^3 - v^3 = (u-v)(u^2 + uv + v^2)$$

pour tous $u, v \in \mathbf{R}$.

(b) En appliquant (a) à $\sqrt[3]{x}$ et $\sqrt[3]{y}$, on obtient

$$x - y = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + +\sqrt[3]{y}^2)$$

La formule demandée s'obtient alors en appliquant 3.(b).

5. On pose $C_\alpha = \frac{1}{3\sqrt[3]{\alpha^2}}$. Comme f^{-1} est croissante, pour $x, y \in]\alpha, +\infty[$, on a

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} > 3\sqrt[3]{\alpha^2}$$

Par la question 4.(b), il en résulte que

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| \leqslant C_\alpha |x-y|.$$

6. Pour $x > 1$, on déduit de la question précédente que

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\pi}| \leqslant \frac{1}{3}|x - \pi|$$

Il suffit donc de connaître 5 décimales de π.

7. Soit $a \in]\alpha, +\infty[$. Démontrons que $f^{-1}(x)$ tend vers $f^{-1}(a)$ quand x tend vers a. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. On pose $\eta = \min\left(|a-\alpha|, \frac{\varepsilon}{C_\alpha}\right)$. Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x - a| < \eta$. Alors $x > \alpha$. On peut donc appliquer la question précédente, qui nous donne

$$|f^{-1}(x) - f^{-1}(a)| \leqslant C_\alpha |x - a| < C_\alpha \eta \leqslant C_\alpha \frac{\varepsilon}{C_\alpha} = \varepsilon.$$

Donc

$$f^{-1}(x) \xrightarrow[x \to a]{} f^{-1}(a),$$

et la restriction de f^{-1} à $]\alpha, +\infty[$ est continue.

8. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $\alpha = \frac{a}{2}$. Par la question précédente,

$$f^{-1}(x) \xrightarrow[x \to a]{} f^{-1}(a).$$

9. (a) Il suffit de prendre $\eta = \varepsilon^3$.

   (b) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $\eta = \varepsilon^3$ Pour $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x - 0| < \eta$, on a, d'après la question 3.(a),

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}| = |\sqrt[3]{x}| = \sqrt[3]{|x|} < \sqrt[3]{\eta} = \varepsilon.$$

   Donc

$$f^{-1}(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f^{-1}(0).$$

10. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'un tel C existe. Il est forcément positif. Posons $y = 0$ et $x = \frac{1}{(C+1)^3}$. Alors

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| = \frac{1}{C+1} \leqslant C|x-y| = \frac{C}{(C+1)^3}.$$

   On obtient $C + 1 \leqslant (C+1)^2 \leqslant C$ et donc $1 \leqslant 0$, ce qui est absurde.

11. Si $a < 0$, en utilisant la question 8, la formule $f^{-1}(x) = -f^{-1}(-x)$ et le théorème sur la limite de fonctions composées, on obtient que

$$f^{-1}(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f^{-1}(a).$$

   Par les questions 8 et 9.(b), cela vaut également pour $a \geqslant 0$, donc f^{-1} est continue.

Énoncé première session 2017

Pour les exercices 1 à 5, justifiez succinctement chaque réponse donnée.

Dans cet énoncé, $\mathbf{N}$ *désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls,* $\mathbf{R}$ *l'ensemble des nombres réels et* $\mathbf{R}_+$ *l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.*

Question de cours. Soient E et F des ensembles et soit f une application de E dans F. Soit A une partie de E et B une partie de F. Donner la définition de l'image de A par f et de l'image réciproque de B par f.

Exercice 1. Soient E, F et G des ensembles et soient f une application de E dans F et g une application de F dans G.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective. Démontrer que f est injective.
2. On suppose que $g \circ f$ est surjective. Démontrer que g est surjective.

Exercice 2. Démontrer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la formule suivante

$$\sum_{k=0}^{n} k5^k = \frac{4n-1}{16}5^{n+1} + \frac{5}{16}.$$

(On pourra raisonner par récurrence.)

Exercice 3. L'objectif de cet exercice est de démontrer la continuité de l'application sinus, c'est-à-dire de l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \sin(x)$. On pourra utiliser sans démonstration l'assertion suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad \sin(x) \leqslant x.$$

1. Démontrer l'assertion suivante :
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|.$$
(On pourra distinguer les cas $x > 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $x < 0$).
2. En déduire que la fonction sinus admet une limite en 0.
3. (a) Pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, exprimer $\cos(x)$ en termes de $\sin(x)$.
   (b) Déduire des deux questions précédentes que la fonction cosinus admet une limite en 0 et donner sa valeur.
4. (a) En utilisant l'exponentielle complexe, retrouver l'expression de $\sin(\theta + \theta')$ en termes des cosinus et sinus de θ et de θ'.
   (b) À l'aide de la formule précédente, démontrer que la fonction sinus est continue.

Exercice 4. 1. Calculer les racines carrées du nombre complexe $-3-4i$.

2. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation
$$z^2 - 3z + 3 + i = 0.$$

Exercice 5. Dans cet exercice, on se place dans un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Toutes les coordonnées de l'exercice sont relatives à ce repère. On note A le point de coordonnées $(1,1,1)$, B celui de coordonnées $(3,2,1)$, C celui de coordonnées $(1,1,3)$ et D le point de coordonnées $(-1,0,3)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
3. Calculer la distance du point C à la droite affine (AB).
4. Donner une équation implicite d'un plan affine $\mathscr{P}$ contenant les trois points A, B et C. Le point D appartient-il à $\mathscr{P}$?
5. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$?
6. Soit $\mathscr{D}$ la droite affine donnée par le système d'équations paramétriques
$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda. \end{cases}$$
Déterminer l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec le plan $\mathscr{P}$.

Corrigé première session 2017

Question de cours. L'image de A par f est

$$f(A) = \{ y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \} = \{ f(x),\ x \in A \}.$$

L'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \}.$$

Exercice 1.

1. Supposons $g \circ f$ injective, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in E, \quad g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y.$$

Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors on a l'égalité $g(f(x)) = g(f(y))$, c'est-à-dire $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Par hypothèse, cela implique $x = y$. Donc f est injective.

2. Supposons maintenant que $g \circ f$ est surjective, c'est-à-dire

$$\forall z \in G, \exists x \in E, \quad z = g \circ f(x).$$

Soit $z \in G$. Par hypothèse, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$. Posons $y = f(x)$ Alors $y \in F$ et $z = g(y)$. Donc g est surjective.

Exercice 2. Démontrons par récurrence sur n la validité pour $n \in \mathbf{N}$ de l'assertion

$$P(n) : \qquad \sum_{k=0}^{n} k5^k = \frac{4n-1}{16} 5^{n+1} + \frac{5}{16}.$$

Initialisation Pour $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{0} k5^k = 0 \times 5^0 = 0 = -\frac{5}{16} + \frac{5}{16} = \frac{4 \times 0 - 1}{16} 5^{0+1} + \frac{5}{16}$$

ce qui démontre $P(0)$.
Hérédité Supposons $P(n)$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} k5^k = \left(\sum_{k=0}^{n} k5^k \right) + (n+1)5^{n+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, cela est égal à

$$\begin{aligned}\frac{4n-1}{16}5^{n+1}+\frac{5}{16}+(n+1)5^{n+1} &= \frac{4n-1+16n+16}{16}5^{n+1}+\frac{5}{16}\\ &= \frac{20n+15}{16}5^{n+1}+\frac{5}{16}=\frac{4(n+1)-1}{16}5^{n+2}+\frac{5}{16}.\end{aligned}$$

Ce qui prouve P(n+1). Par récurrence on obtient que $P(n)$ vaut pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 3. 1. Si $x \in [0,1]$, alors $0 \leqslant x \leqslant \pi$, donc $0 \leqslant \sin(x)$ Par conséquent l'inégalité $\sin(x) \leqslant x$ équivaut dans ce cas à l'inégalité $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Si $x \geqslant 1$ alors comme $\sin(x) \in [-1,1]$, on a les inégalités $|\sin(x)| \leqslant 1 \leqslant |x|$.

Enfin, si $x \leqslant 0$, alors $-x \geqslant 0$ et les cas précédents donnent

$$|\sin(x)| = |-\sin(-x)| = |\sin(-x)| \leqslant |-x| = |x|.$$

Donc dans tous les cas, $|\sin(x)| \leqslant |x|$ ce qui prouve l'assertion demandée.

2. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $\eta = \varepsilon$, alors $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-0| < \eta$ on a, par la question 1, les inégalités

$$|\sin(x) - 0| \leqslant |x| < \eta = \varepsilon.$$

Donc la fonction sinus admet la limite $\sin(0) = 0$ en 0.

3. (a) Si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors $\cos(x) \geqslant 0$. Par conséquent

$$\cos(x) = \sqrt{\cos(x)^2} = \sqrt{1-\sin(x)^2}.$$

(b) L'application $x \mapsto 1 - x^2$ est polynomiale et donc continue. L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue. Donc, par le théorème sur la limite d'applications composées et la question 2, $\cos(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0.

4. (a) La relation $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$ s'écrit

$$\begin{aligned}&\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\\ &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')\\ &= (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta'))\end{aligned}$$

ce qui fournit, en considérant la partie imaginaire, l'égalité

$$\sin(\theta+\theta') = \cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta').$$

(b) Soit $a \in \mathbf{R}$. Par la question précédente, si $t \in \mathbf{R}$,

$$\sin(t) = \sin(a)\cos(t-a) + \cos(a)\sin(t-a).$$

Par la question 2, $\sin(t-a)$ tend vers 0 lorsque t tend vers a et par la question 3.(b), $\cos(t-a)$ tend vers 1 lorsque t tend vers a. Donc $\sin(t)$ tend vers $\sin(a)$ lorsque t tend vers a. Comme cela vaut pour tout $a \in \mathbf{R}$, l'application sinus est continue.

Exercice 4. 1. Le module de $-3-4i$ est donné par

$$|-3-4i| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Donc si $x+iy$ est une racine carrée de $-3-4i$, alors les nombres réels x et y vérifient les conditions

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ x^2-y^2 = -3 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Donc $(x,y) = (1,-2)$ ou $(x,y) = (-1,2)$. Les racines carrées de $-3-4i$ sont donc $1-2i$ et $-1+2i$.

2. Calculons le discriminant pour l'équation $z^2-3z+3+i = 0$. Il vaut

$$\Delta = 9-4(3+i) = -3-4i.$$

Donc les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{3-(-1+2i)}{2} = 2-i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3+(-1+2i)}{2} = 1+i$$

Exercice 5. 1. Les vecteurs ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} : (3-1, 2-1, 1-1) = (2,1,0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} : (1-1, 1-1, 3-1) = (0,0,2).$$

2. On calcule les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

$$(1\times 2 - 0\times 0, 0\times 0 - 2\times 2, 2\times 0 - 1\times 0) = (2,-4,0).$$

Comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ; les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

3.

$$d(C,(AB)) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{4+1}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = 2.$$

4. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est orthogonal au plan $\mathscr{P}$. Celui-ci admet donc une équation de la forme
$$2x - 4y + d = 0.$$
Comme A appartient à ce plan, on a $2 - 4 + d = 0$ et donc $d = 2$. Une équation implicite de $\mathscr{P}$ est donc $2x - 4y + 2 = 0$ ou encore $x - 2y + 1 = 0$. Comme $-1 - 2 \times 0 + 1 = 0$, le point D appartient au plan $\mathscr{P}$.
5. Comme les points A, B, C et D appartiennent au plan $\mathscr{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$ sont tous les deux orthogonaux à ce plan. Ils sont donc colinéaires. En calculant les coordonnées de $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$, on constate qu'il sont en fait égaux.
6. En remplaçant dans l'équation implicite de $\mathscr{P}$ les coordonnées données par les équations paramétriques de $\mathscr{D}$, on obtient l'équation
$$(1 + \lambda) - 2(4 + 2\lambda) + 1 = 0$$
Soit $\lambda = -2$. L'unique point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ a donc pour coordonnées
$$(1 - 2, 4 - 4, 1 - (-2)) = (-1, 0, 3),$$
c'est donc le point D.

Énoncé deuxième session 2017

Pour les exercices 1 à 5, justifiez succinctement chaque réponse donnée.

Dans cet énoncé, $\mathbf{N}$ *désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls,* $\mathbf{R}$ *l'ensemble des nombres réels et* $\mathbf{Z}$ *l'ensemble des nombres entiers relatifs. Si* A *et* B *sont des ensembles, on note* $A \setminus B$ *l'ensemble*

$$A \setminus B = \{\, a \in A \mid a \notin B \,\}.$$

Question de cours. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et soit $n \in \mathbf{N}$. On note $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E. Donner la définition pour la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ d'être une famille libre.

Exercice 1. On rappelle que, pour des entiers $m, n \in \mathbf{N}$, on dit que m divise n et on note $m \mid n$ si et seulement s'il existe un entier $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = km$. On considère l'ensemble

$$\mathscr{P} = \{\, n \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \mid \forall m \in \mathbf{N},\ m \mid n \Rightarrow (m = 1 \text{ ou } m = n) \,\}.$$

1. Démontrer que si $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et si l'entier $m \in \mathbf{N}$ divise n alors $1 \leqslant m \leqslant n$.
2. (a) Donner la liste des éléments de l'ensemble $\left\{ m \in \mathbf{N} \;\middle|\; m \mid 2 \right\}$.
   (b) L'entier 2 appartient-il à $\mathscr{P}$?
   (c) L'entier 3 appartient-il à $\mathscr{P}$?
   (d) L'entier 6 appartient-il à $\mathscr{P}$?
3. (a) Soit $p \in \mathscr{P}$. Quel est le cardinal de l'ensemble $\left\{ m \in \mathbf{N} \;\middle|\; m \mid p \right\}$?
   (b) Soit $p \in \mathbf{N}$. On suppose que le cardinal de l'ensemble $\left\{ m \in \mathbf{N} \;\middle|\; m \mid p \right\}$ vaut 2. Que peut-on dire de l'appartenance de p à $\mathscr{P}$?
4. Soit n un entier pair tel que $n \geqslant 3$. Que peut-on dire de l'appartenance de n à $\mathscr{P}$?
5. Supposons que l'ensemble $\mathscr{P}$ est fini. On note $p_1, \ldots, p_s$ les éléments de $\mathscr{P}$ et on pose

$$N = 1 + \prod_{i=1}^{s} p_i.$$

   (a) Démontrer que $N \geqslant 7$.
   (b) Démontrer que l'ensemble $\mathscr{D}_N = \left\{ m \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \;\middle|\; m \mid N \right\}$ n'est pas vide.
   (c) Soit d le plus petit élément de $\mathscr{D}_N$. Démontrer que $d \in \mathscr{P}$.

   (d) En déduire que $d \mid N$ et $d \mid N-1$, puis que $d \mid 1$.
   (e) Conclure sur la finitude de $\mathscr{P}$.

6. Comment appelle-t-on les éléments de $\mathscr{P}$?

Exercice 2. On considère l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 1, \\ \cos(\frac{1}{x-1}) \text{ si } x \neq 1. \end{cases}$$

On rappelle que

$$\{\, t \in \mathbf{R} \mid \cos(t) = 0 \,\} = \{\, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \,\}$$

et que

$$\{\, t \in \mathbf{R} \mid \cos(t) = 1 \,\} = \{\, 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \,\}$$

1. Déterminer l'ensemble A des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
2. Déterminer l'ensemble B des solutions de l'équation $f(x) = 1$.
3. (a) Le nombre 1 est-il adhérent à A ?
   (b) Le nombre 1 est-il adhérent à B ?
4. Démontrer en utilisant les questions précédentes que l'application f n'admet pas de limite en 1.

Exercice 3. Soient a, b et c des nombres réels. Soit n un entier strictement positif. Démontrer la formule

$$(a+b+c)^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \frac{n!}{l!(k-l)!(n-k)!} a^l b^{k-l} c^{n-k}.$$

(On pourra utiliser une des formules du cours.)

Exercice 4. En utilisant l'exponentielle complexe, linéariser l'expression $(\cos(x))^5$. (On rappelle que *linéariser* signifie récrire l'expression comme somme de termes de la forme $a\cos(kx)$ ou $a\sin(kx)$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{Z}$).

Exercice 5. Dans cet exercice, on fixe un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan euclidien. Toutes les coordonnées de l'exercice sont relatives à ce repère. On note A le point de coordonnées $(-1, 0)$, B celui de coordonnées $(2, 1)$, C celui de coordonnées $(0, 3)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.

2. On rappelle que deux droites sont dites *perpendiculaires* si un vecteur directeur de la première est orthogonal à un vecteur directeur de la seconde. On note Δ_A la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (BC). On définit aussi la droite Δ_B passant par B et perpendiculaire à (CA) et la droite Δ_C passant par C et perpendiculaire à (AB). Donner une équation implicite pour chacune des droites Δ_A, Δ_B et Δ_C.
3. Démontrer que les droites Δ_A et Δ_B sont sécantes en un point H dont on déterminera les coordonnées.
4. Le point H appartient-il à Δ_C ?

Corrigé deuxième session 2017

Question de cours . La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ est libre si et seulement si elle vérifie la condition

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = 0 \Longrightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0).$$

Exercice 1. 1. Si $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ et $m \mid n$, alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = km$. Comme $n \neq 0$, on obtient que $k \neq 0$ et $m \neq 0$. Par conséquent, $k \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$. Donc $m = \frac{n}{k} \leqslant n$. Donc on a les inégalités $1 \leqslant m \leqslant n$.

2. (a) Par la question 1, on a l'inclusion
$$\{\, m \in \mathbf{N} \mid \ m \mid 2 \,\} \subset \{1, 2\}.$$
Or $2 = 1 \times 2 = 2 \times 1$. Donc $1 \mid 2$ et $2 \mid 2$ On a donc égalité :
$$\{\, m \in \mathbf{N} \mid \ m \mid 2 \,\} = \{1, 2\}.$$

   (b) Par la question précédente, on obtient l'assertion
$$\forall m \in \mathbf{N}, \quad m \mid 2 \Longrightarrow (m = 1 \text{ ou } m = 2).$$
Donc $2 \in \mathscr{P}$.

   (c) Par la question 1,
$$\{\, m \in \mathbf{N} \mid \ m \mid 3 \,\} \subset \{1, 2, 3\}.$$
Or si $2 \mid 3$, alors $2 \mid 3 - 2 = 1$. Comme $2 > 1$ cela contredit la question 1. Donc
$$\{\, m \in \mathbf{N} \mid \ m \mid 2 \,\} = \{1, 3\}.$$
Comme dans la question (b), on en déduit que $3 \in \mathscr{P}$.

   (d) On a la relation $6 = 2 \times 3$, donc $3 \mid 6$ et $6 \notin \mathscr{P}$.

3. (a) Par définition, si $p \in \mathscr{P}$, l'ensemble $\{\, m \in \mathbf{N} \mid \ m \mid p \,\}$ est contenu dans $\{1, p\}$. Inversement $1 \mid p$ et $p \mid p$, il y a donc égalité entre ces ensembles. Comme $p \neq 1$, l'ensemble $\{1, p\}$ est bien de cardinal 2.

   (b) Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que l'ensemble $\{\, m \in \mathbf{N} \mid \ m \mid p \,\}$ soit de cardinal 2. Si $p = 1$ alors $\{\, m \in \mathbf{N} \mid \ m \mid p \,\} = \{1\}$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $p \neq 1$. Comme $1 \mid p$ et $p \mid p$, l'ensemble $\{1, p\}$, qui est de cardinal 2 puisque $p \neq 1$, est contenu dans $\{\, m \in \mathbf{N} \mid \ m \mid p \,\}$. Par égalité des cardinaux, les deux ensembles sont égaux. Il en résulte que $p \in \mathscr{P}$.

4. L'hypothèse que n est pair signifie que $2 \mid n$. Comme $n \geqslant 3$, on a que $2 \neq n$. Donc $n \notin \mathscr{P}$.
5. (a) Comme $2 \in \mathscr{P}$ et $3 \in \mathscr{P}$ et que pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, on a que $p_i \geqslant 1$, on obtient que
$$\prod_{i=1}^{s} p_i \geqslant 6$$
et $N \geqslant 7$.
   (b) Comme $N \mid N$ et $N \neq 1$, l'entier N appartient à $\mathscr{D}_N$ et cet ensemble n'est pas vide.
   (c) Par définition, de $\mathscr{D}_N$, on a que $d \neq 1$. D'autre part si $m \mid d$ avec $m \neq 1$, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $d = km$. Or $d|N$, il existe donc $l \in \mathbf{N}$ tel que $N = ld$ donc $N - kld$, ce qui prouve que $m \mid N$ donc $m \in \mathscr{D}_N$ et, par définition de d comme plus petit élément de $\mathscr{D}_N$, on a l'inégalité $m \geqslant d$. Par la question 1, comme $m \mid d$, $m \leqslant d$. Donc $m = d$. Cela prouve l'assertion
$$\forall m \in \mathbf{N}, \quad m \mid d \Longrightarrow (m = 1 \text{ ou } m = d).$$
Donc $d \in \mathscr{P}$.
   (d) Comme $d \in \mathscr{P}$, il existe un entier $i_0 \in \{1, \dots, s\}$ tel que $p_{i_0} = d$. Donc on a l'égalité
$$N - 1 = d \times \left(\prod_{i=1}^{i_0 - 1} p_i\right) \times \left(\prod_{i=i_0+1}^{s} p_i\right).$$
Donc $d \mid N-1$. Or $d \in \mathscr{D}_N$ donc $d \mid N$. Il en résulte que $d \mid N-(N-1) = 1$.
   (e) Comme $d > 1$, la conclusion de la dernière question contredit la question 1. Donc l'ensemble $\mathscr{P}$ est infini.
6. L'ensemble $\mathscr{P}$ est l'ensemble de nombres premiers.

Exercice 2. 1. Notons tout d'abord que $f(1) = 0$ par définition, donc
$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \left(x = 1 \text{ ou } \left(x \neq 1 \text{ et } \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0\right)\right)$$
Mais on a les égalités d'ensemble
$$\left\{ x \in \mathbf{R} - \{1\} \middle| \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbf{R} - \{1\} \middle| \exists k \in \mathbf{Z},\ \frac{1}{x-1} = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$
$$= \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} + 1, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Donc

$$A = \{1\} \cup \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} + 1, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

2. Pour l'ensemble B, on a les égalités :

$$\begin{aligned} B &= \left\{ x \in \mathbf{R} - \{1\} \middle| \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbf{R} - \{1\} \middle| \exists k \in \mathbf{Z},\ \frac{1}{x-1} = 2k\pi \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2k\pi} + 1, k \in \mathbf{Z} - \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

3. (a) Comme $1 \in A$, le nombre réel 1 est adhérent à l'ensemble A.

   (b) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant 1. Il existe $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\subset I$. Soit $k \in \mathbf{Z}$. Soit $k \in \mathbf{Z}$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2k\pi} \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[&\iff \left|\frac{1}{2k\pi}\right| < \varepsilon \\ &\iff k > \frac{2\pi}{\varepsilon} \text{ ou } k < -\frac{2\pi}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

   Soit N un entier tel que $N > \frac{2\pi}{\varepsilon}$. Par les équivalences qui précèdent, $\frac{1}{2N\pi}+1 \in B \cap I$. Donc 1 est adhérent à B.

4. On raisonne par l'absurde en supposant que l'application f admet le limite l en 1. Alors, comme 1 est adhérent à A, la fonction restreinte $f_{|A}$ admet la limite l en 1. Mais l'application $f_{|A}$ est l'application constante nulle. Donc

$$f_{|A}(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 0.$$

Par unicité de la limite, $l = 0$. En raisonnant de même avec la partie B, on obtient que $l = 1$ et donc $0 = 1$, ce qui est absurde. Donc l'application f n'admet pas de limite en 1.

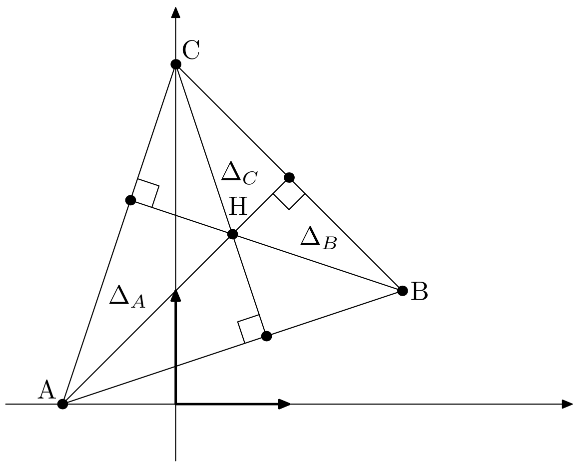
Exercice 3. On applique deux fois la formule du binôme de Newton qui nous donne les égalités

$$\begin{aligned}(a+b+c)^n = ((a+b)+c)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(a+b)^k c^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} a^l b^{k-l} c^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \frac{n!}{l!(k-l)!(n-k)!} a^l b^{k-l} c^{n-k}.\end{aligned}$$

Exercice 4. En utilisant l'expression de $\cos(x)$ en termes de l'exponentielle complexe puis la formule du binôme de Newton, on obtient les égalités,

$$\begin{aligned}(\cos(x))^5 &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 \\ &= \frac{1}{2^5}(e^{5ix}+5e^{3ix}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{-3ix}+e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{16}\cos(5x)+\frac{5}{16}\cos(3x)+\frac{5}{8}\cos(x).\end{aligned}$$

Exercice 5. Les point considérés sont représentés sur la figure



1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2-(-1), 1-0) = (3, 0)$. De même, le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(-2, 2)$ et $\overrightarrow{CA}$ pour coordonnées $(-1, -3)$.

2. Un point M du plan appartient à la perpendiculaire à la droite (BC) passant par A si et seulement si
$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM} = 0,$$
ce qui nous donne pour Δ_A l'équation
$$-2(x+1) + 2(y-0) = 0$$
c'est-à-dire
$$-2x + 2y - 2 = 0$$
qui équivaut à l'équation
$$x - y + 1 = 0$$
Pour Δ_B on obtient
$$-(x-2) - 3(y-1) = 0$$
c'est-à-dire
$$x + 3y - 5 = 0.$$
Enfin, pour Δ_C cela donne
$$3(x-0) + (y-3) = 0$$
soit
$$3x + y - 3 = 0.$$
3. On doit résoudre le système d'équations
$$\begin{cases} x - y + 1 & = 0 \\ x + 3y - 5 & = 0 \end{cases}$$
qui équivaut à
$$\begin{cases} x - y + 1 & = 0 \\ 4y & = 6 \end{cases}$$
ce qui donne $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{3}{2}$. Donc les droites Δ_A et Δ_B sont sécantes en le point H de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
4. Comme $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 3 = 0$, le point H appartient également à Δ_C.

Énoncé partiel 2018

Pour l'exercice 3 et le problème, justifiez succinctement chaque réponse donnée.

Dans cet énoncé, $\mathbf{N}$ *désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls,* $\mathbf{R}$ *l'ensemble des nombres réels et* $\mathbf{R}_+^*$ *l'ensemble des nombres réels strictement positifs.*

Question de cours. Donner la formule du binôme de Newton.

Exercice 1. Soient P et Q des assertions. À l'aide d'une table de vérité, vérifier que l'équivalence

$$(\neg(P \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow (P \wedge (\neg Q))$$

est une tautologie (c'est-à-dire toujours vraie).

Exercice 2. Dans cet exercice, f désigne une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour chacune des assertions suivantes, donner la propriété de f correspondant à l'assertion.

1. $\forall x, y \in \mathbf{R},\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$
2. $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R},\ y = f(x).$
3. $\exists A \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) < A.$
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall y \in \mathbf{R},\ |y - x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$

Exercice 3. Démontrer l'assertion suivante

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$$

(on pourra faire une preuve par récurrence).

Problème 3. On considère la partie de $\mathbf{R}^2$ définie par

$$\Gamma = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y^2 = x^2 + 1 \text{ et } y \geqslant 0 \,\}.$$

1. Démontrer que Γ est le graphe d'une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, dont on donnera le domaine de définition $\mathscr{D}_f$.
2. (a) Démontrer l'assertion suivante :
   $$\forall (x, y) \in \Gamma, \quad y \geqslant 1.$$
   (b) En déduire que 1 est le minimum des valeurs de la fonction f.
3. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) des éléments de Γ
   (a) Démontrer que $y_1 + y_2 \neq 0$

(b) Démontrer la relation :

$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}.$$

4. Soit M un nombre réel strictement positif. À l'aide des questions 2 et 3 démontrer l'assertion :

$$\forall x, x' \in [-M, M] \cap \mathscr{D}_f, \quad |f(x) - f(x')| \leqslant M|x - x'|.$$

5. On admet que $3 < \pi < 3,9$. On suppose que x est un nombre réel tel que $|x-\pi| < 10^{-6}$. Majorer l'erreur commise en utilisant $f(x)$ comme valeur approchée de $f(\pi)$.
6. Démontrer, *en utilisant la définition d'une limite avec les* ε, que f est continue. (Indication : on pourra éventuellement commencer par vérifier que, si x et a sont des nombres réels qui vérifient $|x - a| < 1$, alors $x \in [-|a| - 1, |a| + 1]$, puis utiliser la question 4).
7. Donner une autre démonstration de la continuité de f utilisant des résultats du cours.
8. En utilisant la question 3(b), démontrer que f est dérivable en tout nombre réel $a \in \mathscr{D}_f$ et que

$$f'(a) = \frac{a}{f(a)}.$$

Corrigé partiel 2018

Question de cours. Soient $a, b \in \mathbf{R}$, soit $n \in \mathbf{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exercice 1.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$\neg Q$	$P \wedge (\neg Q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Les colonnes correspondant à $\neg(P \Rightarrow Q)$ et $P \wedge (\neg Q)$ coïncident. Donc l'équivalence

$$(\neg(P \Rightarrow Q)) \iff (P \wedge (\neg Q))$$

est une tautologie.

Exercice 2.

1. L'application f est injective.
2. L'application f est surjective.
3. L'application f est majorée.
4. L'application f est continue.

Exercice 3. On démontre la formule par récurrence sur n :
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^{0} k(k-1) = 0 \times (-1) = 0 = \frac{(0+1)0(0-1)}{3}$. La formule est donc vraie dans ce cas.
Hérédité : On suppose la formule vérifiée pour n, on a alors

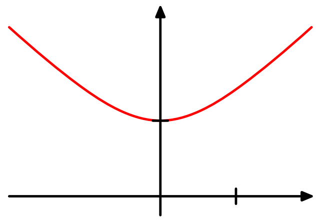
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k(k-1) = \left(\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\right) + (n+1)(n+1-1) &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + (n+1)n \\ &= \frac{(n+1)n(n-1+3)}{3} = \frac{((n+1)+1)(n+1)((n+1)-1)}{3}.\end{aligned}$$

La formule est donc vraie pour $n+1$.

Par récurrence, on obtient

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}.$$

Problème 4.



1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Comme $x^2+1 \geqslant 0$, il existe un unique nombre réel y tel que $y^2 = x^2+1$ et $y \geqslant 0$, à savoir $\sqrt{x^2+1}$. Donc Γ est le graphe d'une fonction définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbf{R}$.
2. (a) Soit $(x, y) \in \Gamma$. Alors $y^2 = x^2 + 1$ et $y \geqslant 0$. De $x^2 \geqslant 0$ on déduit les relations $y^2 = x^2 + 1 \geqslant 1$. Or $y \geqslant 0$ et la fonction de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ définie par $t \mapsto t^2$ est strictement croissante. Donc la relation $y < 1$ impliquerait $y^2 < 1$, ce qui contredit l'inégalité $y^2 \geqslant 1$. Donc $y \geqslant 1$.

   (b) Comme $(0, 1) \in \Gamma$, on a $f(0) = 1$. Par la question (a),
   $$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) \geqslant 1.$$
   Donc 1 est le minimum des valeurs de la fonction f.
3. (a) Par la question 2.(a), on a les inégalités $y_1 \geqslant 1$ et $y_2 \geqslant 1$ donc $y_1 + y_2 \geqslant 2$ et $y_1 + y_2 \neq 0$.

   (b) On a les égalités :
   $$y_1^2 = x_1^2 + 1 \quad \text{et} \quad y_2^2 = x_2^2 + 1$$
   Donc
   $$y_2^2 - y_1^2 = x_2^2 - x_1^2.$$
   Comme $y_1 + y_2 \neq 0$, il en résulte que
   $$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}.$$
4. Soient $x, x' \in [-M, M]$. Alors $|x| \leqslant M$ et $|x'| \leqslant M$. Par la question 2.(b), $f(x) \geqslant 1$ et $f(x') \geqslant 1$. Par la question 3.(b), comme, par définition de f, $(x, f(x)) \in \Gamma$ et $(x', f(x')) \in \Gamma$, on a la relation
   $$f(x) - f(x') = (x - x')\frac{x + x'}{f(x) + f(x')}.$$
   Il en résulte que $|f(x) + f(x')| = f(x) + f(x') \geqslant 2$ et
   $$|f(x) - f(x')| \leqslant \frac{|x| + |x'|}{2}|x - x'| \leqslant \frac{2M}{2}|x - x'| = M|x - x'|.$$

5. Comme $3 < \pi < 3.9$ et $|x - \pi| < 10^{-6}$, on a que $x, \pi \in [-4, 4]$ et par la question 4,
$$|f(x) - f(\pi)| < 4 \times 10^{-6} < 10^{-5}.$$
6. Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-a| < 1$. Alors $|x| \leqslant |a| + |x-a| = |a|+1$ donc $x \in [-|a|-1, |a|+1]$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons
$$\eta = \min\left(1, \frac{1}{|a|+1}\varepsilon\right).$$
Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-a| < \eta$. Comme $|x-a| < 1$, par ce qui précède, $x \in [-|a|-1, |a|+1]$. Or $a \in [-|a|-1, |a|+1]$. En appliquant la question 4 avec $M = |a|+1$ on obtient
$$|f(x) - f(a)| \leqslant (|a|+1)|x-a|.$$
Comme $|x-a| < \frac{1}{|a|+1}\varepsilon$, on obtient que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

La fonction f admet donc la limite $f(a)$ en tout $a \in \mathbf{R}$, c'est donc une fonction continue.
7. L'application f est donnée par $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$. C'est donc la composée de deux fonctions continues. Elle est donc continue.
8. Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R} - \{a\}$. Par la question 4, le taux d'accroissement de f est donné par
$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{x+a}{f(x)+f(a)}.$$
Comme f est continue et $f(a) \neq 0$ la propriété sur la limite de quotients donne que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ converge vers $\frac{2a}{2f(a)} = \frac{a}{f(a)}$ lorsque x tend vers a. Donc f est dérivable en a de dérivé $f'(a) = \frac{a}{f(a)}$.

Énoncé première session 2018

Pour les exercices 1 à 5, justifiez succinctement chaque réponse donnée.
Dans cet énoncé, $\mathbf{N}$ *désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls,* $\mathbf{R}$ *l'ensemble des nombres réels et* $\mathbf{R}_+^*$ *l'ensemble des nombres réels strictement positifs.*

Question de cours. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 dont on fixe une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Donner les formules pour les coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs de E.

Exercice 1. Soient E et F des ensembles. Soit $f : E \to F$ une application.

1. Soit A une partie de E. Donner la définition de l'ensemble $f(A)$.
2. Soit B une partie de F. Donner la définition de l'ensemble $f^{-1}(B)$.
3. Soit A une partie de E. Démontrer l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$.
4. On suppose que l'application f est *injective*. Démontrer que, pour tout élément $x \in E$, on a l'implication
$$f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A.$$
Que peut-on en déduire pour l'ensemble $f^{-1}(f(A))$ dans ce cas ?
5. On suppose maintenant que l'application f *n*'est *pas* injective. Démontrer qu'il existe deux éléments distincts x_1 et x_2 de E tels que
$$x_2 \in f^{-1}(f(\{x_1\})).$$
6. On note $\mathfrak{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Déduire des questions précédentes que l'application f est injective si et seulement si elle vérifie :
$$\forall A \in \mathfrak{P}(E), \quad A = f^{-1}(f(A)).$$

Exercice 2. On considère l'application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par
$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = \begin{cases} t\cos\left(\frac{1}{t}\right) \text{ si } t \neq 0, \\ 0 \text{ si } t = 0. \end{cases}$$

1. Prouver que
$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |f(t)| \leqslant |t|.$$
2. Démontrer que f admet une limite en 0.
3. Déterminer l'ensemble
$$A = \left\{ t \in \mathbf{R}_+^* \,\middle|\, \cos\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \right\}.$$

4. Déterminer l'ensemble
$$B = \left\{ t \in \mathbf{R}_+^* \,\middle|\, \cos\left(\frac{1}{t}\right) = -1 \right\}.$$
5. Démontrer que pour tout $\eta \in \mathbf{R}_+^*$, il existe un élement a de A et un élément b de B tels que
$$0 < a < \eta \quad \text{et} \quad 0 < b < \eta.$$
(On pourra utiliser sans le démontrer le fait que pour tout nombre réel x il existe un unique entier relatif, noté $\lfloor x \rfloor$ tel que
$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$
Cet entier s'appelle la *partie entière de x*.)
6. À l'aide des questions précédentes, prouver que l'application f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on définit
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k}{n+1}.$$
1. Calculer les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, donner une expression simple pour u_n.

Exercice 4. Dans cet exercice, $\mathrm{i} \in \mathbf{C}$ vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.
1. Justifier l'égalité
$$|-7 + 24\mathrm{i}| = 25.$$
2. Trouver les deux racines carrées du nombre complexe $-7 + 24\mathrm{i}$.
3. Déduire de la question précédente les solutions complexes de l'équation
$$z^2 + z + 2 - 6\mathrm{i} = 0.$$

Exercice 5. Dans cet exercice, on se place dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$ de repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Toutes les coordonnées sont exprimées dans ce repère. On considère les points A de coordonnées $(1, 2)$, B de coordonnées $(-1, 1)$ et C de coordonnées $(3, 0)$.
1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Donner une équation implicite de la droite $\mathscr{D}$ passant par les points A et B.
3. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
4. Donner la distance du point C à la droite $\mathscr{D}$.

5. Soit G un point de coordonnées (x_G, y_G). Donner les coordonnées du vecteur
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}.$$
6. Démontrer qu'il existe un unique point G du plan tel que
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$
et donner ses coordonnées.
7. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y). Exprimer la somme de carrés de distances
$$AM^2 + BM^2 + CM^2$$
en termes des coordonnées x et y.
8. On considère l'ensemble
$$\mathscr{C} = \{\, M \in \mathscr{P} \mid AM^2 + BM^2 + CM^2 = 13 \,\}.$$
Démontrer que $\mathscr{C}$ est un cercle de centre G et contenant le point A ; donner son rayon.

Corrigé première session 2018

Question de cours. Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x_u, y_u, z_u) et $\vec{v}$ un vecteur de coordonnées (x_v, y_v, z_v). Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées

$$(y_u z_v - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - y_u x_v).$$

Exercice 1.

1. L'image de la partie A est définie par

$$f(A) = \{\, y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x) \,\} = \{\, f(x), x \in A \,\}.$$

2. L'image réciproque de la partie B est définie par

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in E \mid f(x) \in B \,\}.$$

3. Soit $x \in A$. La seconde égalité de la question 1 implique que $f(x) \in f(A)$. Donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Donc on a démontré

$$\forall x \in A, \quad x \in f^{-1}(f(A))$$

c'est-à-dire $A \subset f^{-1}(f(A))$.

4. Soit $x \in E$ tel que $f(x) \in f(A)$. Par définition de $f(A)$, il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$. Comme f est supposée injective, $x = x'$ ce qui prouve que $x \in A$. On a obtenu l'assertion

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A.$$

Mais pour $x \in E$ les assertions $f(x) \in f(A)$ et $x \in f^{-1}(f(A))$ sont équivalentes. On obtient donc que

$$\forall x \in f^{-1}(f(A)), \quad x \in A$$

c'est-à-dire $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Comme la question 3 nous donne l'inclusion inverse, cela prouve que, dans ce cas,

$$A = f^{-1}(f(A)).$$

5. On suppose ici que f n'est pas injective. Il existe donc deux éléments distincts x_1 et x_2 de E tels que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Donc $f(x_2) \in \{f(x_1)\} = f(\{x_1\})$ ce qui prouve que

$$x_2 \in f^{-1}(f(\{x_1\})).$$

6. Par la question 4, si f est injective,

$$\forall A \in \mathfrak{P}(E), \quad A = f^{-1}(f(A)). \tag{49}$$

Par la question 5, si f n'est pas injective, il existe $x_1 \in E$ tel que

$$\{x_1\} \neq f^{-1}(f(\{x_1\})),$$

ce qui donne une partie A de E telle que $A \neq f^{-1}(f(A))$. Cela prouve la contraposée de la réciproque. En conclusion on a démontré que f est injective si et seulement si l'assertion (49) est vérifiée.

Exercice 2. 1. Pour tout nombre réel t, on a que $\cos(t) \in [-1, 1]$ et donc $|\cos(t)| \leqslant 1$. Par conséquent, si $t \in \mathbf{R}_+^*$, on obtient les inégalités

$$|f(t)| = \left|t \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right| = |t| \left|\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leqslant |t|.$$

Si $t = 0$, alors $|f(t)| = 0 = |0|$. Donc

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |f(t)| \leqslant |t|.$$

2. Par la question précédente, on a les inégalités

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad -|t| \leqslant f(t) \leqslant |t|.$$

Comme la fonction $t \mapsto |t|$ tend vers 0 quand t tend vers 0, le théorème des gendarmes implique que f admet la limite 0 en 0.

3. Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$. La relation $\cos\left(\frac{1}{t}\right) = 0$ équivaut à $\frac{1}{t} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ce qui revient à dire qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, c'est-à-dire

$$t = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}.$$

Comme ce nombre est strictement positif si et seulement si $k \geqslant 0$, on obtient

$$A = \left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}, k \in \mathbf{N}\right\}.$$

4. De manière analogue, la relation $\cos\left(\frac{1}{t}\right) = -1$ équivaut à $\frac{1}{t} \equiv \pi\ [2\pi]$ c'est-à-dire à l'existence de $k \in \mathbf{Z}$ tel que

$$t = \frac{1}{\pi + 2k\pi}.$$

On obtient

$$B = \left\{\frac{1}{\pi + 2k\pi}, k \in \mathbf{N}\right\}.$$

5. On fixe $\eta \in \mathbf{R}_+^*$. Soit $k \in \mathbf{N}$ on a l'équivalence
$$0 < \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} < \eta \Leftrightarrow k > \frac{1}{\eta\pi} - \frac{1}{2}.$$
Il suffit donc de poser $k_0 = \left\lfloor \frac{1}{\eta\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ pour obtenir un élément $\frac{1}{\frac{\pi}{2}+k_o\pi}$ de A strictement inférieur à η.

De même, si on pose $k_1 = \left\lfloor \frac{1}{\eta 2\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ cela fournit un élément $\frac{1}{\pi+2k_1\pi}$ de B strictement inférieur à η.

6. Pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$ le taux d'accroissement de la fonction f entre 0 et t est donné par
$$g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t} = \cos\left(\frac{1}{t}\right).$$
En particulier, on obtient que $g_{|A}$ est la fonction constante nulle et $g_{|B}$ est la fonction constante de valeur -1. Raisonnons par l'absurde en supposant que f est dérivable en 0. Alors la fonction g admet la limite $f'(0)$ en 0. Par la question 5, 0 est adhérent à A et B. Comme la limite est conservée par restriction et que la limite d'une fonction constante est la valeur de cette fonction, on obtient que $0 = f'(0) = -1$ ce qui est absurde. Donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3. 1. En utilisant la définition de u_n, on obtient
$$u_0 = \frac{2\times 0}{1} = 0, \quad u_1 = \frac{2\times 1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{2\times 1}{3} + \frac{2\times 2}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

2. Par la formule sur la somme des entiers, on obtient
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k}{n+1} = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{2n(n+1)}{(n+1)\times 2} = n.$$

Exercice 4. 1. $|-7+24\mathrm{i}| = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25.$

2. On résoud le système
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |-7+24\mathrm{i}| = 25 \\ x^2 - y^2 = -7 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 16 \\ xy > 0 \end{cases}$$
Les racines carrées de $-7+24\mathrm{i}$ sont donc $-3-4\mathrm{i}$ et $3+4\mathrm{i}$.

3. On veut résoudre l'équation
$$z^2 + z + 2 - 6\mathrm{i} = 0.$$
Son discriminant est donné par
$$\Delta = 1 - 4(2 - 6\mathrm{i}) = -7 + 24\mathrm{i}.$$
Par la question précédente les deux solutions de l'équation sont donc
$$\frac{-1-3-4\mathrm{i}}{2} = -2 - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad \frac{-1+3+4\mathrm{i}}{2} = 1 + 2\mathrm{i}.$$

Exercice 5. 1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2,-1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(2,-2)$.

2. La droite $\mathscr{D}$, passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ a pour équation
$$\begin{vmatrix} -2 & (x-1) \\ -1 & (y-2) \end{vmatrix} = 0$$
c'est-à-dire
$$x - 2y + 3 = 0.$$

3. On aplique l'équation aux coordonnées de C, ce qui donne $3 + 3 = 6 \neq 0$. Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

4. Par les questions précédentes,
$$d(C, \mathscr{D}) = \frac{|6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}.$$

5. Le vecteur $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ a pour coordonnées
$$(1 - x_G - 1 - x_G + 3 - x_G, 2 - y_G + 1 - y_G + 0 - y_G)$$
soit $(3 - 3x_G, 3 - 3y_G)$.

6. Par la question précédente, le point G vérifie la condition
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$$
si et seulement si ses coordonnées vérifient le système
$$\begin{cases} 3x_G - 3 = 0 \\ 3y_G - 3 = 0 \end{cases}$$
ce qui équivaut à $(x_G, y_G) = (1,1)$ ce qui prouve qu'il existe un unique tel point G, de coordonnées $(1,1)$.

7. On a les égalités

$$\begin{aligned} AM^2 + BM^2 + CM^2 &= (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x+1)^2 + (y-1)^2 + (x-3)^2 + y^2 \\ &= 3x^2 + 3y^2 - 6x - 6y + 16 \end{aligned}$$

8. Par la question précédente, le point M de coordonnées (x, y) appartient à l'ensemble $\mathscr{C}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient

$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 6y = -3$$

ce qui équivaut à

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = -1$$

ou encore à

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

L'ensemble $\mathscr{C}$ est donc un cercle de centre G et de rayon 1. Comme $AG = \sqrt{0+1} = 1$, le cercle passe par le point A.

Énoncé deuxième session 2018

Pour les exercices 1 à 4, justifiez de manière claire et concise chaque réponse donnée.
Dans cet énoncé, $\mathbf{N}$ *désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls,* $\mathbf{R}$ *l'ensemble des nombres réels et* $\mathbf{R}_+$ *l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.*

Question de cours. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie $\mathscr{D}_f$ de $\mathbf{R}$. Soit a un point adhérent à $\mathscr{D}_f$ et soit $l \in \mathbf{R}$. Donner la définition de « f a pour limite l en a ».

Exercice 1. Pour chacune des applications suivantes vérifier si l'application est injective, surjective ou bijective. Si l'application est bijective, donner sa réciproque.

1. L'application $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par $t \mapsto t^2$.
2. L'application $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ donnée par $t \mapsto t^2$.
3. L'application $f_3 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ donnée par $t \mapsto t^2$.
4. L'application $f_4 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ donnée par $t \mapsto t^2$.
5. L'application $f_5 : \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 0\} \to \mathbf{R}_+$ donnée par $t \mapsto t^2$.

Exercice 2. On considère l'application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $t \mapsto |t|$.

1. Démontrer qu'il existe une constante $C \in \mathbf{R}$, qu'on explicitera, telle que
$$\forall a \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad |f(x) - f(a)| \leqslant C|x - a|.$$
2. En utilisant la définition de la limite, démontrer que l'application f est continue.
3. Calculer le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ dans les cas suivants :
   (a) Si $x > 0$, $a > 0$ et $x \neq a$.
   (b) Si $x < 0$, $a < 0$ et $x \neq a$.
4. Démontrer que pour tout $a \in \mathbf{R} - \{0\}$, la fonction f est dérivable en a.
5. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 3. Dans cet exercice, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels définie par les conditions suivantes

(i) $u_0 = 2$;
(ii) $u_1 = 1$;
(iii) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. On s'intéresse dans cette question aux suites de nombres *complexes* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui vérifient la condition

(50) $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_{n+2} = v_{n+1} - v_n.$$

   (a) Soit $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$ tel que la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie la condition (50). Démontrer que $\lambda^2 = \lambda - 1$. (On pourra considérer les trois premiers termes de la suite et utiliser le fait que $\lambda^0 = 1$ pour tout nombre complexe λ).

   (b) Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation
   $$z^2 - z + 1 = 0.$$
   On notera z_1 et z_2 ses solutions.

   (c) Démontrer que les suites $(z_1^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(z_2^n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifient la condition (50).

3. Démontrer qu'il existe un unique couple de nombres complexes $(x, y) \in \mathbf{C}^2$, qu'on calculera, tel que
$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xz_1 + yz_2 = 1. \end{cases}$$

4. On conserve les notations des questions précédentes. Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 0$, on a l'assertion suivante :
$$\forall m \in \{0, \dots, n+1\}, \quad u_m = xz_1^m + yz_2^m.$$

5. Démontrer que $z_1^3 = z_2^3 = -1$ (on pourra éventuellement commencer par développer l'expression $(z+1)(z^2 - z + 1)$ où z désigne un nombre complexe).

6. Écrire z_1 et z_2 comme l'exponentielle de nombres complexes.

7. Démontrer qu'il existe un nombre réel α dont on donnera la valeur tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait la relation
$$u_n = 2\cos(\alpha n).$$

8. Soit $n \in \mathbf{N}$. Que peut-on dire de u_n et u_{n+6} ?

Exercice 4. Dans cet exercice, on se place dans un espace affine euclidien orienté $\mathscr{E}$ de dimension 3 muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Toutes les coordonnées sont exprimées dans ce repère. On considère les points A de coordonnées $(1, 1, 1)$, B de coordonnées $(-1, 1, 3)$ et C de coordonnées $(1, 2, 0)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

3. Calculer la distance du point C à la droite affine (AB), définie comme l'unique droite passant par les points A et B.
4. Donner une équation implicite d'un plan $\mathscr{P}$ contenant les trois points A, B et C.
5. Soit D le point de coordonnées $(1, 2, 1)$. Calculer la distance de D au plan $\mathscr{P}$. *Dans la suite, on note ρ cette distance.*
6. On note $d(M, \mathscr{P})$ la distance d'un point M de $\mathscr{E}$ au plan $\mathscr{P}$. Démontrer que l'ensemble de points
$$\{ M \in \mathscr{E} \mid d(M, \mathscr{P}) = \rho \}$$
est la réunion de deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ dont on donnera des équations implicites.
7. Quelle est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$?

Corrigé deuxième session 2018

Question de cours. La fonction f a pour limite l en a si et seulement si elle vérifie la condition

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-l| < \varepsilon.$$

Exercice 1.

1. L'application f_1 n'est pas injective puisque $f_1(-1) = 1 = f_1(1)$. Elle n'est pas non plus surjective puisque
$$\forall t \in \mathbf{R}, f_1(t) \geqslant 0$$
et donc il n'existe pas de $t \in \mathbf{R}$ tel que $f_1(t) = -1$.
2. L'application f_2 n'est pas injective puisque $f_2(-1) = 1 = f_2(1)$. Elle est surjective, puisque pour tout $y \in \mathbf{R}_+$, on a $y = f_2(\sqrt{y})$.
3. L'application f_3 est injective. En effet, soient t_1 et t_2 des nombres réels positifs. Si $f_3(t_1) = f_3(t_2)$ alors $t_1^2 = t_2^2$ donc $t_1^2 - t_2^2 = 0$. Par conséquent, $(t_1-t_2)(t_1+t_2) = 0$ ce qui implique que $t_1 = t_2$ ou $t_1 = -t_2$. Dans le cas où $t_1 = -t_2$, si $t_1 > 0$ alors $t_2 < 0$ ce qui contredit le fait que t_2 est supposé positif. Donc $t_1 = 0$ et $t_2 = -t_1 = 0 = t_1$. Dans les deux cas on a donc $t_1 = t_2$ ce qui démontre l'injectivité de f_3.
   Par contre f_3 n'est pas surjective puisque -1 n'a pas d'antécédent par f_3.
4. Soit $y \in \mathbf{R}_+$, le nombre réel y a un unique antécédent par f_4, à savoir sa racine carrée. Donc f_4 est bijective de réciproque l'application $f_4^{-1} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ donnée par $t \mapsto \sqrt{t}$.
5. Soit $y \in \mathbf{R}_+$. Le nombre réel y a un unique antécédent par f_5, à savoir l'opposé de sa racine carrée. Donc f_5 est bijective de réciproque l'application $f_5^{-1} : \mathbf{R}_+ \to \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 0\}$ donnée par $t \mapsto -\sqrt{t}$.

Exercice 2.

1. Par la seconde inégalité triangulaire, on a
$$\forall a, x \in \mathbf{R}, \quad \Big||x| - |a|\Big| \leqslant |x-a|$$
ce qui donne l'assertion demandée avec $C = 1$.
2. Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $\eta = \varepsilon$. Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-a| < \eta$. Par la question précédente,
$$|f(x) - f(a)| \leqslant |x-a| < \eta = \varepsilon.$$
On a donc démontré
$$\forall a \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}, \quad |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon,$$
ce qui signifie que l'application f est continue.

3. (a) Si $x > 0$, $a > 0$ et $x \neq a$, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x| - |a|}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1.$$

(b) De même si $x < 0$, $a < 0$ et $x \neq a$, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -1.$$

4. Distinguons deux cas. Si $a > 0$, soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $\eta = |a|$, alors pour tout $x \in \mathbf{R} - \{a\}$ tel que $|x - a| < \eta$ on a $x > 0$ et, par la question précédente,

$$\left| \frac{|x| - |a|}{x - a} - 1 \right| = 0 < \varepsilon.$$

donc le taux d'accroissement tend vers 1 lorsque x tend vers a, ce qui prouve que f est dérivable en a et $f'(a) = 1$. De même, si $a < 0$, par la question précédente le taux d'accroissement tend vers -1 lorsque x tend vers a ce qui prouve que f est dérivable en a et que $f'(a) = -1$.

5. Calculons le taux d'accroissement en 0. Si $x > 0$, alors

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = 1.$$

Mais si $x < 0$ alors $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$. Donc

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1,$$
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

Comme les limites à droite et à gauche du taux d'accroissement sont différentes, cela prouve qu'il n'admet pas de limite en 0 et la fonction n'est donc pas dérivable en 0.

Exercice 3. 1. Par la condition (iii) appliquée avec $n = 0$, on a $u_2 = u_1 - u_0 = 1 - 2 = -1$. De même $u_3 = u_2 - u_1 = -1 - 1 = -2$ et $u_4 = u_3 - u_2 = -2 - (-1) = -1$.

2. (a) Si la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifie la condition (1), pour $n = 0$, on a que

$$\lambda^2 = \lambda - 1$$

.

(b) Le discriminant de l'équation vaut $\Delta = 1 - 4 = -3$ dont les racines carrées sont $\sqrt{3}i$ et $-\sqrt{3}i$. Les solutions de l'équation sont donc $z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ et $z_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$.

(c) Soit $z \in \{z_1, z_2\}$. Par définition de z_1 et z_2, on a $z^2 = z - 1$. Donc si $n \in \mathbf{N}$, on a $z^{n+2} = z^2 \times z^n = (z-1) \times z^n = z^{n+1} - z^n$. Donc la suite $(z^n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie la condition (1).

3. On veut résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x\frac{1-\sqrt{3}i}{2} + y\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = 1 \end{cases}$$

qui se réécrit

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}\sqrt{3}i = 1. \end{cases}$$

Il est donc équivalent à

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ y - x = 0 \end{cases}$$

et donc à $x = y = 1$. Il y a donc une unique solution, à savoir le couple $(1, 1)$.

4. **Initialisation.** Par définition du couple (x, y), compte tenu des hypothèses (i) et (ii), on a les relations

$$\begin{cases} u_0 = 2 = x(z_1)^0 + y(z_2)^0 \\ u_1 = 1 = xz_1^1 + yz_2^1. \end{cases}$$

Ce qui démontre l'assertion pour $n = 0$.

Hérédité. On suppose maintenant l'assertion vraie pour un entier n. Démontrons-la pour $n+1$. Soit $m \in \{0, \dots, n+2\}$. Si $m \leqslant n+1$, alors l'égalité $u_m = xz_1^m + yz_2^m$ est vraie par hypothèse de récurrence. Il reste à traiter le cas $m = n + 2$. Par la condition (iii) on a l'égalité $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$. En utilisant deux fois l'hypothèse de récurrence, on en déduit les égalités :

$$u_{n+2} = (xz_1^{n+1} + yz_2^{n+1}) - (xz_1^n + yz_1^n) = x(z_1^{n+1} - z_1^n) + y(z_2^{n+1} - z_2^n).$$

Mais, par la question 2.(c) les suites $(z_1^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(z_2^n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifient la condition (1). Donc

$$u_{n+2} = xz_1^{n+2} + yz_2^{n+2}.$$

ce qui prouve la formule pour $m = n + 2$.

Conclusion. Par récurrence, on a donc que pour tout entier n,

$$\forall m \in \{0, \ldots, n+1\}, \quad u_m = xz_1^m + yz_2^m.$$

5. Pour tout nombre complexe tel que $z^2 - z + 1 = 0$, on a les relations $z^3 = z \times z^2 = z(z-1) = z^2 - z = z - 1 - z = -1$ donc, comme z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$, ils vérifient les égalités $z_1^3 = z_2^3 = -1$.
6. Comme $z_1^3 = z_2^3 = -1$, on a $|z_1| = |z_2| = 1$ et les arguments θ_1 et θ_2 de z_1 et z_2 respectivement sont congrus à $\pi/3$ modulo $2\pi/3$. Donc
$$\{z_1, z_2\} \subset \{e^{\frac{i\pi}{3}}, -1, e^{\frac{-i\pi}{3}}\}.$$
Comme la partie imaginaire de z_1 est strictement négative et celle de z_2 strictement positive, on obtient que $z_1 = e^{\frac{-i\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$.
7. Par la question 4, on a les relations
$$u_n = e^{\frac{ni\pi}{3}} + e^{\frac{-ni\pi}{3}} = 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$
pour tout $n \in \mathbf{N}$, ce qui prouve la relation avec $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
8. Comme la fonction cos est 2π-périodique, on a la relation $u_{n+6} = u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 4. 1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-1-1, 1-1, 3-1) = (-2, 0, 2)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ pour coordonnées $(1-1, 2-1, 0-1) = (0, 1, -1)$.

2. Le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(0 \times (-1) - 2 \times 1, 2 \times 0 - (-2) \times (-1), (-2) \times 1 - 0 \times 0) = (-2, -2, -2)$. Comme ce produit vectoriel n'est pas nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.
3. La distance d du point C a la droite (AB) est donnée par la formule
$$d = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{4+4+4}}{\sqrt{4+4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$
4. Comme le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan $\mathscr{P}$, il en est de même du vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$ et une équation implicite du plan est donnée par
$$(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0,$$
c'est-à-dire
$$x + y + z = 3.$$

5. La distance du point D au plan $\mathscr{P}$ est donnée par la formule
$$d(D, \mathscr{P}) = \frac{|1+2+1-3|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$
6. L'ensemble des points M de l'espace tels que $d(M, \mathscr{P}) = \rho$ est l'ensemble des points de coordonnées (x, y, z) tels que
$$\frac{|x+y+z-3|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
c'est-à-dire l'ensemble des points tels que
$$|x+y+z-3| = 1$$
c'est donc l'ensemble des points de coordonnées (x, y, z) tels que
$$x+y+z-3 = 1$$
ou
$$x+y+z-3 = -1$$
C'est donc la réunion du plan $\mathscr{P}_1$ d'équation implicite $x+y+z=4$ et du plan $\mathscr{P}_2$ d'équation implicite $x+y+z=2$.
7. Les deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles et distincts, leur intersection est donc vide.

Énoncé partiel 2019

Exercice 1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application.

1. Écrire une définition de l'ensemble $f(]-1,1[)$.
2. Écrire une assertion mathématique correspondant à la phrase "f a pour limite 1 en 0."

Exercice 2. Soit $f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux applications. Soit P l'assertion

$$\forall y \in \mathbf{R}, \forall i \in \{1,2\}, ((f_i(y) < 0) \implies (\exists j \in \{1,2\}, f_j(y) > 0)).$$

1. Écrire la négation de l'assertion P.
2. Que signifie P (en français) ?
3. Donner un exemple de deux fonctions f_1, f_2, qui satisfont P.
4. Donner un exemple de deux fonctions f_1, f_2, qui ne satisfont pas P.

Exercice 3. Pour chaque assertion suivante, dire si elle est vraie ou fausse, et le démontrer.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x^2 > y^2$
2. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x^3 > y^3$
3. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \{-1, 0, +1\}, |x| = xy$
4. $\forall x, y \in \mathbf{R}, \exists s \in \{-1, +1\}, |x - y| = s \times (|x| - |y|)$

Exercice 4. Décrire les sous-ensembles de $\mathbf{R}$ ci-dessous comme intervalles ou réunions d'intervalles.

1. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x-2| < 0\}$,
2. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x-3| \geq 5\}$,
3. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x < 0\}$,
4. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x+1| \geq |3x-1|\}$.

Exercice 5.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\Big(\sum_{k=j}^{3}(j \times k)\Big)$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application $x \mapsto x^2$. Pour chaque assertion suivante, dire si elle est vraie ou fausse, et le démontrer.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, |x-2| < 10^{-1} \implies |f(x) - f(2)| < 10^{-2}$
2. $\forall x \in \mathbf{R}, |x-2| < 10^{-2} \implies |f(x) - f(2)| < 10^{-1}$
3. $\forall x \in \mathbf{R}, |f(x) - f(2)| < 10^{-1} \implies |x-2| < 10^{-2}$

Exercice 7. Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ l'application $x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Pour $x, y \in \mathbf{R}_+$, simplifier l'expression $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.
2. En déduire une constante réelle C telle que, pour tous $x, y \in [1, 10]$, on ait
$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq C|x - y|.$$
3. En déduire que la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1, 10]$ est continue.
4. En utilisant la question 2, dire si l'estimation $e = 2.718\ldots$ permet de connaître la valeur de $\sqrt{e}$ avec une précision de 10^{-3}.
5. Montrer que f est continue.

Exercice 8. Soit x un nombre réel tel que $x + \frac{1}{x}$ est dans $\mathbf{Z}$.

1. Démontrer que le nombre $x^2 + \frac{1}{x^2}$ est aussi dans $\mathbf{Z}$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ le nombre $x^n + \frac{1}{x^n}$ est dans $\mathbf{Z}$.
(Indication : Démontrer le résultat par récurrence en considérant l'assertion $P(n)$: “Les nombres $x^n + \frac{1}{x^n}$ et $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ sont dans $\mathbf{Z}$”.)

Corrigé partiel 2019

Exercice 1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application.

1. Écrire une définition de l'ensemble $f(]-1,1[)$.
2. Écrire une assertion mathématique correspondant à la phrase "f a pour limite 1 en 0."

Solution de l'exercice 1. 1. (1 point) Voici deux définitions possibles :

$$f(]-1,1[) = \{y \in \mathbf{R} \mid \exists x \in]-1,1[, f(x) = y\} = \{f(x), x \in]-1,1[\}.$$

2. (1 point) $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}_+^*, |x| < \eta \implies |f(x) - 1| < \varepsilon.$

Exercice 2. Soit $f_1, f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux applications. Soit P l'assertion

$$\forall y \in \mathbf{R}, \forall i \in \{1,2\}, ((f_i(y) < 0) \implies (\exists j \in \{1,2\}, f_j(y) > 0)).$$

1. Écrire la négation de l'assertion P.
2. Que signifie P (en français) ?
3. Donner un exemple de deux fonctions f_1, f_2, qui satisfont P.
4. Donner un exemple de deux fonctions f_1, f_2, qui ne satisfont pas P.

Solution de l'exercice 2. 1. (1 point) $\exists y \in \mathbf{R}, \exists i \in \{1,2\}, ((f_i(y) < 0) \wedge (\forall j \in \{1,2\}, f_j(y) \leq 0))$.

2. (1 point) En tout point y de $\mathbf{R}$, si l'une des deux fonctions f_1, f_2 est strictement négative en y, alors l'une des deux fonctions est strictement positive en y (et donc c'est l'autre fonction qui est strictement positive).

   Autrement dit : les deux fonctions ne peuvent être simultanément négatives.
3. (1 point) Deux fonctions constantes $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = 1$ marchent : elles ne sont jamais négatives, donc il n'y a rien à vérifier. Elles satisfont donc P trivialement.

   Un exemple moins trivial : $f_1(x) = \sin x$ et $f_2(x) = -\sin x$. Lorsqu'une des deux fonctions est négative, l'autre est positive, donc elles satisfont P.
4. (1 point) Deux fonctions constantes $f_1(x) = -1$ et $f_2(x) = -1$ marchent : lorsque f_1 est négative, f_2 l'est aussi.

Exercice 3. Pour chaque assertion suivante, dire si elle est vraie ou fausse, et le démontrer.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x^2 > y^2$
2. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x^3 > y^3$

3. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \{-1, 0, +1\}, |x| = xy$
4. $\forall x, y \in \mathbf{R}_+, \exists s \in \{-1, +1\}, |x - y| = s \times (|x| - |y|)$

Solution de l'exercice 3. 1. (1 point) L'assertion est fausse. En effet sa négation est $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x^2 \leq y^2$. Il suffit alors de choisir $x = 0$ pour que la négation soit vraie : pour tout y réel, on a bien $0 \leq y^2$.

2. (1 point) L'assertion est vraie. En effet la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante, donc pour x fixé, on peut poser (1 point) $y = x - 1$, et on a alors $x^3 > (x-1)^3 = y^3$.
3. (1 point) L'assertion est vraie. Démontrons-le. Soit x un réel quelconque. Séparons deux cas.
Cas 1 : $x \geq 0$. Alors on a $|x| = x$, et donc en posant $y = +1$, on a $|x| = x = xy$.
Cas 2 : $x < 0$. Alors on a $|x| = -x$, et donc en posant $y = -1$, on a $|x| = -x = xy$.
4. (1 point) L'assertion est vraie. En effet comme x et y sont positifs, on a $|x|-|y| = x - y$ d'une part, et d'autre part, si $x - y$ est positifs on a $|x - y| = x - y = 1 \times (|x| - |y|)$ et si $x - y$ est négatif on a $|x - y| = -x + y = (-1) \times (|x| - |y|)$. Dans tous les cas on trouve un $s \in \{-1, +1\}$ tel que $|x - y| = s \times (|x| - |y|)$.

Exercice 4. Décrire les sous-ensembles de $\mathbf{R}$ ci-dessous comme intervalles ou réunions d'intervalles.

1. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 2| < 0\}$,
2. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 3| \geq 5\}$,
3. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x < 0\}$,
4. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x + 1| \geq |3x - 1|\}$.

Solution de l'exercice 4. 1. (1 point) Comme la valeur absolue est une fonction qui prend ses valeurs de $\mathbf{R}_+$, elle n'est jamais strictement négative, par conséquent on a $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 2| < 0\} = \emptyset$.

2. (2 points) Séparons deux cas.
Cas 1 : si $x - 3 \geq 0$, alors on a
$$|x - 3| \geq 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x - 3 \geq 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 8,$$
donc on trouve l'intervalle $[8, +\infty[$, dont les points satisfont bien $x - 3 \geq 0$.
Cas 2 : si $x - 3 < 0$, alors on a
$$|x - 3| \geq 5 \quad \Longleftrightarrow \quad -x + 3 \geq 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq 2,$$
donc on trouve l'intervalle $]-\infty, 2]$, dont les points satisfont bien $x - 3 < 0$.
En conclusion, on a $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 3| \geq 5\} =]-\infty, 2] \cup [8, +\infty[$.

3. (1 point) On a $x^2 - 3x = x(x-3)$. On peut donc faire un tableau de signes :

x		0		3	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

.

On voit alors que $x(x-3) < 0$ est équivalent à $x \in]0, 3[$.

4. (3 points) Là encore on commence par un tableau de signes :

x		-1		$\frac{1}{3}$	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

.

On sépare alors trois cas.
Cas 1 : $x \in]-\infty, -1[$. Alors on a $|x+1| = -x-1$ et $|3x-1| = -3x+1$. On a alors

$$|x+1| \geq |3x-1| \iff -x-1 \geq -3x+1 \iff 2x \geq 2 \iff x \geq 1.$$

L'ensemble des solutions dans ce cas est donc $]-\infty, -1[\cap[1, +\infty[= \emptyset$.
Cas 2 : $x \in [-1, \frac{1}{3}[$. Alors on a $|x+1| = x+1$ et $|3x-1| = -3x+1$, d'où

$$|x+1| \geq |3x-1| \iff x+1 \geq -3x+1 \iff 4x \geq 0 \iff x \geq 0.$$

L'ensemble des solutions dans ce cas est donc $[-1, \frac{1}{3}[\cap \mathbf{R}_+ = [0, \frac{1}{3}[$.
Cas 3 : $x \in [\frac{1}{3}, +\infty[$. Alors on a $|x+1| = x+1$ et $|3x-1| = 3x-1$, d'où

$$|x+1| \geq |3x-1| \iff x+1 \geq 3x-1 \iff 2 \geq 2x \iff x \leq 1.$$

L'ensemble des solutions dans ce cas est donc $[\frac{1}{3}, +\infty[\cap]-\infty, 1] = [\frac{1}{3}, 1]$..

En conclusion, l'ensemble des solutions est donc $\emptyset \cup [0, \frac{1}{3}[\cup[\frac{1}{3}, 1] = [0, 1]$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application $x \mapsto x^2$. Pour chaque assertion suivante, dire si elle est vraie ou fausse, et le démontrer.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, |x-2| < 10^{-1} \implies |f(x) - f(2)| < 10^{-2}$
2. $\forall x \in \mathbf{R}, |x-2| < 10^{-2} \implies |f(x) - f(2)| < 10^{-1}$
3. $\forall x \in \mathbf{R}, |f(x) - f(2)| < 10^{-1} \implies |x-2| < 10^{-2}$

Solution de l'exercice 5. 1. (1 point) Au voisinage du nombre 2, la fonction carré a tendance a multiplier les imprécisions par 4. Cette assertion semble donc fausse. Voici un contre-exemple : prenons $x = 2,05$, alors on a bien $|x-2| = |2,05-2| = 0,05 < 10^{-1}$. D'autre part on a $f(x) = (2+0,05)^2 = 4+0,1+0,0025 = 4,1025$.

En particulier on a $|f(x) - f(2)| = 0,1025 > 10^{-2}$. Par conséquent l'assertion est fausse.

2. (2 points) On a remarqué dans la question précédente que la fonction f multiplie les imprécisions par enviton 4 au voisinage de 2, comme $4 \times 10^{-2} < 10^{-1}$, on s'attend à ce que l'assertion soit vraie. Démontrons-la.

   Soit x réel tel que $|x - 2| < 10^{-2}$. Alors on a $|f(x) - f(2)| = |x^2 - 2^2| = |(x+2)(x-2)| = |x+2| \times |x-2|$. Or comme on a $x \in [2 - 10^{-2}, 2 + 10^{-2}]$, on a $x+2 \in [4-10^{-2}, 4+10^{-2}]$, et donc en particulier $|x+2| < 5 < 10$. Par conséquent on a $|f(x)-f(2)| = |x+2| \times |x-2| < 10 \times |x-2| < 10 \times 10^{-2} = 10^{-1}$. L'assertion est donc vraie.

3. (1 point) L'assertion est fausse. Il suffit de prendre $x = -2$ pour avoir $|f(x) - f(2)| = |4 - 4| = 0 < 10^{-1}$, mais on a aussi $|-2-2| = 4 \leq 10^{-2}$, ce qui prouve que l'implication est fausse.

Exercice 6. 1. Calculer $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\Big(\sum_{k=j}^{3}(j \times k)\Big)$.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Solution de l'exercice 6. 1. (1 point) On peut développer :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3}\Big(\sum_{k=j}^{3}(j \times k)\Big) &= \Big(\sum_{k=1}^{3}(1 \times k)\Big) + \Big(\sum_{k=2}^{3}(2 \times k)\Big) + \Big(\sum_{k=3}^{3}(3 \times k)\Big) \\
&= \big((1 \times 1) + (1 \times 2) + (1 \times 3)\big) + \big((2 \times 2) + (2 \times 3)\big) + \big((3 \times 3)\big) \\
&= (1 + 2 + 3) + (4 + 6) + (9) \\
&= 6 + 10 + 9 \\
&= 25.
\end{aligned}$$

2. (2 points) Faisons une preuve par récurrence. Pour l'initialisation, on a d'une part $\displaystyle\sum_{i=0}^{0} i(i+1) = 0 \times (0+1) = 0$, et d'autre part $\frac{0(0+1)(0+2)}{3} = 0$.

Pour l'hérédité, soit $n \in \mathbf{N}$ et supposons qu'on a $\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
Alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i(i+1) &= \Big(\sum_{i=0}^{n} i(i+1)\Big) + (n+1)(n+2)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3},\end{aligned}$$

ce qui conclut.

Exercice 7. Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ l'application $x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Pour $x, y \in \mathbf{R}_+$, simplifier l'expression $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.
2. En déduire une constante réelle C telle que, pour tous $x, y \in [1, 10]$, on ait
$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq C|x - y|.$$
3. En déduire que la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1, 10]$ est continue.
4. En utilisant la question 2, dire si l'estimation $e = 2.718\ldots$ permet de connaître la valeur de $\sqrt{e}$ avec une précision de 10^{-4}.
5. Montrer que f est continue.

Solution de l'exercice 7.

1. (1 point) On a $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2 = |x| - |y|$. Comme x et y sont positifs, on peut simplifier cette dernière expression en $x - y$.
2. (2 points) Par définition cela revient à montrer que pour tout $a \in [1, 10]$ on a $f|_{[1,10]}(x) \xrightarrow{x \to a} f(a)$, ce qui se traduit par l'assertion

$$\forall a \in [1, 10], \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in [1, 10], (|x - a| < \eta) \implies (f(x) - f(a) < \varepsilon).$$

Démontrons cette dernière assertion. Soit $a \in [1, 10]$ et soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $\eta = 2\varepsilon$ (nous verrons plus bas pourquoi le 2 est ce qu'il nous faut ici). Soit $x \in [1, 10]$, et supposons que x vérifie $|x - a| < \eta$. Alors d'après la question 2, on a $|f(x) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|x - a| < \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}2\varepsilon = \varepsilon$, ce qui prouve l'assertion.

3. (1 point) L'estimation $e = 2,718\ldots$ est précise à 10^{-3} près, c'est-à-dire qu'on a $|2,718 - e| < 10^{-3}$. Or d'après la question 2, on a alors $|\sqrt{2,718} - \sqrt{e}| \leq \frac{1}{2}|2,718 - e| < 10^{-3}/2$. Ce dernier nombre n'est pas inférieur ou égal à 10^{-4}, donc l'estimation n'est ici pas suffisante pour avoir une précision de 10^{-4}.

4. (3 points) Pour montrer la continuité de f sur $\mathbf{R}_+$, il faut montrer l'assertion

$$\forall a \in \mathbf{R}_+, \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}_+, (|x-a| < \eta) \implies (|f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Le schéma est le même qu'à la question 3, mais la constante C ne marche pas partout. Le raisonnement de la question 2 montre que si a est strictement positif, alors pour tout $a \in [\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}]$, on a $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = |\frac{|x|-|a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a/2}+\sqrt{a/2}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}|x-a|$.

On peut alors démontrer l'assertion. Soit $a \in \mathbf{R}_+$. On sépare deux cas :
Cas 1 : $a > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose alors $\eta = \sqrt{2a}\varepsilon$. Soit $x \in \mathbf{R}_+$ tel que $|x-a| < \eta$. On a alors $|f(x) - f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{2a}}|x-a| < \frac{1}{\sqrt{2a}}\eta = \frac{1}{\sqrt{2a}}\sqrt{2a}\varepsilon = \varepsilon$, ce qui prouve l'assertion dans ce cas.
Cas 2 : $a = 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. On pose $\eta = \varepsilon^2$. Soit $x \in \mathbf{R}_+$ tel que $|x| < \eta$. Alors on a $|f(x) - f(a)| = \sqrt{x} < \sqrt{\eta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$, ce qui conclut dans ce cas.

Comme on a épuisé tous les cas pour a, l'assertion est bien montrée pour tout $a \in \mathbf{R}_+$.

Exercice 8. Soit x un nombre réel tel que $x + \frac{1}{x}$ est dans $\mathbf{Z}$.

1. Démontrer que le nombre $x^2 + \frac{1}{x^2}$ est aussi dans $\mathbf{Z}$.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ le nombre $x^n + \frac{1}{x^n}$ est dans $\mathbf{Z}$.
(Indication : Démontrer le résultat par récurrence en considérant l'assertion $P(n)$: "Les nombres $x^n + \frac{1}{x^n}$ et $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ sont dans $\mathbf{Z}$".)

Solution de l'exercice 8. 1. (1 point) On a $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$. On a alors $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$. Or par hypothèse $(x + \frac{1}{x})^2$ est un entier, et 2 aussi, donc leur différence $x^2 + \frac{1}{x^2}$ aussi.

2. (2 points) On considère l'assertion $P(n)$: "Les nombres $x^n + \frac{1}{x^n}$ et $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ sont dans $\mathbf{Z}$", que l'on va démontrer par récurrence sur n, en partant de $n = 0$.

Pour $n = 0$, l'assertion revient à dire que $x^0 + \frac{1}{x^0} = 2$ et $x + \frac{1}{x}$ sont entiers, ce qui est vrai par hypothèse.

Supposons maintenant qu'on a démontré $P(n)$. Développons $(x^n + \frac{1}{x^n})(x + \frac{1}{x}) = x^{n+1} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n+1}} = (x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}) + (x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}})$. Par conséquent on a

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = (x^n + \frac{1}{x^n})(x + \frac{1}{x}) - (x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}).$$

Par hypothèse de récurrence, le membre de droite dans l'équation précédente est un entier, par conséquent $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ est aussi entier. Comme $x^n + \frac{1}{x^n}$ est supposé entier, on a bien démontré $P(n+1)$, ce qui achève la récurrence (et ce corrigé).

Énoncé première session 2019

Exercice 1. Calculer

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=j}^{3}\frac{k}{j}\right)$,
2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k\right)$,
3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k\right)$ en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 2. Écrire une assertion mathématique traduisant l'affirmation : “Tout nombre réel peut être approché à 10^{-5} près par un nombre rationnel.”

Exercice 3. Pour chaque assertion ci-dessous, traduire l'assertion par une phrase française. Écrire la négation sous forme d'assertion. Dire si l'assertion initiale est vraie ou fausse, et le démontrer.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, |x-y| < \frac{1}{2}$,
2. $\forall x \in [0,1], (|x| \leq \frac{1}{2}) \vee (|x-1| \leq \frac{1}{2})$,
3. $\forall z \in \mathbf{C}, \exists a, b \in \mathbf{Z}, |z-a-\mathrm{i}b| < 2$.

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes, en mettant la ou les solutions sous forme algébrique.

1. $z^2 - 2\mathrm{i}z - 2 = 0$,
2. $z^2 - (3+\mathrm{i})z + 3\mathrm{i} = 0$,
3. $z^4 + 4 = 0$.

Exercice 5. Linéariser l'expression $\cos(x)^4$ (c'est-à-dire l'écrire comme une combinaison linéaire d'un nombre fini d'expressions de la forme $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$, avec $k \in \mathbf{N}$).

Exercice 6. On considère l'application $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ définie par $f(x) = \sqrt[4]{x} = \sqrt{\sqrt{x}}$.

1. Soit $x, y \in \mathbf{R}_+$. Simplifier la fraction $\dfrac{x^4 - y^4}{x - y}$ en utilisant une identité remarquable.

2. Trouver un réel M strictement positif tel que, pour tous $x, y \in [1, 2]$, on a $\left|\dfrac{x^4 - y^4}{x - y}\right| \geq M$.
3. En déduire une constante $C \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tous $x, y \in [1, 16]$, on a
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$
4. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[1, 16]$ est continue.

Exercice 7. On travaille dans un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère affine orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B, C de coordonnées respectives $(2, 4, -3)$, $(4, 3, -4)$, $(2, 3, -2)$,

1. Les points A, B, C sont-ils alignés ?
2. Soit $\mathscr{P}$ le plan contenant les points A, B, C. Donner une équation cartésienne (aussi appelée équation implicite) de $\mathscr{P}$.
3. Soit D le point de coordonnées $(-1, -1, -1)$.
Le point D appartient-il au plan $\mathscr{P}$?
4. Soit M de coordonnées (x, y, z) un point quelconque de l'espace affine.
Déterminer la distance de M à $\mathscr{P}$, notée $d(M, \mathscr{P})$, et la distance de M à D, notée $|MD|$.

Exercice 8. Trouver une formule sans symbole $\sum$ pour la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k)$ en fonction de $n \in \mathbf{N}$, puis montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos(k)\right| < M.$$

Corrigé première session 2019

Exercice 1. Calculer

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=j}^{3}\frac{k}{j}\right)$,

2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k\right)$,

3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k\right)$ en fonction de $n\in\mathbf{N}$.

Solution de l'exercice 1. 1. (1 point, 0,5 si bonne stratégie mais erreur de calcul)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=j}^{3}\frac{k}{j}\right) &= \left(\sum_{k=1}^{3}\frac{k}{1}\right)+\left(\sum_{k=2}^{3}\frac{k}{2}\right)+\left(\sum_{k=3}^{3}\frac{k}{3}\right)\\
&= \left(\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{3}{1}\right)+\left(\frac{2}{2}+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{3}\right)\\
&= 1+2+3+1+1,5+1=9,5.
\end{aligned}$$

2. (1 point, 0,5 si bonne stratégie mais erreur de calcul)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k\right) &= \left(\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}2^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}2^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}2^k\right)\\
&= \left(1\times 2^0+1\times 2^1\right)+\left(1\times 2^0+2\times 2^1+1\times 2^2\right)\\
&\quad+\left(1\times 2^0+3\times 2^1+3\times 2^2+1\times 2^3\right)\\
&= (1+2)+(1+4+4)+(1+6+12+8)\\
&= 3+9+27=39.
\end{aligned}$$

3. (2 points : 1 pour l'identité du binôme et 1 pour la somme géométrique)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k\right) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}2^k 1^{j-k}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}(2+1)^j = \sum_{j=1}^{n}3^j\\ &= \frac{3^{n+1}-3}{3-1} = \frac{3^{n+1}-3}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 2. Écrire une assertion mathématique traduisant l'affirmation : “Tout nombre réel peut être approché à 10^{-5} près par un nombre rationnel.”

Solution de l'exercice 2. (1 point, pas de pénalité si l'inégalité est stricte ou large, 0,5 si les quantificateurs sont corrects)

$$\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Q}, |x-y| \leq 10^{-5}.$$

Exercice 3. Pour chaque assertion ci-dessous, traduire l'assertion par une phrase française. Écrire la négation sous forme d'assertion. Dire si l'assertion initiale est vraie ou fausse, et le démontrer.

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, |x-y| < \frac{1}{2}$,
2. $\forall x \in [0,1], (|x| \leq \frac{1}{2}) \vee (|x-1| \leq \frac{1}{2})$,
3. $\forall z \in \mathbf{C}, \exists a, b \in \mathbf{Z}, |z-a-ib| < 2$.

Solution de l'exercice 3.

1. (3 points : 0,5 pour la traduction, 1 pour la négation, à savoir 0,5 pour les quantificateurs et 0,5 pour nier l'inégalité, 1,5 pour la preuve)

   Pour tout réel x, il existe un entier relatif y tel que $|x-y|$ est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$.

   La négation est

   $$\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{Z}, |x-y| \geq \frac{1}{2}.$$

   L'assertion initiale est fausse. Démontrons sa négation.

   Prenons $x = \frac{1}{2}$. Soit $y \in \mathbf{Z}$ quelconque. Alors si $y \geq 1$ on a $|\frac{1}{2}-y| = y - \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Et si on a $y \leq 0$ on a $|\frac{1}{2}-y| = \frac{1}{2} - y \geq \frac{1}{2}$. Dans tous les cas, on a bien $|\frac{1}{2}-y| \geq \frac{1}{2}$, et donc on a démontré la négation.

2. (3 points : 0,5 pour la traduction, 1 pour la négation, 1,5 pour la preuve)

   Pour tout réel x, on a $|x| \leq \frac{1}{2}$ ou $|x-1| \leq \frac{1}{2}$.

La négation est

$$\exists x \in [0,1], (|x| > \frac{1}{2}) \wedge (|x-1| > \frac{1}{2}).$$

L'assertion initiale est vraie. Démontrons-la.

Soit $x \in [0,1]$ quelconque. Séparons deux cas.

Cas 1 : si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, alors on a $|x| = x \leq \frac{1}{2}$, et donc $(|x| \leq \frac{1}{2}) \vee (|x-1| \leq \frac{1}{2})$.

Cas 2 : si $x \in]\frac{1}{2}, 1]$, alors on a $|x-1| = 1-x < 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, et donc $(|x| \leq \frac{1}{2}) \vee (|x-1| \leq \frac{1}{2})$.

Dans les deux cas, on a bien démontré $(|x| \leq \frac{1}{2}) \vee (|x-1| \leq \frac{1}{2})$.

3. (3 points : 0,5 pour la traduction, 1 pour la négation, 1,5 pour la preuve)

   Pour tout complexe z, il existe deux entiers relatifs a et b tels que $|z-a-\mathrm{i}b| < 2$.

   La négation est

$$\exists z \in \mathbf{C}, \forall a, b \in \mathbf{Z}, |z-a-\mathrm{i}b| \geq 2.$$

   L'assertion initiale est vraie. Démontrons-la.

   Soit $z \in \mathbf{C}$ quelconque. Alors la forme algébrique de z s'écrit $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbf{R}$. Posons a la partie entière de x et b la partie entière de y. Alors on a $|x-a| < 1$ et $|y-b| < 1$. On a alors $|z-a-\mathrm{i}b| = |(x-a)+\mathrm{i}(y-b)| \leq |x-a| + |\mathrm{i}(y-b)| = |x-a| + |y-b| < 1+1 = 2$, grâce à l'inégalité triangulaire.

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes, en mettant la ou les solutions sous forme algébrique.

1. $z^2 - 2\mathrm{i}z - 2 = 0$,
2. $z^2 - (3+\mathrm{i})z + 3\mathrm{i} = 0$,
3. $z^4 + 4 = 0$.

Solution de l'exercice 4. 1. (1 point)

   Posons $\Delta = (-2\mathrm{i})^2 - 4 \times 1 \times (-2) = -4 - (-8) = 4$. Posons alors $\delta = 2$, de sorte que $\delta^2 = \Delta$. Les solutions de l'équation sont alors $\frac{2i+2}{2} = 1 + i$ et $\frac{2i-2}{2} = -1 + i$.

2. (2 points : 0,5 pour Δ, 1 pour δ et 0,5 pour la fin)

   Posons $\Delta = (3+\mathrm{i})^2 - 4(3\mathrm{i}) = 8 + 6\mathrm{i} - 12\mathrm{i} = 8 - 6\mathrm{i}$.

   On cherche alors δ tel que $\delta^2 = \Delta$. Si on cherche δ sous la forme $x + \mathrm{i}y$, alors on a $x^2 - y^2 = 8, 2xy = -6$, et $x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, d'où $2x^2 = 18$, et donc $x = \pm 3$. On obtient alors $y = \pm 1$, et comme x et y sont de signes opposés, on peut prendre $\delta = 3 - \mathrm{i}$. Les solutions de l'équation sont donc $\frac{3+\mathrm{i}+3-\mathrm{i}}{2} = 3$ et $\frac{3+\mathrm{i}-3+\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$.

3. (2 points : 1 pour la forme trigo, et 1 pour la forme algébrique, ou pour la 2e solution 1 point pour $\pm 2\mathrm{i}$ et 1 point pour la fin)

   L'équation se réécrit $z^4 = -4 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, dont les solutions sont les nombres $\sqrt[4]{4}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}+\frac{k\mathrm{i}2\pi}{4}}$ pour $k = 0, 1, 2$, et 3. En simplifiant, cela donne $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$, $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}3\pi}{4}}$, $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}5\pi}{4}}$, et $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}7\pi}{4}}$, ce qui sécrit sous forme algébrique $\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + \mathrm{i}$, $\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + \mathrm{i}$, $\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 - \mathrm{i}$, et $\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 - \mathrm{i}$.

   Une autre solution est de d'abord résoudre $y^2 = -4$, qui a pour solutions $2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$, puis de résoudre $z^2 = 2\mathrm{i}$ et $z^2 = -2\mathrm{i}$ séparément. On trouve $1 + \mathrm{i}$ et $-1 - \mathrm{i}$ pour la première, et $-1 + \mathrm{i}$ et $1 - \mathrm{i}$ pour la seconde.

Exercice 5. Linéariser l'expression $\cos(x)^4$ (c'est-à-dire l'écrire comme une combinaison linéaire d'un nombre fini d'expressions de la forme $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$, avec $k \in \mathbf{N}$).

Solution de l'exercice 5. (3 points : 1 point pour l'équation d'Euler, 1 point pour la formule du binôme, 1 point pour la formule finale)

$$\begin{aligned}
\cos(x)^4 &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}((e^{\mathrm{i}x})^4 + 4(e^{\mathrm{i}x})^3(e^{-\mathrm{i}x}) + 6(e^{\mathrm{i}x})^2(e^{-\mathrm{i}x})^2 + 4(e^{\mathrm{i}x})(e^{-\mathrm{i}x})^3 + (e^{-\mathrm{i}x})^4) \\
&= \frac{1}{16}(e^{\mathrm{i}4x} + 4e^{\mathrm{i}2x} + 6 + 4e^{-\mathrm{i}2x} + e^{-\mathrm{i}4x}) \\
&= \frac{1}{16}(e^{\mathrm{i}4x} + e^{-\mathrm{i}4x} + 4e^{\mathrm{i}2x} + 4e^{-\mathrm{i}2x} + 6) \\
&= \frac{1}{16}(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6) \\
&= \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Exercice 6. On considère l'application $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ définie par $f(x) = \sqrt[4]{x} = \sqrt{\sqrt{x}}$.

1. Soit $x, y \in \mathbf{R}_+$. Simplifier la fraction $\dfrac{x^4 - y^4}{x - y}$ en utilisant une identité remarquable.
2. Trouver un réel M strictement positif tel que, pour tous $x, y \in [1, 2]$, on a $\left|\dfrac{x^4 - y^4}{x - y}\right| \geq M$.

3. En déduire une constante $C \in \mathbf{R}_+$ telle que, pour tous $x, y \in [1, 16]$, on a
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$
4. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[1, 16]$ est continue.

Solution de l'exercice 6. 1. (1 point)

On a $x^4 - y^4 = (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$, d'où $\dfrac{x^4 - y^4}{x - y} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$.

2. (1 point)

Pour $x, y \in [1, 2]$, on a $x, y \geq 1$, donc $x^3 \geq 1, x^2y \geq 1, xy^2 \geq 1$, et $y^3 \geq 1$. Par conséquent on a $\left|\dfrac{x^4 - y^4}{x - y}\right| = |x^3 + x^2y + xy^2 + y^3| \geq 4$.

3. (1 point)

Soit $x, y \in [1, 16]$. Alors on a $f(x), f(y) \in [1, 2]$. D'après la question précédente on a $\left|\dfrac{f(x)^4 - f(y)^4}{f(x) - f(y)}\right| \geq 4$, et donc $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|f(x)^4 - f(y)^4| = \frac{1}{4}|x - y|$. On peut donc prendre $C = \frac{1}{4}$.

4. (2 points : 1 pour l'assertion, 1 pour la démonstration. On s'adapte à la constante de 3, mais si ce n'est pas $\frac{1}{4}$ qui est pris)

La continuité de la restriction de f à l'intervalle $[1, 16]$ se traduit par l'assertion
$$\forall x \in [1, 16], \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall y \in [1, 16], (|x - y| < \eta) \implies (|f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$
Prouvons-la. Soit $x \in [1, 16]$ et soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $\eta = 4\varepsilon$. Soit $y \in [1, 16]$ tel que $|x - y| < \eta$. Alors d'après la question précédente, on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y| < \frac{1}{4}\eta = \frac{1}{4}4\varepsilon = \varepsilon$, ce qui conclut.

Exercice 7. On travaille dans un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère affine orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B, C de coordonnées respectives $(2, 4, -3)$, $(4, 3, -4)$, $(2, 3, -2)$,

1. Les points A, B, C sont-ils alignés ?
2. Soit $\mathscr{P}$ le plan contenant les points A, B, C. Donner une équation cartésienne (aussi appelée équation implicite) de $\mathscr{P}$.
3. Soit D le point de coordonnées $(-1, -1, -1)$.
   Le point D appartient-il au plan $\mathscr{P}$?
4. Soit M de coordonnées (x, y, z) un point quelconque de l'espace affine.
   Déterminer la distance de M à $\mathscr{P}$, notée $d(M, \mathscr{P})$, et la distance de M à D, notée $|MD|$.

Solution de l'exercice 7. 1. (1 point)

Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(2,-1,-1)$ et le vecteur $\vec{AC}$ a pour coordonnées $(0,-1,1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (ce qu'on peut vérifier en voyant que le déterminant $2\times(-1)-(-1)\times 0=-2$ est non nul). Par conséquent les points A,B,C ne sont pas alignés.

2. (2 points : 1 pour la formule, qui peut être donnée par cœur, et 1 pour le calcul)

Le plan $\mathscr{P}$ est donné par

$$\begin{aligned}
\mathscr{P} &= \{D \mid \vec{AB},\vec{AC},\vec{AD} \text{ sont coplanaires.}\}\\
&= \{D \mid \text{Dét}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})=0\}\\
&= \{(x,y,z) \mid \text{Dét}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}((2,-1,-1),(0,-1,1),(x-2,y-4,z+3))=0\}\\
&= \{(x,y,z) \mid (x-2)(-1-1)+(y-4)(0-2)+(z+3)(-2+0)=0\}\\
&= \{(x,y,z) \mid -2(x-2)-2(y-4)-2(z+3)=0\}\\
&= \{(x,y,z) \mid -2x-2y-2z+6=0\}\\
&= \{(x,y,z) \mid x+y+z-3=0\}.
\end{aligned}$$

3. (1 point)

Comme les coordonnées de D vérifient $-1-1-1-6=-6\neq 0$, le point D n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$.

4. (4 points : 1 pour le vecteur normal, 1 pour la formule de la distance, 1 pour le calcul, et 1 pour la distance MD)

D'après l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$, le vecteur $\vec{n}=(1,1,1)$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. Le point A appartient à $\mathscr{P}$. Par conséquent la distance d'un point M de coordonnées (x,y,z) à $\mathscr{P}$ est alors donnée par

$$\begin{aligned}
d(M,\mathscr{P}) &= \frac{|\vec{AM}\cdot\vec{n}|}{||\vec{n}||}\\
&= \frac{|(x-2,y-4,z+3)\cdot(1,1,1)|}{||\vec{(1,1,1)}||}\\
&= \frac{|x-2+y-4+z+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\\
&= \frac{|x+y+z-3|}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

D'autre part la distance de M à D est donnée par

$$|MD| = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + y^2 + 2x + 2y + 2z + 3}.$$

Exercice 8. Trouver une formule sans symbole $\sum$ pour la somme $\sum_{k=0}^{n} \cos(k)$ en fonction de $n \in \mathbf{N}$, puis montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \cos(k) \right| < M.$$

Solution de l'exercice 8. (3 points : 0,5 pour la partie réelle, 0,5 pour la somme géométrique, 1 pour l'inégalité triangulaire, 1 pour la conclusion que le dernier terme est indépendant de n)

On a

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k) = \sum_{k=0}^{n} \Re(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}) = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\right) = \Re\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}} - 1}\right).$$

On peut simplifier cette formule, mais ce n'est pas nécessaire pour la suite : soit $n \in \mathbf{N}$ quelconque, on a alors

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \cos(k) \right| = \left| \Re\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}} - 1}\right) \right| \le \left| \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}} - 1} \right| = \frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)} - 1|}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}} - 1|} \le \frac{2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}} - 1|}.$$

On peut donc prendre $M = \dfrac{2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}} - 1|}$.

GLOSSAIRE

INDEX