Université Paris VI — LM120

Pierre et Marie Curie — PCME24

FEUILLE D'EXERCICE n° 3.

Exercice 1. Soit a un nombre complexe different de 0. Etudier le système suivant selon les valeurs de a :

$$(1)\qquad \begin{cases} x + \frac{1}{a^3}y - az = 0 \\ -a^2x - a^2y + a^3z = 0 \\ -a^3x - a^3y + z = 0 \end{cases}.$$

Exercice 2. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres, génératrices ?

$$(2)\qquad \left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}\right\},\quad \left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\},\quad \left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\right\},\quad \left\{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\},\quad \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 3. Soit $\mathcal{B} := \{w_1, w_2, w_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$(4)\qquad v_1 := w_1 + w_2 + w_3 \quad , \quad v_2 := w_2 + w_3 \quad , \quad v_3 := w_3 \quad .$$

(1) Donner les coordonnées de v_1, v_2 et v_3 dans la base $\mathcal{B}$.

(2) Montrer que $\mathcal{E} := \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) Soit u un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. Donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$.

(4) Soit h un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-5\\4\\-3\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{E}$. Donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4. Les ensembles suivants sont-t-il des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

a) $F = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y=0 \ \}$	d) $I = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 7x+2y+3z=1 \ \}$
b) $G = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2-y^2=0 \ \}$	e) $L = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{cases} x+y-3z=0 \\ 3x-y-z=0 \end{cases} \}$
c) $H = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y+z=0\}$	f) $M = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2-y^2=0 \end{cases} \}$

Exercice 5. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et repondre aux questions posées.

(1) La famille $\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} , \begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}\}$ est une base de F ;

(2) La famille $\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} , \begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}\}$ engendre F ;

(3) Les vecteurs $\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} , \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\}$ appartiennent à G ;

(4) Tout vecteur de G peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\}$;

(5) Trouver une base de H et de I ;

(6) Les vecteurs $\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix}\}$ appartiennent à L ; forment une base de L ; engendrent L ? ;

(7) Le vecteur $\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$ est une base de L ; engendre L ;

(8) Les vecteurs $\{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\}$ appartiennent à M ; forment une base de M ;

(9) Préciser la dimension de F, G, I, L.

1. Exercice 1

Le système sous forme matricielle est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/a^3 & -a \\ -a^2 & -a^2 & a^3 \\ -a^3 & -a^3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Reduisons par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/a^3 & -a \\ -a^2 & -a^2 & a^3 \\ -a^3 & -a^3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2+a^2\ell_1 \\ \ell_3+a^3\ell_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/a^3 & -a \\ 0 & -a^2+\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1-a^3 & 1-a^4 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \ell_1 \\ a\ell_2 \\ \ell_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/a^3 & -a \\ 0 & 1-a^3 & 0 \\ 0 & 1-a^3 & 1-a^4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Remarquer que la dernière réduction ($\ell_2 \rightsquigarrow a\ell_2$) est légitime car par hypothèse $a \neq 0$.

- La réduction suivante est :

$$\begin{cases} \ell_1 \rightsquigarrow \ell_1 - \frac{1}{a^3(1-a^3)}\ell_2 \\ \ell_2 \rightsquigarrow \ell_2/1-a^3 \\ \ell_3 \rightsquigarrow \ell_3-\ell_2 \end{cases} \tag{7}$$

de sorte que la matrice suivante est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Cette réduction ne peut se faire que si } \mathbf{1-a^3 \neq 0}\,!}$$

Il faudra donc discuter selon les valeurs de a suivant que $1-a^3=0$. Ce qui revient à $a =$ racine $3^{\text{ème}}$ de l'unité. Nous rappelons que les racines $3^{\text{ème}}$ de l'unité sont les nombres complexes suivants :

$$1 \quad , \qquad e^{2i\pi/3} \quad , \qquad e^{4i\pi/3}\ . \tag{8}$$

- Nous étudions d'abord les cas particuliers $a=1$, $a=e^{2i\pi/3}$ et $a=e^{4i\pi/3}$.
- Si $a=1$, le système est simple, il a une infinité de solutions et la dimension de son espace de solutions est 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = z-y\ . \tag{9}$$

- Si $a=e^{2i\pi/3}$, la matrice de l'équation (6) devient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -e^{2i\pi/3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-e^{8i\pi/3} \end{pmatrix}$. On remarque que l'on a :

$$e^{8i\pi/3} = e^{2i\pi/3}\cdot e^{6i\pi/3} = e^{2i\pi/3}\cdot e^{2i\pi} = e^{2i\pi/3}\ . \tag{10}$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -e^{2i\pi/3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-e^{2i\pi/3} \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \ell_1+\frac{e^{2i\pi/3}}{1-e^{2i\pi/3}}\ell_3 \\ \ell_3/(1-e^{2i\pi/3}) \\ \ell_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Le système a une infinité de solutions et son espace de solutions est de dimension 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases} \tag{12}$$

- Si $a=e^{4i\pi/3}$, la matrice de l'équation (6) devient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -e^{4i\pi/3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-e^{16i\pi/3} \end{pmatrix}$. On remarque que l'on a :

$$e^{16i\pi/3} = e^{4i\pi/3}\cdot e^{12i\pi/3} = e^{4i\pi/3}\cdot e^{4i\pi} = e^{4i\pi/3}\ . \tag{13}$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -e^{4i\pi/3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-e^{4i\pi/3} \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \ell_1+\frac{e^{4i\pi/3}}{1-e^{4i\pi/3}}\ell_3 \\ \ell_3/(1-e^{4i\pi/3}) \\ \ell_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Le système a une infinité de solutions, son espace de solutions est de dimension 1 :

$$\begin{pmatrix} 1&1&0\\ 0&0&1\\ 0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = -y\\ z = \ \ 0 \end{cases} \tag{15}$$

• Supposons maintenant que a ne soit pas une racine $3^{\text{ème}}$ de l'unité, c'est-à-dire que $1-a^3 \neq 0$. Nous effectuons la réduction (7). On trouve

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/a^3 & -a\\ 0 & 1-a^3 & 0\\ 0 & 1-a^3 & 1-a^4 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \ell_1-\frac{1}{a^3(1-a^3)}\ell_2\\ \ell_2/1-a^3\\ \ell_3-\ell_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1-a^4 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Maintenant deux cas se présentent $1-a^4=0$ ou $1-a^4\neq 0$.

• (cas extrême) Si $1-a^4=0$ (c'est-à-dire si a est une racine $4^{\text{ème}}$ de l'unité), alors le système devient

$$\begin{pmatrix} 1&0&-a\\ 0&1&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = az\\ y = \ 0 \end{cases} \tag{17}$$

L'espace de solutions est de dimension 1.

• (cas générique) Si $1-a^4\neq 0$ (c'est à dire si a n'est pas une racine $4^{\text{ème}}$ de l'unité), alors la forme échelonnée réduite devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1-a^4 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \ell_1+\frac{a}{(1-a^4)}\ell_3\\ \ell_2\\ \ell_3/(1-a^4) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Le système devient

$$\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0\\ y = 0\\ z = 0 \end{cases} \tag{19}$$

il y a donc une unique solution.

a		rang(A)	dim Sol	Sol
$a=1$		1	2	$x=z-y$
$a=e^{2i\pi/3}$		2	1	$\begin{cases} x=-y\\ z=\ \ 0 \end{cases}$
$a=e^{4i\pi/3}$		2	1	$\begin{cases} x=-y\\ z=\ \ 0 \end{cases}$
$a\neq 1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}$	$a=e^{2i\pi/4}$	2	1	$\begin{cases} x=az\\ y=0 \end{cases}$
	$a=e^{i\pi}$	2	1	$\begin{cases} x=az\\ y=0 \end{cases}$
	$a=e^{3i\pi/2}$	2	1	$\begin{cases} x=az\\ y=0 \end{cases}$
	$a\neq e^{2i\pi/4}, e^{i\pi}, e^{3i\pi/2}$	3	0	$\begin{cases} x=0\\ y=0\\ z=0 \end{cases}$

2. Exercice 2

Soit

(20) $$\{v_1, \dots, v_n\}$$

une famille de vecteurs dans un espace vectoriel V.

• On dit qu'un vecteur w de V est une **COMBINAISON LINÉAIRE** de $v_1, \dots, v_n$ si w peut s'écrire comme

(21) $$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0 \ ,$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont des nombres réels.

• La famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est **LIÉE** s'il existe des nombres réels $b_1, \dots, b_n$ vérifiant les deux conditions suivantes

(1) $b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n = 0$;

(2) Au moins un, parmi les nombres $b_1, \dots, b_n$, est non nul.

• La famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est **LIBRE** si elle n'est pas liée.

• La famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est **GÉNÉRATRICE** (de V) si ***tout*** vecteur w dans V est *combinaison linéaire* de $\{v_1, \dots, v_n\}$. C'est-à-dire w peut s'écrire comme

(22) $$w = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \ ,$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont des nombres réels.

• La famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une **BASE** (de V) si elle est *libre* et *génératrice.*

• L'**ESPACE ENGENDRÉ** par $\{v_1, \dots, v_n\}$ est le *sous-espace* de V formé par les vecteurs w qui sont combinaison linéaire de $\{v_1, \dots, v_n\}$.

À SAVOIR

Soit

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \tag{23}$$

une famille de vecteurs dans un espace vectoriel V.

• On note

$$(v_1, \ldots, v_n) \tag{24}$$

la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$. Par exemple si $n = 4$ et si $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, alors

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \tag{25}$$

• On note

$$< \{v_1, \ldots, v_n\} > \tag{26}$$

le sous-espace vectoriel de V engendré par $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

• Le **rang** de la matrice $(v_1, \ldots, v_n)$ est égale à la **dimension** de l'*espace engendré* par $\{v_1, \ldots, v_n\}$:

$$\boxed{\operatorname{rang}(v_1, \ldots, v_n) \quad = \quad \dim < \{v_1, \ldots, v_n\} > \ .} \tag{27}$$

• Soient

$$d \ := \ \dim(V)\ , \tag{28}$$

$$r \ := \ \operatorname{rang}(v_1, \ldots, v_n)\ . \tag{29}$$

Alors

– On a toujours

$$r \leq d \qquad \text{et} \qquad r \leq n\ . \tag{30}$$

En fait, comme les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ appartiennent à V, l'espace vectoriel qu'ils engendrent est contenu dans V et il a donc une dimension r inférieure ou égale à celle de V qui est d. D'autre part on sait que le rang r de la matrice $(v_1, \ldots, v_n)$ est toujour inférieur au nombre de colonnes qui est n.

– On a

$$\boldsymbol{r = n} \iff \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ est } \textbf{libre}\ ; \tag{31}$$

$$\boldsymbol{r = d} \iff \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ est } \textbf{génératrice} \text{ pour } V\ ; \tag{32}$$

$$\boldsymbol{r = n = d} \iff \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ est } \textbf{base} \text{ de } V\ . \tag{33}$$

• Donc, en particulier, toute base de V est constituée de d vecteurs.

2.1. Solution de l'exercice 2 **:** • La famille $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est *libre* car ces deux vecteurs ne sont pas multiples l'un de l'autre.

• La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre. En effet nous allons montrer maintenant que la dimension de l'espace engendré par $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est 3. Nous procédons par étapes :

- **Etape 1 :** Les deux vecteurs $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas multiples l'un de l'autre, donc ils forment une famille libre et ils engendrent un espace vectoriel de dimension 2. Donc

$$2 = \dim < \{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\} > \quad \leq \quad \dim < \left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} > \tag{34}$$

- **Etape 2 :** Nous voulons montrer maintenant que le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ n'appartient pas à l'espace engendré par $\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\}$. Il faut montrer que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire des deux vecteurs $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ c'est-à-dire qu'il n'existe pas deux nombres α, β dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} . \tag{35}$$

Cette relation s'écrit :

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\alpha+2\beta\\\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} . \tag{36}$$

Si des tels nombres existaient, alors la deuxième et la troisième composante donneraient $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. Mais cela est impossible car la première composante donnerait

$$3\alpha + 2\beta = 3 + 2 = 1 \quad \text{(absurde)} . \tag{37}$$

Donc α et β n'existent pas et la famille est libre.

• Le même raisonnement montre que la famille $\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est liée car si $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ on trouve

$$\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} . \tag{38}$$

• La famille $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ est libre. En effet on voit que le premier et le troisième vecteurs ne sont pas multiples l'un de l'autre, donc la sous-famille $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ est libre. De plus le vecteur $\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$ n'est pas combinaison de ces deux vecteurs car sa deuxième composante est non nulle. En effet il n'existe pas de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix} \tag{39}$$

car le membre de gauche de l'égalitá une deuxième composante nulle quels que soient α et β, alors que le membre de droite de l'égalité a une deuxième composante égale à 2 donc non nulle.

• La famille $\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ est libre. Le raisonnement est identique à celui qu'on vient de faire.

• Finalement une famille un peu compliquée : $\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Pour savoir si elle est liée ou pas on peut utiliser deux méthodes (qui en realité coïncident) :

Première méthode : On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 . \tag{40}$$

Si on trouve que les uniques valeurs de α, β, γ qui vérifient cette égalité sont $\alpha = \beta = \gamma = 0$, alors la famille est libre. Si on trouve des valeurs non nulles pour α, β, γ alors la famille est liée.

Deuxieme methode : On forme la matrice $\begin{pmatrix} 3&4&1 \\ 1&3&1 \\ 2&1&1 \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont les vecteurs de la famille. Alors la famille est libre si et seulement si le rang de cette matrice est égal au nombre de ses colonnes.

Démonstration que les deux methodes sont équivalentes : Avec la première méthode on cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ . \tag{41}$$

C'està-dire

$$\begin{pmatrix} 3\alpha+4\beta+1\gamma \\ 1\alpha+3\beta+1\gamma \\ 2\alpha+1\beta+1\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ . \tag{42}$$

Ceci revient à trouver α, β, γ tels que

$$\begin{pmatrix} 3&4&1 \\ 1&3&1 \\ 2&1&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ . \tag{43}$$

La famille est libre si et seulement s'il n'existe pas de tels α, β, γ non nuls. En d'autres termes la famille est libre si et seulement si l'unique solution de ce système est $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Clairement ceci est verifié si et seulement si le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 3&4&1 \\ 1&3&1 \\ 2&1&1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

est 3.

Solution de l'exercice : Trouvons le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 3&4&1 \\ 1&3&1 \\ 2&1&1 \end{pmatrix}$. Par opérations élémentaires on a :

$$\begin{pmatrix} 3&4&1 \\ 1&3&1 \\ 2&1&1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \ell_2 \\ \ell_1 \\ \ell_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1&3&1 \\ 3&4&1 \\ 2&1&1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2-3\ell_1 \\ \ell_3-2\ell_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1&3&1 \\ 0&-5&-2 \\ 0&-7&-1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \ell_1+\frac{3}{5}\ell_2 \\ -\ell_2/5 \\ \ell_3+\frac{7}{5}\ell_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1&0&-1/5 \\ 0&1&2/5 \\ 0&0&-19/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \tag{45}$$

Le rang est 3, donc la famille est libre.

- La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est forcément liée car 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ sont toujours liés. D'ailleurs le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 0&1&-1&1 \\ 1&1&0&0 \\ 2&1&1&1 \end{pmatrix}$ est au plus égal à 3. Une autre manière de le voir est de dire que l'espace vectoriel engendré par cette famille, étant contenu dans $\mathbb{R}^3$, a une dimension au plus égale à 3.

On voit que la dimension de l'espace engendré par cette famille est 3, et donc cette famille engendre R^3 tout entier. Ceci se voit en raisonnant comme pour les étapes 1 et 2. **Etape 1 :** Les vecteurs $\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ ne sont pas multiples l'un de l'autre et ils engendrent un espace de dimension 2. **Etape 2 :** Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à l'espace engendré par $\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ car sa deuxième composante est non nulle.

2.2. Resumé des resultats. Dans le tabulat qui suive on résume les resultats de l'exercice 2. On note

$$\begin{aligned} F &= \{v_1, \ldots, v_n\} = \text{Famille} \ , \\ < F > &= < \{v_1, \ldots, v_n\} > = \text{espace engendré par la famille } F \ , \\ (F) &= (v_1, \ldots, v_n) = \text{Matrice dont les colonnes sont les vecteurs } v_1, \ldots, v_n \ . \end{aligned}$$

Famille F	F est libre ?	F est génératrice pour $\mathbb{R}^3$?	F est base de $\mathbb{R}^3$?	$\dim < F >= \text{rang}(F)$
$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$	Oui	Non	Non	2
$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$	Oui	Oui	Oui	3
$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$	Non	Non	Non	2
$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$	Oui	Oui	Oui	3
$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$	Oui	Oui	Oui	3
$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$	Non	Oui	Non	3

3. Exercice 3

3.1. Solutions de (1) :

Par définition, si un vecteur v s'écrit dans la base $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ comme

$$v = \alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 + \alpha_3 \cdot w_3 \ ,$$

alors ses coordonnées sont α_1, α_2 et α_3, et le vecteur v peut être indiqué, dans la base $\mathcal{B}$ comme

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \ .$$

En particulier les vecteurs w_1, w_2, w_3 s'écrivent

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \ w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \ w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

• Comme $v_1 = w_1 + w_2 + w_3$, alors dans la base $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ les coordonnées de v_1 sont

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ . \tag{46}$$

• Comme $v_2 = w_2 + w_3$, alors dans la base $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ les coordonnées de v_2 sont

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ . \tag{47}$$

• Comme $v_2 = w_3$, alors dans la base $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ les coordonnées de v_3 sont

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ . \tag{48}$$

3.2. Solutions de (2)**.** On sait que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si elle est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$ tout entier. On remarque que, comme le nombre de vecteurs est égal à 3, alors elle est libre si et seulement si elle est génératrice (voir p.5 : comme $n = d = 3$, alors $r = n$ si et seulement si $r = d$).

Première méthode : Montrons que la famille est libre. On forme la matrice (v_1, v_2, v_3) et on démontre que son rang est 3 (voir p.5) :

$$(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{49}$$

Donc la famille $\mathcal{E} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Deuxième methode : Montrons que la famille est génératrice. Les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont des combinaisons linéaire de la base $\{w_1, w_2, w_3\}$. Donc l'espace

$< \{v_1, v_2, v_3\} >$ engendré par la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est contenu dans celui engendré par $\{w_1, w_2, w_3\}$.

Nous voulons montrer que ces deux espaces sont egaux. Si l'on montre que w_1, w_2 et w_3 sont des combinaisons linéaires des $\{v_1, v_2, v_3\}$, alors l'espace engendré par $\{w_1, w_2, w_3\}$ (c'est-à-dire $\mathbb{R}^3$ tout entier) est contenu dans celui engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$. Dans ce cas les deux espaces seront contenus l'un dans l'autre et il seront donc égaux.

Nous allons donc exprimer w_1, w_2 et w_3 comme combinaisons linéaires des vecteurs v_1, v_2, v_3 : On sait que

$$\left\{\begin{array}{l} v_1 = w_1 + w_2 + w_3 \\ v_2 = \quad\quad\; w_2 + w_3 \\ v_3 = \quad\quad\quad\quad\;\; w_3 \end{array}\right. \tag{50}$$

Nous voulons *inverser* cette relation et exprimer w_1, w_2, w_3 en fonction de v_1, v_2, v_3.

Comme

$$w_3 = v_3 \ ,$$

donc w_3 est combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3. Maintenant $v_2 = w_2 + w_3 = w_2 + v_3$, alors

$$w_2 = v_2 - v_3 \ ,$$

donc w_2 est combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3. Finalement $v_1 = w_1 + w_2 + w_3 = w_1 + (v_2 - v_3) + v_3 = w_1 + v_2$, alors

$$w_1 = v_1 - v_2 \ .$$

Donc w_1, w_2 et w_3 appartiennent à l'espace engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$. Les espaces engendrés par $\{v_1, v_2, v_3\}$ et $\{w_1, w_2, w_3\}$ sont égaux, alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ engendre $\mathbb{R}^3$, donc (comme elle est formée par 3 vecteurs) elle est aussi une base de $\mathbb{R}^3$.

3.3. Solutions de (3)**.** Dans la base $\mathcal{B}$ le vecteur u s'ecrit

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (\text{ Dans la base } \mathcal{B}\ ) \ . \tag{51}$$

Ceci signifie que

$$u = 1 \cdot w_1 - 1 \cdot w_2 + 2 \cdot w_3 \ . \tag{52}$$

Comme on sait que

$$\left\{\begin{array}{l} w_1 = v_1 - v_2 \\ w_2 = v_2 - v_3 \\ w_3 = \quad\;\;\, v_3 \end{array}\right. \ , \tag{53}$$

alors l'équation (52) devient

$$u = v_1 - v_2 - (v_2 - v_3) + 2v_3 = v_1 - 2v_2 + 3v_3 \ . \tag{54}$$

Donc dans la base $\mathcal{E} = \{v_1, v_2, v_3\}$ le vecteur u s'ecrit comme

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (\text{ Dans la base } \mathcal{E}\ ) \ . \tag{55}$$

3.4. Solutions de (4)**.** Dans la base $\mathcal{E}$ le vecteur h s'ecrit

$$h = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad (\text{ Dans la base } \mathcal{E}\ ) \ . \tag{56}$$

Ceci signifie que

$$h = -5 \cdot v_1 + 4 \cdot v_2 - 3 \cdot v_3 \ . \tag{57}$$

Comme on sait que

$$\left\{\begin{array}{l} v_1 = w_1 + w_2 + w_3 \\ v_2 = \quad\quad\; w_2 + w_3 \\ v_3 = \quad\quad\quad\quad\;\; w_3 \end{array}\right. \tag{58}$$

alors l'équation (57) devient

$$h = -5(w_1 + w_2 + w_3) + 4(w_2 + w_3) - 3w_3 = -5w_1 - w_2 - 4w_3\ . \tag{59}$$

Donc dans la base $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ le vecteur u s'ecrit comme

$$h = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad (\text{ Dans la base } \mathcal{B}\ )\ . \tag{60}$$

4. Exercice 4

Un sous ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est un **sous-espace vectoriel** si
(1) Le vecteur $\vec{0}$ appartient à S ;
(2) Si v appartient à S, alors tout multiple de v appartient à S. C'est à dire pour tout scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda \cdot v$ est encore dans S ;
(3) Si v et w appartiennent à S, alors $v + w$ appartiennent à S ;

4.1. Exercice 4.a). L'ensemble $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y = 0 \ \}$ est un sous-espace vectoriel. En fait

(1) Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à F car $0 + 0 = 0$.

(2) Si $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est dans F, c'est-à-dire si $\alpha + \beta = 0$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda\alpha \\ \lambda\beta \\ \lambda\gamma \end{pmatrix}$ et ce vecteur vérifie encore

$$\lambda\alpha + \lambda\beta = \lambda(\alpha + \beta) = \lambda \cdot 0 = 0\ .$$

Donc si v est dans F, alors $\lambda \cdot v$ est dans F.

(3) Supposons que $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de F. On a $v + w = \begin{pmatrix} \alpha+\alpha' \\ \beta+\beta' \\ \gamma+\gamma' \end{pmatrix}$. Comme v et w sont dans F on a $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha' + \beta' = 0$, donc aussi

$$(\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') = (\alpha + \beta) + (\alpha' + \beta') = 0 + 0 = 0 \tag{61}$$

donc si v et w sont dans F, le vecteur $v + w$ l'est aussi.

4.2. Exercice 4.b). L'ensemble $G = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 - y^2 = 0 \ \}$ n'est pas un sous-espace vectoriel. En fait, on peut voir que cet ensemble contient le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, qu'il est stable par multiplication par les scalaires, mais qu'il n'est pas stable par la somme. En effet on suppose que $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de G. On a $v + w = \begin{pmatrix} \alpha+\alpha' \\ \beta+\beta' \\ \gamma+\gamma' \end{pmatrix}$. Comme v et w sont dans G on a $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ et $(\alpha')^2 + (\beta')^2 = 0$, mais

$$(\alpha + \alpha')^2 + (\beta + \beta')^2 \neq 0 \tag{62}$$

en général. Par exemple si $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors v et w sont bien des vecteurs de G, mais $v + w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne verifie pas $2^2 + 0^2 = 0$ donc $v + w$ n'appartient pas à G.

4.3. Exercice 4.c). L'ensemble $H = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 0\}$ est un espace vectoriel. En effet $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à H car $0 + 0 + 0 = 0$. Puis si $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ sont dans H, alors par definition $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et $\alpha' + \beta' + \gamma' = 0$. Donc les vecteurs $\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda\alpha \\ \lambda\beta \\ \lambda\gamma \end{pmatrix}$ et $v + w = \begin{pmatrix} \alpha+\alpha' \\ \beta+\beta' \\ \gamma+\gamma' \end{pmatrix}$ verifient aussi

$$\lambda\alpha + \lambda\beta + \lambda\gamma = \lambda(\alpha + \beta + \gamma) = \lambda \cdot 0 = 0 \tag{63}$$

et

$$(\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') + (\gamma + \gamma') = (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha' + \beta' + \gamma') = 0 + 0 = 0\ , \tag{64}$$

ceci montre que si v et w appartiennent à H, alors λv et $v + w$ appartiennent à H aussi. Donc H est un espace vectoriel.

4.4. Exercice 4.d). L'ensemble $I = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 7x+2y+3z = 1$ n'est pas un espace vectoriel car le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'y appartient pas. En fait $7 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0$ n'est pas égal à 1.

4.5. Exercice 4.e). L'ensemble $L = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \}$ est un espace vectoriel. En effet le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $0+0-3\cdot 0 = 0$ et $3\cdot 0 - 0 - 0 = 0$, et donc il appartient à L. Soyent $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans L, alors par définition on a

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 3\gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \alpha' + \beta' - 3\gamma' = 0 \\ 3\alpha' - \beta' - \gamma' = 0 \end{cases} .$$

Donc le vecteur $\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda\alpha \\ \lambda\beta \\ \lambda\gamma \end{pmatrix}$ vérifie

$$\begin{cases} \lambda\alpha + \lambda\beta - 3\lambda\gamma = \lambda(\alpha + \beta - 3\gamma) = 0 \\ 3\lambda\alpha - \lambda\beta - \lambda\gamma = 3\lambda(\alpha - \beta - \gamma) = 0 \end{cases}$$

Ceci montre que λv appartient aussi à L.

Enfin le vecteur $v + w = \begin{pmatrix} \alpha+\alpha' \\ \beta+\beta' \\ \gamma+\gamma' \end{pmatrix}$ vérifie

$$\begin{cases} (\alpha+\alpha') + (\beta+\beta') - 3(\gamma+\gamma') = (\alpha+\beta-3\gamma) + (\alpha'+\beta'-3\gamma') = 0 + 0 = 0 \\ 3(\alpha+\alpha') - (\beta+\beta') - (\gamma+\gamma') = (3\alpha-\beta-\gamma) + (3\alpha'-\beta'-\gamma') = 0 + 0 = 0 \end{cases} \tag{65}$$

donc le vecteur $v + w$ appartient à L. Donc L est un espace vectoriel.

4.6. Exercice 4.f). L'ensemble $M = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \}$ n'est pas un espace vectoriel. En effet le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $0 + 0 + 0 = 0$ et $0^2 - 0^2 = 0$, et donc il appartient à M. Mais si $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs dans M, alors il n'est pas vrai que $v + w$ appartient à M. En effet si $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors v et w appartiennent à M car

$$\begin{cases} 1 + 1 + (-2) = 0 \\ 1^2 - 1^2 = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} 1 \; + \; (-1) \; + 0 = 0 \\ 1^2 \; - \; (-1)^2 \qquad = 0 \end{cases},$$

mais leur somme $v + w = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1-1 \\ -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à M car le vecteur $v + w$ ne vérifie pas la deuxième équation : en effet $2^2 - 0^2$ n'est pas égal à 0.

5. Exercice 5

5.1. Exercice 5 point 1.

Explication intuitive

Rapellons que F est defini comme

(66) $$F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; x + y = 0 \; \} .$$

Celle-ci est l'équation d'*un plan dans* $\mathbb{R}^3$ *qui passe par* 0, donc F est un espace de dimension 2. Pour engendrer F on sait qu'il faut 2 vecteurs de F non liés. Il suffit alors de verifier que les deux vecteurs donnés sont dans F et qu'il ne sont pas liés.

Explication en termes de espaces vectoriels : D'abord montrons que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ sont dans F. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $1 + (-1) = 0$, donc il appartient à F. De même la somme des premières deux composantes du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ est égale à 0, donc celui-ci appartient aussi à F. Il est clair que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ ne sont pas liés, car il ne sont pas multiple l'un de l'autre. Donc :

- l'espace vectoriel

(67) $$< \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \} >$$

  engendré par ces deux vecteurs est de dimension 2 ;
- l'espace $< \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \} >$ est contenu dans F, donc F est de dimension au moins 2. De plus on a les inclusions

(68) $$< \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \} > \quad \subseteq \quad F \quad \subseteq \quad \mathbb{R}^3 .$$

  On sait que la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3, et que la dimension de $< \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \} >$ est 2. Donc il y a deux possibilités

(69) $$\text{Si} \quad \dim F = 2 \quad \Longrightarrow \quad F \; = < \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \} > ,$$

(70) $$\text{Si} \quad \dim F = 3 \quad \Longrightarrow \quad F \; = \; \mathbb{R}^3 .$$

- On voit que l'espace F n'est pas égal à $\mathbb{R}^3$, car il y a des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui ne sont pas dans F (par exemple la somme des deux premières composantes du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'étant pas 0, ce vecteur n'appartient pas à F). Donc, comme F n'est pas égal à $\mathbb{R}^3$, la dimension de F n'est pas 3 mais 2. Donc F est egal à l'espace $< \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \} >$. Autrement dit, F est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$. Cette famille est donc libre et génératrice de F, donc c'est bien une base de F.

5.2. Exercice 5 point 2.

Ceci a deja été demontré dans le point 1.

5.3. Exercice 5 point 3. On rappelle que $G = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 - y^2 = 0 \ \}$ et que ce n'est pas un espace vectoriel. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans G, car $1^2 - 1^2 = 0$ et le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans G, car $1^2 - (-1)^2 = 0$.

5.4. Exercice 5 point 4. Meme si G n'est pas un espace vectoriel la question 4 a un sens. Il est possible que tout vecteur de G soit combinaison linéaire des deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ceci signifierait que, bien que l'ensemble G ne soit pas un espace vectoriel, il serait quand même contenu dans le sous-espace vectoriel $< \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \} >$.

Bien que cela soit possible a priori, ce n'est pas vrai, car (par exemple) le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à G, mais il n'appartient pas à l'espace engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En effet le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{71}$$

est 3 (voir ci-dessous) et donc ces trois vecteurs ne sont pas liés. Ceci implique que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Montrons que le rang de la matrice (71) est 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_3 \\ \ell_2 - \ell_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \ell_1 - \ell_2 \\ \ell_2 \\ \ell_2 + 2\ell_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{72}$$

5.5. Exercice 5 point 5.

Explication intuitive

On rappellle que

$$H = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 0 \} \ . \tag{73}$$

Comme pour F on s'attend à ce que H soit engendré par deux vecteurs, car son équation est celle d'un plan qui passe par l'origine.

Comme pour l'espace F on voit facilement que H n'est pas égal à $\mathbb{R}^3$ (car par exemple le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à H). Il faut maintenant trouver deux vecteurs v_1, v_2 de H qui engendrent H tout entier. Pour que le vecteur générique $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ gamma \end{pmatrix}$ soit un vecteur de H, il faut et il suffit que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. On peut prendre alors le premier vecteur égal par exemple à

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ . \tag{74}$$

Pour le second vecteur v_2, il faut prendre garde à ce qu'il ne soit pas un multiple de v_1, de sorte que l'espace engendré par $< v_1, v_2 >$ soit de dimension 2. On peut prendre alors

$$v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ . \tag{75}$$

Maintenant montrons que ces deux vecteurs engendrent F :

– L'espace $< v_1, v_2 >$ a dimension 2 car la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre.
– L'espace $< v_1, v_2 >$ est contenu dans F, donc F a dimension supérieure ou égale à 2,
– On sait que F n'est pas égal à $\mathbb{R}^3$ donc F sa dimension est 2.

– Pour finir les espaces vectoriels $< v_1, v_2 >$ et F sont tous les deux de dimension 2 et $< v_1, v_2 >$ est contenu dans F, donc il sont forcément égaux.

Donc l'espace engendré par v_1 et v_2 est égal à F.

5.6. Exercice 5 point 5, seconde partie. Comme $I = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 7x + 2y + 3z = 1 \}$ n'est pas un espace vectoriel, la question de trouver une base de I n'a aucun sens.

5.7. Exercice 5 point 6. Cet exercice est intéressant. Avant de répondre aux questions de l'exercice 5 point 6, nous étudions d'abord l'espace L de manière générale.

Explication intuitive

On rappelle que

(76) $$L = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \} .$$

Donc L est l'intersection de deux plans qui passent par 0. Le premier plan est $x + y - 3z = 0$, c'est le plan des vecteurs $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ *ortogonaux* au vecteur

(77) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

car le vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est ortogonal au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ si et seulement s'il vérifie

(78) $$1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta + (-3) \cdot \gamma = 0 \qquad (\text{ produit scalaire égal à } 0) .$$

De même le plan d'equation $3x - y - z = 0$ est constitué par les vecteurs qui sont ortogonaux au vecteur

(79) $$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Comme les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas multiple l'un de l'autre on peut dire que les deux plans ne sont pas égaux, mais leur intersection est une droite.

Donc l'espace L est cette droite, il a dimension 1 et il est engendré par un seul vecteur. Pour trouver ce vecteur il faut résoudre le système

(80) $$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$$

Le solutions de ce système sont un espace de dimension 1. Cet espace est L.

Explication en termes d'espaces vectoriels : Les vecteurs de L sont les solutions du système

(81) $$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$$

Trouvons ces solutions.

(82) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 - 3\ell_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \ell_1 + \ell_2/4 \\ -\ell_2/4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Les solutions forment donc un espace de dimension 1 :

(83) $$\begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$$

Comme la dimension est 1, alors un vecteur non nul qui soit solution est une base de L. Par exemple (pour $z = 1$) le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{84}$$

est une base de L.

Réponses aux questions de l'exercice 5 **point** 6 **:** Comme les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont solutions du système (83), alors ils appartiennent à L. Il ne forment pas une base de L pour deux raisons : premièrement L est de dimension 1 et, deuxièmement, ils sont liés (on voit facilement que l'un est multiple de l'autre). Ils engendrent L car tout vecteur de L est multiple de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.8. Exercice 5 point 7. Le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une base de L, car L est par définition l'espace des solution du système $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$ et on a vu que ces solutions forment un espace vectoriel de dimension 1 engendré par un vecteur quelconque (non nul) de cet espace vectoriel. Comme le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est solution, alors il constitue une base de L.

5.9. Exercice 5 point 8. Rappellons que M est defini comme

$$M = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \} \tag{85}$$

Pour qu'un vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ appartienne à M il faut et il suffit que la somme $\alpha + \beta + \gamma$ soit égale à 0 et que la différence $\alpha^2 - \beta^2$ soit nulle aussi.

Les vecteurs $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ sont donc dans M car $1 + 1 + 2 = 0$, $1^2 - 1^2 = 0$, et $1 + (-1) + 0 = 0$, $1^2 + (-1)^2 = 0$.

La question de savoir si ces deux vecteurs forment une base de M n'a pas de sens, car M n'est pas un espace vectoriel.

5.10. Exercice 5 point 9. Les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ sont F, H et L.

Espace	dimension	base
$F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y = 0 \ \}$	2	$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \}$
$H = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 0 \}$	2	$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}$
$L = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases} \}$	1	$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \}$