Feuille 3 - Ex.4 (6)

Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

On pose $u_n = \sqrt[3]{n+(-1)^n} - \sqrt[3]{n} = (n+(-1)^n)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$.

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt[3]{n+(-1)^n} - \sqrt[3]{n} \right) \right)$

On pose $u_n = \sqrt[3]{n+(-1)^n} - \sqrt[3]{n} \ = (n+(-1)^n)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$.
Est-ce que $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$?

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

On pose $u_n = \sqrt[3]{n+(-1)^n} - \sqrt[3]{n} \ = (n+(-1)^n)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$.
Est-ce que $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$?
On va utiliser le développement limité de $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ quand $x \to 0$.

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

On pose $u_n = \sqrt[3]{n+(-1)^n} - \sqrt[3]{n} \ = (n+(-1)^n)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$.
Est-ce que $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$?
On va utiliser le développement limité de $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ quand $x \to 0$.
Rappel : $(1+x)^{\alpha} = \alpha x + o(x)$ quand $x \to 0$.

Feuille 3 - Ex.4 (6) Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

On pose $u_n = \sqrt[3]{n+(-1)^n} - \sqrt[3]{n} \; = (n+(-1)^n)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$.
Est-ce que $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$?
On va utiliser le développement limité de $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ quand $x \to 0$.
Rappel : $(1+x)^{\alpha} = \alpha x + o(x)$ quand $x \to 0$.
On a donc

$$u_n = n^{\frac{1}{3}}\big((1+\frac{(-1)^n}{n})^{\frac{1}{3}} - 1\big)$$

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt[3]{n+(-1)^n} - \sqrt[3]{n}\right)\right)$

On pose $u_n = \sqrt[3]{n+(-1)^n} - \sqrt[3]{n} \; = (n+(-1)^n)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$.
Est-ce que $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$?
On va utiliser le développement limité de $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ quand $x \to 0$.
Rappel : $(1+x)^{\alpha} = \alpha x + o(x)$ quand $x \to 0$.
On a donc

$$\begin{aligned} u_n &= n^{\frac{1}{3}}\left((1+\frac{(-1)^n}{n})^{\frac{1}{3}} - 1\right) \\ &= n^{\frac{1}{3}}\left((1+\frac{(-1)^n}{3n} + o(\frac{1}{n})) - 1\right) \end{aligned}$$

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

On pose $u_n = \sqrt[3]{n+(-1)^n} - \sqrt[3]{n} = (n+(-1)^n)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$.
Est-ce que $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$?
On va utiliser le développement limité de $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ quand $x \to 0$.
Rappel : $(1+x)^{\alpha} = \alpha x + o(x)$ quand $x \to 0$.
On a donc

$$\begin{aligned} u_n &= n^{\frac{1}{3}}\left((1+\frac{(-1)^n}{n})^{\frac{1}{3}} - 1\right) \\ &= n^{\frac{1}{3}}\left((1+\frac{(-1)^n}{3n} + o(\frac{1}{n})) - 1\right) \\ &= n^{\frac{1}{3}}\left(\frac{(-1)^n}{3n} + o(\frac{1}{n})\right) \end{aligned}$$

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

On pose $u_n = \sqrt[3]{n+(-1)^n} - \sqrt[3]{n} \ = (n+(-1)^n)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$.
Est-ce que $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$?
On va utiliser le développement limité de $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ quand $x \to 0$.
Rappel : $(1+x)^{\alpha} = \alpha x + o(x)$ quand $x \to 0$.
On a donc

$$\begin{aligned}
u_n &= n^{\frac{1}{3}}\left((1+\frac{(-1)^n}{n})^{\frac{1}{3}} - 1\right) \\
&= n^{\frac{1}{3}}\left((1+\frac{(-1)^n}{3n} + o(\frac{1}{n})) - 1\right) \\
&= n^{\frac{1}{3}}\left(\frac{(-1)^n}{3n} + o(\frac{1}{n})\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}})
\end{aligned}$$

...

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

$$\ldots \quad u_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right).$$

Feuille 3 - Ex.4 (6) Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

$\ldots\quad u_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}})$. On a donc $u_n \sim \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$.

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

$\ldots \quad u_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}})$. On a donc $u_n \sim \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$.
En particulier $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

$\ldots \quad u_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}})$. On a donc $u_n \sim \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$.
En particulier $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
On a même que $\left(\sum \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}\right)$ est alternée et vérifie le critère des séries alternées (car $\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ est décroissante et tend vers 0).

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

$\ldots\quad u_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}})$. On a donc $u_n \sim \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$.
En particulier $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
On a même que $\left(\sum \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}\right)$ est alternée et vérifie le critère des séries alternées (car $\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ est décroissante et tend vers 0).
Mais on ne peut pas conclure tout de suite car nos séries ne sont pas positives.

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

$\ldots \quad u_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}})$. On a donc $u_n \sim \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$.
En particulier $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
On a même que $\left(\sum \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}\right)$ est alternée et vérifie le critère des séries alternées (car $\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ est décroissante et tend vers 0).
Mais on ne peut pas conclure tout de suite car nos séries ne sont pas positives.
On développe à l'ordre suivant.

Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

... $u_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}})$. On a donc $u_n \sim \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$.
En particulier $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
On a même que $\left(\sum \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}\right)$ est alternée et vérifie le critère des séries alternées (car $\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ est décroissante et tend vers 0).
Mais on ne peut pas conclure tout de suite car nos séries ne sont pas positives.
On développe à l'ordre suivant.
$(1+x)^\alpha = \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$ quand $x \to 0$.

... $u_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}} + o(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}})$. On a donc $u_n \sim \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$.
En particulier $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
On a même que $\left(\sum \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}\right)$ est alternée et vérifie le critère des séries alternées (car $\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ est décroissante et tend vers 0).
Mais on ne peut pas conclure tout de suite car nos séries ne sont pas positives.
On développe à l'ordre suivant.
$(1+x)^\alpha = \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$ quand $x \to 0$.
Le terme suivant sera du type $\frac{\star}{n^{\frac{5}{3}}}$.

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

Et $\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ est le terme d'une série de Riemann convergente.

Et $\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ est le terme d'une série de Riemann convergente.
Pour étudier la convergence, on n'a pas besoin de connaître $\star$.

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

Et $\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ est le terme d'une série de Riemann convergente.
Pour étudier la convergence, on n'a pas besoin de connaître $\star$.
Ecrivons plutôt $(1+x)^\alpha = \alpha x + O(x^2)$ quand $x \to 0$.

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

Et $\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ est le terme d'une série de Riemann convergente.
Pour étudier la convergence, on n'a pas besoin de connaître $\star$.
Ecrivons plutôt $(1+x)^\alpha = \alpha x + O(x^2)$ quand $x \to 0$.
On peut réécrire le même calcul que ci-dessus avec $O(\frac{1}{n^2})$ au lieu de $o(\frac{1}{n})$.

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

Et $\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ est le terme d'une série de Riemann convergente.
Pour étudier la convergence, on n'a pas besoin de connaître $\star$.
Ecrivons plutôt $(1+x)^\alpha = \alpha x + O(x^2)$ quand $x \to 0$.
On peut réécrire le même calcul que ci-dessus avec $O(\frac{1}{n^2})$ au lieu de $o(\frac{1}{n})$.

$$u_n = n^{\frac{1}{3}}\left((1+\frac{(-1)^n}{n})^{\frac{1}{3}}-1\right)$$

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

Et $\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ est le terme d'une série de Riemann convergente.
Pour étudier la convergence, on n'a pas besoin de connaître $\star$.
Ecrivons plutôt $(1+x)^\alpha = \alpha x + O(x^2)$ quand $x \to 0$.
On peut réécrire le même calcul que ci-dessus avec $O(\frac{1}{n^2})$ au lieu de $o(\frac{1}{n})$.

$$\begin{aligned}
u_n &= n^{\frac{1}{3}}\left((1+\frac{(-1)^n}{n})^{\frac{1}{3}}-1\right)\\
&= n^{\frac{1}{3}}\left((1+\frac{(-1)^n}{3n}+O(\frac{1}{n^2}))-1\right)
\end{aligned}$$

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

Et $\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ est le terme d'une série de Riemann convergente.
Pour étudier la convergence, on n'a pas besoin de connaître $\star$.
Ecrivons plutôt $(1+x)^\alpha = \alpha x + O(x^2)$ quand $x \to 0$.
On peut réécrire le même calcul que ci-dessus avec $O(\frac{1}{n^2})$ au lieu de $o(\frac{1}{n})$.

$$\begin{aligned}
u_n &= n^{\frac{1}{3}}\left((1+\frac{(-1)^n}{n})^{\frac{1}{3}}-1\right)\\
&= n^{\frac{1}{3}}\left((1+\frac{(-1)^n}{3n}+O(\frac{1}{n^2}))-1\right)\\
&= n^{\frac{1}{3}}\left(\frac{(-1)^n}{3n}+O(\frac{1}{n^2})\right)
\end{aligned}$$

Et $\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ est le terme d'une série de Riemann convergente.
Pour étudier la convergence, on n'a pas besoin de connaître $\star$.
Ecrivons plutôt $(1+x)^\alpha = \alpha x + O(x^2)$ quand $x \to 0$.
On peut réécrire le même calcul que ci-dessus avec $O(\frac{1}{n^2})$ au lieu de $o(\frac{1}{n})$.

$$\begin{aligned}
u_n &= n^{\frac{1}{3}}\left((1+\frac{(-1)^n}{n})^{\frac{1}{3}}-1\right)\\
&= n^{\frac{1}{3}}\left((1+\frac{(-1)^n}{3n}+O(\frac{1}{n^2}))-1\right)\\
&= n^{\frac{1}{3}}\left(\frac{(-1)^n}{3n}+O(\frac{1}{n^2})\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}+O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})
\end{aligned}$$

...

... On écrit $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$ et $w_n = u_n - v_n$.

... On écrit $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$ et $w_n = u_n - v_n$.
On a donc $w_n = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$.

Feuille 3 - Ex.4 (6) Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

... On écrit $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$ et $w_n = u_n - v_n$.
On a donc $w_n = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$.
On a vu que $\left(\sum v_n\right)$ converge par le critère des séries alternées.

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

... On écrit $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$ et $w_n = u_n - v_n$.
On a donc $w_n = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$.
On a vu que $\left(\sum v_n\right)$ converge par le critère des séries alternées.
La série de Riemann $\left(\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)$ converge car $\frac{5}{3} > 1$.

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

... On écrit $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$ et $w_n = u_n - v_n$.

On a donc $w_n = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$.

On a vu que $\left(\sum v_n\right)$ converge par le critère des séries alternées.

La série de Riemann $\left(\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)$ converge car $\frac{5}{3} > 1$.

Puisque $w_n = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$, on a aussi $|w_n| = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$.

Feuille 3 - Ex.4 (6) Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

... On écrit $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$ et $w_n = u_n - v_n$.
On a donc $w_n = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$.
On a vu que $\left(\sum v_n\right)$ converge par le critère des séries alternées.
La série de Riemann $\left(\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)$ converge car $\frac{5}{3} > 1$.
Puisque $w_n = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$, on a aussi $|w_n| = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$.
Donc par le critère de comparaison de séries à termes positifs, on déduit que $(\sum |w_n|)$ converge.

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

... On écrit $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$ et $w_n = u_n - v_n$.
On a donc $w_n = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$.
On a vu que $\left(\sum v_n\right)$ converge par le critère des séries alternées.
La série de Riemann $\left(\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)$ converge car $\frac{5}{3} > 1$.
Puisque $w_n = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$, on a aussi $|w_n| = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$.
Donc par le critère de comparaison de séries à termes positifs, on déduit que $(\sum |w_n|)$ converge.
Donc $(\sum w_n)$ est absolument convergente.

Feuille 3 - Ex.4 (6)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt[3]{n+(-1)^n}-\sqrt[3]{n}\right)\right)$

... On écrit $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{3n^{\frac{2}{3}}}$ et $w_n = u_n - v_n$.
On a donc $w_n = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$.
On a vu que $\left(\sum v_n\right)$ converge par le critère des séries alternées.
La série de Riemann $\left(\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)$ converge car $\frac{5}{3} > 1$.
Puisque $w_n = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$, on a aussi $|w_n| = O(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}})$.
Donc par le critère de comparaison de séries à termes positifs, on déduit que $(\sum |w_n|)$ converge.
Donc $(\sum w_n)$ est absolument convergente.
Finalement $(\sum u_n)$ est somme de deux séries convergentes, donc elle converge.

Feuille 3 - Ex.4 (7)

Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right) \right)$

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

On pose $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

On pose $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

On a $u_n = e - e^{n\log(1+\frac{1}{n})}$.

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

On pose $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
On a $u_n = e - e^{n\log(1+\frac{1}{n})}$.
Posons $v_n = n\log(1+\frac{1}{n})$ et développons à l'ordre 1 en $\frac{1}{n}$.

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

On pose $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
On a $u_n = e - e^{n\log(1+\frac{1}{n})}$.
Posons $v_n = n\log(1+\frac{1}{n})$ et développons à l'ordre 1 en $\frac{1}{n}$.

$$v_n = n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

On pose $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
On a $u_n = e - e^{n\log(1+\frac{1}{n})}$.
Posons $v_n = n\log(1+\frac{1}{n})$ et développons à l'ordre 1 en $\frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} v_n &= n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= n\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}\Big)^2 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) \end{aligned}$$

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

On pose $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
On a $u_n = e - e^{n\log(1+\frac{1}{n})}$.
Posons $v_n = n\log(1+\frac{1}{n})$ et développons à l'ordre 1 en $\frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned}
v_n &= n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

On pose $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
On a $u_n = e - e^{n\log(1+\frac{1}{n})}$.
Posons $v_n = n\log(1+\frac{1}{n})$ et développons à l'ordre 1 en $\frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned}
v_n &= n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

On écrit $v_n = 1 + w_n$ avec $w_n = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
...

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

Ainsi $u_n = e - e^{1+w_n} = e(1-e^{w_n})$ avec $w_n = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

Ainsi $u_n = e - e^{1+w_n} = e(1-e^{w_n})$ avec $w_n = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
On $w_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

Ainsi $u_n = e - e^{1+w_n} = e(1 - e^{w_n})$ avec $w_n = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
On $w_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
En particulier $w_n \to 0$ quand $n \to \infty$ et on a

$$e^{w_n} = 1 + w_n + o(w_n).$$

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

Ainsi $u_n = e - e^{1+w_n} = e(1-e^{w_n})$ avec $w_n = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
On $w_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
En particulier $w_n \to 0$ quand $n \to \infty$ et on a

$$e^{w_n} = 1 + w_n + o(w_n).$$

Comme $w_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ on a $o(w_n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

Ainsi $u_n = e - e^{1+w_n} = e(1-e^{w_n})$ avec $w_n = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
On $w_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
En particulier $w_n \to 0$ quand $n \to \infty$ et on a

$$e^{w_n} = 1 + w_n + o(w_n).$$

Comme $w_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ on a $o(w_n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Donc

$$\begin{aligned} e^{w_n} &= 1 + \left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Puis

$$u_n = e(1-e^{w_n}) = e\Big(\frac{1}{2n}+o\big(\frac{1}{n}\big)\Big) = \frac{e}{2n}+o\big(\frac{1}{n}\big)$$

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

Puis
$$u_n = e(1-e^{w_n}) = e\big(\frac{1}{2n} + o\big(\frac{1}{n}\big)\big) = \frac{e}{2n} + o\big(\frac{1}{n}\big)$$

On peut aussi écrire $u_n = \frac{e}{2n} + o\big(\frac{e}{2n}\big)$.
Donc $u_n \sim \frac{e}{2n}$.

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

Puis
$$u_n = e(1-e^{w_n}) = e\Big(\frac{1}{2n}+o\big(\frac{1}{n}\big)\Big) = \frac{e}{2n}+o\big(\frac{1}{n}\big)$$

On peut aussi écrire $u_n = \frac{e}{2n} + o\left(\frac{e}{2n}\right)$.
Donc $u_n \sim \frac{e}{2n}$.
$\left(\sum \frac{e}{2n}\right)$ est multiple d'une série de Riemann divergente. Donc $\left(\sum \frac{e}{2n}\right)$ diverge.

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

Puis

$$u_n = e(1-e^{w_n}) = e\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{e}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On peut aussi écrire $u_n = \frac{e}{2n}+o\left(\frac{e}{2n}\right)$.
Donc $u_n \sim \frac{e}{2n}$.
$\left(\sum \frac{e}{2n}\right)$ est multiple d'une série de Riemann divergente. Donc $\left(\sum \frac{e}{2n}\right)$ diverge.
Puisque $u_n \sim \frac{e}{2n}$ et que $\frac{e}{2n} > 0$, on a aussi $u_n > 0$ pour n assez grand.

Feuille 3 - Ex.4 (7)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$

Puis
$$u_n = e(1-e^{w_n}) = e\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{e}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On peut aussi écrire $u_n = \frac{e}{2n} + o\left(\frac{e}{2n}\right)$.
Donc $u_n \sim \frac{e}{2n}$.
$\left(\sum \frac{e}{2n}\right)$ est multiple d'une série de Riemann divergente. Donc $\left(\sum \frac{e}{2n}\right)$ diverge.
Puisque $u_n \sim \frac{e}{2n}$ et que $\frac{e}{2n} > 0$, on a aussi $u_n > 0$ pour n assez grand.
Par le théorème de comparaison de séries à termes positifs, on déduit que $(\sum u_n)$ est divergente.

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

Feuille 3 - Ex.4 (9) Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n+a^n}$ et $v_n = n + a^n$. Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{v_n}$.

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n+a^n}$ et $v_n = n + a^n$. Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{v_n}$.
Pour $|a| > 1$, $|a|^n$ “l'emporte” sur n. Pour $|a| \leq 1$, c'est le contraire.

Feuille 3 - Ex.4 (9) Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n+a^n}$ et $v_n = n + a^n$. Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{v_n}$.
Pour $|a| > 1$, $|a|^n$ "l'emporte" sur n. Pour $|a| \leq 1$, c'est le contraire.
Donc on va distinguer ces deux cas.

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n+a^n}$ et $v_n = n + a^n$. Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{v_n}$.
Pour $|a| > 1$, $|a|^n$ “l'emporte” sur n. Pour $|a| \leq 1$, c'est le contraire.
Donc on va distinguer ces deux cas.

(1) On suppose $|a| > 1$. Par comparaison polynôme/exponentielle on a alors $n = o(a^n)$.

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n+a^n}$ et $v_n = n + a^n$. Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{v_n}$.
Pour $|a| > 1$, $|a|^n$ "l'emporte" sur n. Pour $|a| \leq 1$, c'est le contraire.
Donc on va distinguer ces deux cas.

(1) On suppose $|a| > 1$. Par comparaison polynôme/exponentielle on a alors $n = o(a^n)$.
Donc $\frac{n+a^n}{a^n} = \frac{n}{a^n} + 1$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.
Autrement dit $n + a^n \sim a^n$ (quand $n \to \infty$).

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n+a^n}$ et $v_n = n + a^n$. Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{v_n}$.
Pour $|a| > 1$, $|a|^n$ "l'emporte" sur n. Pour $|a| \leq 1$, c'est le contraire.
Donc on va distinguer ces deux cas.

(1) On suppose $|a| > 1$. Par comparaison polynôme/exponentielle on a alors $n = o(a^n)$.
Donc $\frac{n+a^n}{a^n} = \frac{n}{a^n} + 1$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.
Autrement dit $n + a^n \sim a^n$ (quand $n \to \infty$).

Attention, nos séries ne sont pas positives. N'allons pas trop vite

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n+a^n}$ et $v_n = n + a^n$. Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{v_n}$.
Pour $|a| > 1$, $|a|^n$ "l'emporte" sur n. Pour $|a| \leq 1$, c'est le contraire.
Donc on va distinguer ces deux cas.

(1) On suppose $|a| > 1$. Par comparaison polynôme/exponentielle on a alors $n = o(a^n)$.
Donc $\frac{n+a^n}{a^n} = \frac{n}{a^n} + 1$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.
Autrement dit $n + a^n \sim a^n$ (quand $n \to \infty$).

Attention, nos séries ne sont pas positives. N'allons pas trop vite

Pour les normes on a aussi :
$\left|\frac{n+a^n}{a^n}\right| = \left|\frac{n}{a^n} + 1\right|$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n+a^n}$ et $v_n = n + a^n$. Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{v_n}$.
Pour $|a| > 1$, $|a|^n$ "l'emporte" sur n. Pour $|a| \leq 1$, c'est le contraire.
Donc on va distinguer ces deux cas.

(1) On suppose $|a| > 1$. Par comparaison polynôme/exponentielle on a alors $n = o(a^n)$.
Donc $\frac{n+a^n}{a^n} = \frac{n}{a^n} + 1$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.
Autrement dit $n + a^n \sim a^n$ (quand $n \to \infty$).

Attention, nos séries ne sont pas positives. N'allons pas trop vite

Pour les normes on a aussi :
$\left|\frac{n+a^n}{a^n}\right| = \left|\frac{n}{a^n} + 1\right|$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.
Donc $|n + a^n| \sim |a|^n$ (quand $n \to \infty$).

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n+a^n}$ et $v_n = n + a^n$. Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{v_n}$.
Pour $|a| > 1$, $|a|^n$ "l'emporte" sur n. Pour $|a| \leq 1$, c'est le contraire.
Donc on va distinguer ces deux cas.

(1) On suppose $|a| > 1$. Par comparaison polynôme/exponentielle on a alors $n = o(a^n)$.
Donc $\frac{n+a^n}{a^n} = \frac{n}{a^n} + 1$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.
Autrement dit $n + a^n \sim a^n$ (quand $n \to \infty$).

Attention, nos séries ne sont pas positives. N'allons pas trop vite

Pour les normes on a aussi :
$\left|\frac{n+a^n}{a^n}\right| = \left|\frac{n}{a^n} + 1\right|$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.
Donc $|n + a^n| \sim |a|^n$ (quand $n \to \infty$).
Puis $\left|\frac{(-1)^n}{n+a^n}\right| = \frac{1}{|n+a^n|} \sim |a|^{-n}$
...

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

...

La série $\left(\sum_n |a|^{-n}\right)$ est une série géométrique de raison $|a|^{-1} < 1$.
Donc elle converge.

...
La série $\left(\sum_n |a|^{-n}\right)$ est une série géométrique de raison $|a|^{-1} < 1$.
Donc elle converge.
Par comparaison de séries à termes positifs $\left(\sum_{n\geq 1} |u_n|\right)$ est aussi convergente.

...
La série $\left(\sum_n |a|^{-n}\right)$ est une série géométrique de raison $|a|^{-1} < 1$.
Donc elle converge.
Par comparaison de séries à termes positifs $\left(\sum_{n\geq 1} |u_n|\right)$ est aussi convergente.
Autrement dit $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ est absolument convergente.

Feuille 3 - Ex.4 (9) Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

(2) On suppose $|a| \leq 1$. Par comparaison polynôme/exponentielle on a alors $a^n = o(n)$.

Feuille 3 - Ex.4 (9) Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

(2) On suppose $|a| \leq 1$. Par comparaison polynôme/exponentielle on a alors $a^n = o(n)$.
On en déduit aussi $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$.

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

(2) On suppose $|a| \leq 1$. Par comparaison polynôme/exponentielle on a alors $a^n = o(n)$.

On en déduit aussi $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$.

Mais la série $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n}\right)$ est seulement semi-convergente, et on ne pourra pas utiliser directement les théorèmes de comparaison.

On développe u_n à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$.

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

(2) On suppose $|a| \leq 1$. Par comparaison polynôme/exponentielle on a alors $a^n = o(n)$.
On en déduit aussi $u_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$.
Mais la série $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n}\right)$ est seulement semi-convergente, et on ne pourra pas utiliser directement les théorèmes de comparaison.
On développe u_n à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$.
Comme $\frac{a^n}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+a^n} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{a^n}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a^n}{n} + o(\frac{a^n}{n})\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{a^n}{n^2} + o(\frac{a^n}{n^2}) \end{aligned}$$

...

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

...

Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + v_n$, où $v_n = (-1)^n\big(- \frac{a^n}{n^2} + o(\frac{a^n}{n^2})\big)$.

...
Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + v_n$, où $v_n = (-1)^n\big(-\frac{a^n}{n^2} + o(\frac{a^n}{n^2})\big)$.
On remarque que $|a^n| \leq 1$, donc $v_n = O\big(\frac{1}{n^2}\big)$.

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

...

Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + v_n$, où $v_n = (-1)^n\big(-\frac{a^n}{n^2} + o(\frac{a^n}{n^2})\big)$.
On remarque que $|a^n| \leq 1$, donc $v_n = O\big(\frac{1}{n^2}\big)$.
Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, par comparaison de séries à termes positifs $\big(\sum |v_n|\big)$ est aussi convergente.

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

...

Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + v_n$, où $v_n = (-1)^n\big(-\frac{a^n}{n^2} + o(\frac{a^n}{n^2})\big)$.
On remarque que $|a^n| \leq 1$, donc $v_n = O\big(\frac{1}{n^2}\big)$.
Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, par comparaison de séries à termes positifs $\big(\sum |v_n|\big)$ est aussi convergente.
En particulier $\big(\sum v_n\big)$ est convergente.

...
Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + v_n$, où $v_n = (-1)^n\left(-\frac{a^n}{n^2} + o\left(\frac{a^n}{n^2}\right)\right)$.
On remarque que $|a^n| \leq 1$, donc $v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, par comparaison de séries à termes positifs $\left(\sum |v_n|\right)$ est aussi convergente.
En particulier $\left(\sum v_n\right)$ est convergente.
D'autre part la série $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n}\right)$ vérifie le critère des séries alternées.

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

...
Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + v_n$, où $v_n = (-1)^n\big(-\frac{a^n}{n^2} + o(\frac{a^n}{n^2})\big)$.
On remarque que $|a^n| \leq 1$, donc $v_n = O\big(\frac{1}{n^2}\big)$.
Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, par comparaison de séries à termes positifs $\big(\sum |v_n|\big)$ est aussi convergente.
En particulier $\big(\sum v_n\big)$ est convergente.
D'autre part la série $\big(\sum \frac{(-1)^n}{n}\big)$ vérifie le critère des séries alternées.
Donc elle converge.

...
Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + v_n$, où $v_n = (-1)^n\big(-\frac{a^n}{n^2} + o(\frac{a^n}{n^2})\big)$.
On remarque que $|a^n| \leq 1$, donc $v_n = O\big(\frac{1}{n^2}\big)$.
Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, par comparaison de séries à termes positifs $\big(\sum |v_n|\big)$ est aussi convergente.
En particulier $\big(\sum v_n\big)$ est convergente.
D'autre part la série $\big(\sum \frac{(-1)^n}{n}\big)$ vérifie le critère des séries alternées. Donc elle converge.
Et finalement $\big(\sum_{n\geq 1} u_n\big)$ est convergente.

Feuille 3 - Ex.4 (9) Convergence de $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}\right)$

...

Ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + v_n$, où $v_n = (-1)^n\left(-\frac{a^n}{n^2} + o\left(\frac{a^n}{n^2}\right)\right)$.

On remarque que $|a^n| \leq 1$, donc $v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, par comparaison de séries à termes positifs $\left(\sum |v_n|\right)$ est aussi convergente.

En particulier $\left(\sum v_n\right)$ est convergente.

D'autre part la série $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n}\right)$ vérifie le critère des séries alternées. Donc elle converge.

Et finalement $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ est convergente.

On remarque que $|u_n| \geq \frac{1}{n+1}$. On peut en déduire que $\left(\sum_{n\geq 1} |u_n|\right)$ diverge. Donc $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ est seulement semi-convergente.

Feuille 3 - Ex.4 (9)

Convergence de $\left(\sum \frac{\cos(2n)}{2n}\right)$

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum \frac{\cos(2n)}{2n}\right)$

Critère d'Abel : un analogue de l'intégration par partie pour les séries.

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum \frac{\cos(2n)}{2n}\right)$

Critère d'Abel : un analogue de l'intégration par partie pour les séries.
Pour une série $\sum_n a_n b_n$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $S_{-1} = 0$, et on écrit $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Feuille 3 - Ex.4 (9)
Convergence de $\left(\sum \frac{\cos(2n)}{2n}\right)$

Critère d'Abel : un analogue de l'intégration par partie pour les séries.
Pour une série $\sum_n a_n b_n$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $S_{-1} = 0$, et on écrit $a_n = S_n - S_{n-1}$.
Comme cela on obtient une autre expression pour $\sum_{n=0}^{N} a_n b_n$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = \sum_{n=0}^{N} (S_n - S_{n-1}) b_n &= \sum_{n=0}^{N} S_n b_n - \sum_{n=0}^{N} S_{n-1} b_n \\ &= \sum_{n=0}^{N} S_n b_n - \sum_{m=-1}^{N-1} S_m b_{m+1} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} S_n (b_n - b_{n+1})\right) + S_N b_N - 0\end{aligned}$$

Feuille 3 - Ex.5 (1)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n\right)$.

La série est une série géométrique de raison $\frac{-1}{4}$.
Comme $|\frac{-1}{4}| < 1$ la série converge.
Par la propriété vue en cours sur les multiples de séries convergentes et sur leurs sommes, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n &= \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^2\left(\frac{-1}{4}\right)^m \quad \text{avec } m = n-2 \\
&= \left(\frac{-1}{4}\right)^2 \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^m \\
&= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-1}{4}\right)} = \frac{1}{16}\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

Autre solution page suivante

Feuille 3 - Ex.5 (1)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n\right)$.

On aurait pu aussi écrire $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n) - (u_0 + u_1)$.
Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} (\frac{-1}{4})^n &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{-1}{4})^n\right) - (1 + \frac{(-1)}{4}) \\
&= \frac{1}{1-\left(\frac{-1}{4}\right)} - \frac{3}{4} \\
&= \frac{4}{5} - \frac{3}{4} \\
&= \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

Feuille 3 - Ex.5 (2)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right)$

La série ressemble beaucoup à une série téléscopique et on va l'étudier de la même façon, par les sommes partielles.
On pose $S_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$.
On obtient

$$\begin{aligned}
S_N &= \Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\Big)-\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2}\Big)\\
&= \Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\Big)-\Big(\sum_{m=3}^{N+2}\frac{1}{m}\Big) \qquad \text{avec } m=n+2\\
&= \Big(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n}\Big)-\Big(\Big(\sum_{m=3}^{N}\frac{1}{m}\Big)+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\Big)
\end{aligned}$$

...

Feuille 3 - Ex.5 (2)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right)$

...

$$\begin{aligned} S_N &= (\frac{1}{1}+\frac{1}{2}) - (\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}) \\ &= \frac{3}{2} - v_N, \end{aligned}$$

où on a posé $v_N = \frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}$.

On a $v_N \to 0$ quand $N \to +\infty$.
Donc les sommes partielles convergent vers $\frac{3}{2}$.
Ceci montre à la fois que la série converge et que sa somme est $\frac{3}{2}$.

Feuille 3 - Ex.5 (3)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2-4}\right)$

Convergence :
(facultatif – car on va retrouver la convergence par le calcul des sommes partielles)

On peut voir la convergence en comparant à une série de Riemann.
Posons $u_n = \frac{1}{n^2-4}$. Pour $n \geq 3$ on a $u_n > 0$.
On a aussi $n^2 u_n = \frac{n^2}{n^2-4} = \frac{1}{1-\frac{4}{n^2}}$. Donc $n^2 u_n \to 1$ quand $n \to +\infty$ et $u_n \sim \frac{1}{n^2}$.
Comme $(\sum \frac{1}{n^2})$ est une série de Riemann convergente (puisque $2 > 1$), et que $u_n > 0$, $\frac{1}{n^2} > 0$, on en déduit par le théorème de comparaison de séries à termes positifs que $(\sum u_n)$ est convergente.
...

Feuille 3 - Ex.5 (3)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2-4}\right)$

En fait on va retrouver la convergence par le calcul de la somme.
Comme $n^2 - 4 = (n-2)(n+2)$, on sait que u_n se décompose sous la forme $u_n = \frac{a}{n-2} + \frac{b}{n+2}$.
Si $a = -b$ on aura une série de type téléscopique.
On calcule

$$\frac{a}{n-2} + \frac{b}{n+2} = \frac{a(n+2) + b(n-2)}{n^2-4} = \frac{(a+b)n + 2(a-b)}{n^2-4}$$

Pour trouver u_n il nous faut $a + b = 0$, $a - b = \frac{1}{2}$, d'où $a = -b = \frac{1}{4}$.
Ainsi $u_n = v_{n-2} - v_{n+2}$, en posant $v_n = \frac{1}{4n}$.
...

Feuille 3 - Ex.5 (3)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2-4}\right)$

En faisant les sommes partielles on va obtenir des annulations :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{N} u_n &= \sum_{n=3}^{N}(v_{n-2} - v_{n+2}) = \sum_{n=3}^{N} v_{n-2} - \sum_{n=3}^{N} v_{n+2} \\
&= \sum_{p=1}^{N-2} v_p - \sum_{q=5}^{N+2} v_q \quad \text{avec } p = n-2,\ q = n+2 \\
&= (v_1 + \cdots + v_4 + \sum_{p=5}^{N-2} v_p) - ((\sum_{q=5}^{N-2} v_q) + v_{N-1} + \cdots + v_{N+2}) \\
&= (v_1 + \cdots + v_4) - (v_{N-1} + \cdots + v_{N+2})
\end{aligned}$$

On a $(v_{N-1} + \cdots + v_{N+2}) \to 0$ quand $N \to +\infty$,

...

donc $\sum_{n=3}^{N} u_n$ tend vers $(v_1 + \cdots + v_4)$ quand $N \to +\infty$.

Ceci montre que $(\sum_{n\geq 3} u_n)$ converge et que sa somme est

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 3} u_n &= \frac{1}{4}(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) \\ &= \frac{1}{4}(\frac{24+12+8+6}{24}) \\ &= \frac{25}{48}\end{aligned}$$

Feuille 3 - Ex.5 (4)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)$

On a une série de type téléscopique.
On pose $u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
Ainsi $u_n = v_{n-1} + v_{n+1} - 2v_n$.
D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} u_n &= \sum_{n=2}^{N}(v_{n-1} + v_{n+1} - 2v_n) \\
&= \sum_{n=2}^{N} v_{n-1} + \sum_{n=2}^{N} v_{n+1} - 2\sum_{n=2}^{N} v_n \\
&= \sum_{p=1}^{N-1} v_p + \sum_{q=3}^{N+1} v_q - 2\sum_{n=2}^{N} v_n \qquad p = n-1, \quad q = n+1
\end{aligned}$$

...

Feuille 3 - Ex.5 (4)
Convergence et somme de $\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)$

...

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} u_n &= \sum_{p=1}^{N-1} v_p + \sum_{q=3}^{N+1} v_q - 2\sum_{n=2}^{N} v_n \\ &= \left(v_1 - v_N + \sum_{p=2}^{N} v_p\right) + \left(v_{N+1} - v_2 + \sum_{q=2}^{N} v_q\right) - 2\sum_{n=2}^{N} v_n \\ &= (v_1 - v_N +) + (v_{N+1} - v_2)\end{aligned}$$

On a $(-v_N + v_{N+1}) \to 0$ quand $N \to +\infty$,
donc $\sum_{n=2}^{N} u_n$ tend vers $v_1 - v_2$ quand $N \to +\infty$.
Donc la série converge et sa somme est
$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = v_1 - v_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Feuille 3 - Ex.10
Convergence de $\left(\sum \frac{\cos(2n)}{2n}\right)$

Critère d'Abel : un analogue de l'intégration par parties.

Pour une série $\left(\sum_n a_n b_n\right)$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $S_{-1} = 0$. On a alors $a_n = S_n - S_{n-1}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = \sum_{n=0}^{N} (S_n - S_{n-1}) b_n &= \sum_{n=0}^{N} S_n b_n - \sum_{n=0}^{N} S_{n-1} b_n \\
&= \sum_{n=0}^{N} S_n b_n - \sum_{m=-1}^{N-1} S_m b_{m+1} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{N-1} S_n (b_n - b_{n+1})\right) + S_N b_N - 0
\end{aligned}$$

Si la suite (S_n) est bornée et que $\left(\sum (b_n - b_{n+1})\right)$ est absolument convergente et que $b_n \to 0$, alors $\left(\sum_n a_n b_n\right)$ converge.

Convergence de $\left(\sum \frac{\cos(2n)}{2n}\right)$

Dans notre cas on peut choisir $a_n = \cos(2n)$ et $b_n = \frac{1}{2n}$.
Est-ce que $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(2k)$ est bornée ?

En fait c'est presque une série géométrique :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{i2k}) \\ &= \mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{n} e^{i2k}) \qquad \text{raison } r = e^{2i} \\ &= \mathrm{Re}(\frac{1 - e^{i2(n+1)}}{1 - e^{i2}}) \end{aligned}$$

Donc $|S_n| \leq \left|\frac{1-e^{i2(n+1)}}{1-e^{i2}}\right| \leq \frac{1+|e^{i2(n+1)}|}{|1-e^{i2}|} = \frac{2}{|1-e^{i2}|}$.
On pose $M = \frac{2}{|1-e^{i2}|}$. Donc S_n est borné par M (indépendant de n).

Convergence de $\left(\sum \frac{\cos(2n)}{2n}\right)$

On a $b_n = \frac{1}{2n} \to 0$ quand $n \to \infty$.

Enfin $|b_n - b_{n+1}| = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2}{4n(n+1)} \leq \frac{1}{2n^2}$.
Donc $|b_n - b_{n+1}|$ est bornée par un multiple du terme général d'une série de Riemann convergente.
Donc par le critère de comparaison de séries à termes positifs, on déduit que $(\sum(b_n - b_{n+1}))$ est absolument convergente.

Par le critère d'Abel on en déduit que la série $\left(\sum \frac{\cos(2n)}{2n}\right)$ est convergente.

Feuille 4 - Ex.1 (1)
Sommes de Riemann. Etudier $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

Rappel : somme de Riemann de f sur $[a, b]$:
$\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$ (ou encore $\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a + (b-a)\frac{k}{n})$).

Remarque : une telle somme est du type $\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{n} f(\beta + \gamma\frac{k}{n})$.
Inversement, pour une somme de ce type, on prend $a = \beta$, $b - a = \gamma$, et on remplace f par un certain multiple pour avoir vraiment une somme de Riemann.

On cherche donc à mettre u_n sous cette forme.
On fait apparaître des $\frac{k}{n}$:

$$\begin{aligned} \frac{n+k}{n^2+k^2} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1+\frac{k}{n}}{1+(\frac{k}{n})^2} \\ &= \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}), \qquad \text{où } f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Avec $a = 0$, $b = 1$, c'est bien la somme de Riemann (d'ordre n) de f sur $[0, 1]$.

...

Etudier $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème sur les sommes de Riemann, on a donc $u_n \to \int_0^1 f(x)dx$ quand $n \to \infty$.

On calcule

$$\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \left[\arctan(x) + \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1$$
$$= \arctan(1) + \frac{\log(2)}{2}$$

Donc $u_n \to \frac{\pi}{4} + \frac{\log(2)}{2}$ quand $n \to \infty$.

Feuille 4 - Ex.1 (2)
Sommes de Riemann. Etudier $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Notons que l'indice va de $n+1$ à $2n$ au lieu de 1 à n comme dans une somme de Riemann (ici, l'indice de sommation est k ; n est "fixé".)

On fait d'abord un changement d'indice $k' = k - n$ (donc $k = k' + n$). On trouve

$$u_n = \sum_{k'=1}^{n} \frac{1}{n+k'}.$$

On fait apparaître des $\frac{k'}{n}$:

$$u_n = \sum_{k'=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{k'}{n}} = \sum_{k'=1}^{n} \frac{1}{n} f(1 + 1 \cdot \frac{k'}{n}),$$

si on pose $f(x) = \frac{1}{x}$.
On a une expression comme somme de Riemann avec $a = 1$ et $b - a = 1$. Donc $a = 1$, $b = 2$.

...

Etudier $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

...

La fonction f est définie et continue sur $[1, 2]$.
Par le théorème sur les sommes de Riemann, on a donc
$u_n \to \int_1^2 f(x)dx$ quand $n \to \infty$.

On a $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [log(x)]_1^2 = \log(2)$.
Donc $u_n \to \log(2)$ quand $n \to \infty$.

Feuille 4 - Ex.8
Intégration et dérivation

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que g, $x \mapsto \int_{2x}^{x^2} f(t)dt$ est dérivable. Calculer g'.

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que f a une primitive définie sur $\mathbb{R}$, disons F, et que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a
$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Ainsi $g(x) = F(x^2) - F(2x)$.

F est dérivable (avec $F' = f$). Donc g est somme de deux fonctions qui sont composées de fonctions dérivables. Donc g est dérivable.
On trouve $g'(x) = F'(x^2) \times (2x) - F'(2x) \times 2 = 2xf(x^2) - 2f(2x)$.

Feuille 4 - Ex.7
Calcul de primitive : $x \mapsto x^3 \log(x)$.

Ici on a un produit de deux fonctions, dont une qu'on sait intégrer facilement. On essaye une intégration par parties.
On utilise la notation $\int^x f(t)dt$ (une primitive est définie par $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, où a est un nombre dans le domaine de définition ; changer a revient à changer la primitive par une constante et on peut donc "oublier" a).

$$\begin{aligned}
\int^x t^3 \log(t)dt &= [\frac{1}{4}t^4 \log(t)]^x - \int^x \frac{1}{4}t^4 \cdot \frac{1}{t}dt \\
&= [\frac{1}{4}t^4 \log(t)]^x - \int^x \frac{1}{4}t^3 dt \\
&= [\frac{1}{4}t^4 \log(t)]^x - [\frac{1}{16}t^4]^x \\
&= \frac{1}{4}x^4 \log(x) - \frac{1}{16}x^4.
\end{aligned}$$