Université Paris VI | LM120
Pierre et Marie Curie | PCME24

Feuille d'exercice n° 2.

Exercice 1. Pour chacun des systèmes qui suivent écrire la matrice du système et la matrice augmentée du système. De plus, pour chacun d'entre eux, trouver la forme échelonnée, et la forme échelonée reduite :

$$(S_1) : \begin{cases} 5x+5y-10z &= 5 \\ 21x+21y-42z &= 1 \\ 11x+11y-22z &= 0 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x+y-2z &= 1 \\ 9x+y-2z &= 9 \\ 5x+y-2z &= 5 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} x &= 1 \\ 2y+7/2z &= 2 \\ -2y-3z &= 0 \end{cases} \qquad (S_4) : \begin{cases} x &= 10 \\ -3y-7/2z &= 100 \\ 2y+2z &= 1000 \end{cases}$$

$$(S_5) : \begin{cases} 2x+y &= 1 \\ 5x+4y+3z &= 7 \end{cases} \qquad (S_6) : \begin{cases} 3x+2y &= 0 \\ 4x+5y &= 0 \\ y &= 200 \end{cases}$$

Exercice 2. Resoudre les systèmes précédents.

Exercice 3. Soit A_n la matrice du système (S_n) de l'exercice 1. Montrer que l'on a

$$A_1 \cdot A_2 = 0 \ , \ \text{bien que } A_1 \neq 0, \text{ et } A_2 \neq 0 \ . \tag{1}$$

Montrer que l'on a

$$A_2^4 = 0 \ , \qquad A_3^3 = \mathrm{Id} \ , \qquad A_4 = A_3^{-1} \ . \tag{2}$$

Exercice 4. Calculer l'inverse des matrices suivantes et de toutes les matrices obtenues par produit de deux de ces matrices :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Exercice 5. Calculer le rang de chaque matrice de l'exercice 1. Quel est le rang de chaque matrice dans l'exercice 4 ?

Exercice 6. Calculer les matrices qui ont servi pour transformer les systèmes de l'exercice 1 en forme échelonnée reduite.

Exercice 7. Resoudre les systèmes suivants en fonction des paramètres a, b :

$$(S_7) : \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+2y+3z &= 4 \\ 3x+4y+5z &= a \end{cases} \qquad (S_8) : \begin{cases} x+ay+z &= 1 \\ ax+y+(a-1)z &= a \\ x+y+z &= a+1 \end{cases}$$

$$(S_9) : \begin{cases} x+y+z &= 3 \\ 3x+6y-9z &= 1 \\ 2x+4y-6z &= a \end{cases} \qquad (S_{10}) : \begin{cases} x+ay+bz &= 0 \\ ax+y+bz &= 0 \\ bx+ay+z &= 0 \end{cases}$$

$$(S_{11}) : \begin{cases} x+y+(1-a)z &= a+2 \\ (1+a)x-y+2z &= 0 \\ 2x-ay+3z &= a+2 \end{cases} \qquad (S_{12}) : \begin{cases} ax+y+z &= 1 \\ x+ay+z &= a \\ x+y+(2-a)z &= b-1 \end{cases}$$

De plus calculer, en fonction de a, b, les rangs des matrices des systèmes et des matrices augmentées de ces systèmes. Calculer aussi la matrice qui a servi pour arriver à la forme reduite.

Exercice 1. Nous allons resoudre ensemble les exercices 1, 2, 3, 5 et 6. Nous rapellons la définition de rang d'une matrice.

Définition : *Soit A une matrice. Si A est en forme échelonnée réduite, alors le rang de A est égal au nombre de lignes non nulles de A. Si A n'est pas échelonnée reduite, alors le rang de A est par définition le rang de son échelonnée reduite.*

Remarque : Si A est échelonnée reduite alors le rang de A coïncide avec le nombre de colonnes éssentielles de A.

<u>Solutions :</u> Les matrices A_i des systèmes (S_i) sont les suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -10 \\ 21 & 21 & -42 \\ 11 & 11 & -22 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 9 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7/2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7/2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Les matrices augmentées sont les suivantes

$$\widetilde{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -10 & 5 \\ 21 & 21 & -42 & 1 \\ 11 & 11 & -22 & 0 \end{array}\right), \quad \widetilde{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 9 & 1 & -2 & 9 \\ 5 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right), \quad \widetilde{A}_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7/2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right),$$
$$\widetilde{A}_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -3 & -7/2 & 100 \\ 0 & 2 & 2 & 1000 \end{array}\right), \quad \widetilde{A}_5 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right), \quad \widetilde{A}_6 = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right),$$

On va résoudre ces systèmes en trouvant la forme échelonnée et la forme échelonnée reduite des matrices augmentées. Nous allons, avant tout, resoudre en detail le système (S_1) : Le système (S_1) s'écrit en forme matriciale comme

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & -10 \\ 21 & 21 & -42 \\ 11 & 11 & -22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Trouvons la forme échelonnée de $\widetilde{A}_1$:

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_1 \quad &= \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -10 & 5 \\ 21 & 21 & -42 & 1 \\ 11 & 11 & -22 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \ell_1/5 \\ \ell_2/21 \\ \ell_3/11 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1/21 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2-\ell_1 \\ \ell_3-\ell_1 \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -20/21 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)}_{\text{échelonnée}} \\ &\sim \quad \begin{array}{c} \ell_1+\ell_3 \\ -\ell_3 \\ \ell_2-(21/20)\ell_3 \end{array} \quad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\text{échelonnée reduite}} \end{aligned}$$

Donc le système (S_1) est équivalent au système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x+y-2z &= 0 \\ \quad 0 &= 1 \\ \quad 0 &= 0 \end{cases} \tag{6}$$

Le système est alors impossible.
La matrice échelonnée de A_1 est $R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc son rang est égal à 1. La matrice échelonnée de $\widetilde{A}_1$ est $\widetilde{R}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc son rang est égal à 2. En

effet le fait que le système soit impossible est fortement lié au fait que ces deux rangs sont différents (voir ci dessous le principe général qui donne le lien entre rangs et solutions).

Si le système avait des solutions alors il faut savoir dire la dimension de ces solutions.

Définition : *La dimension de l'éspace des solutions est le nombre de* paramètres *qu'il faut pour décrire ces solutions.*

Exemple : A.— Considerons le système (en forme échelonnée réduite)

$$\begin{cases} x+7y = 0 \\ z \quad = 3 \end{cases} . \tag{7}$$

Alors les solutions sont $\begin{cases} x = -7y \\ z = \quad 3 \end{cases}$. Ceci signifie que "$x$ est *parametré* par y" : pour toute valeur de y on obtient la valeur de x correspondante. Le systeme $\begin{cases} x+7y = 0 \\ z \quad = 3 \end{cases}$ n'est pas impossible, et il admet un seule variable qui paramétrise les solutions (cette variable est y) donc l'éspace des solutions a dimension 1.

B.— Considerons le système (en forme échelonnée réduite)

$$\begin{cases} x-y \quad = 0 \\ z-y+3t = 3 \end{cases} \tag{8}$$

Alors les solutions sont $\begin{cases} x = \quad y \\ z = 3-3t+y \end{cases}$. Ceci signifie que "$x$ est *parametré* par y" et "z est *parametré* par y et t" : pour tout valeur de y et t on obtien la valeur de x et z correspondante. Pour simplifier on dit que

"les solutions sont parametrées par y et t" .

Le systeme $\begin{cases} x = \quad y \\ z = 3-3t+y \end{cases}$ n'est pas impossible, et ses solutions sont parametrées par les deux paramètres y et t. Donc l'éspace des solutions est de dimension 2.

On a le principle général suivant :

Principe général : Soit

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \cdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

un système. Soient

$$A := \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{\text{matrice du système}} , \quad \widetilde{A} := \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ & \cdots & & \vdots \\ & \cdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array}\right)}_{\text{matrice augmentée du système}} \tag{10}$$

système peut etre de trois types :

impossible	*avec solution unique*	*avec une infinité de solutions*
$rg(A) < rg(\widetilde{A})$	$rg(A) = rg(\widetilde{A})$	$rg(A) = rg(\widetilde{A})$
	et	et
pas de solutions	dim. sol. $= 0$	**dim. sol. $=$** **(n^0 de colonne de A)$-rg(A)$**

Faisons de meme pour les autres matrices :

$$\widetilde{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-2&1\\ 9&1&-2&9\\ 5&1&-2&5\end{array}\right) \sim \begin{array}{c}\ell_1\\ \ell_2-9\ell_1\\ \ell_3-5\ell_1\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&1\\ 0&-8&16&0\\ 0&-4&8&0\end{array}\right) \sim \begin{array}{c}\ell_1\\ -\ell_2/8\\ \ell_3-\ell_2/2\end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&1\\ 0&1&-2&0\\ 0&0&0&0\end{array}\right)}_{\text{échelonnée}} \sim \begin{array}{c}\ell_1-\ell_2\\ \ell_2\\ \ell_3\end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\ 0&1&-2&0\\ 0&0&0&0\end{array}\right)}_{\text{échelonée reduite}}$$

$$\widetilde{A}_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&1\\ 0&2&7/2&2\\ 0&-2&-3&0\end{array}\right) \sim \begin{array}{c}\ell_1\\ \ell_2/2\\ \ell_3+\ell_2\end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\ 0&1&7/4&1\\ 0&0&1/2&2\end{array}\right)}_{\text{échelonée}} \sim \begin{array}{c}\ell_1\\ \ell_2-7/2\ell_3\\ 2\ell_3\end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\ 0&1&0&-6\\ 0&0&1&4\end{array}\right)}_{\text{échelonée reduite}}$$

$$\widetilde{A}_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&10\\ 0&-3&-7/2&100\\ 0&2&2&1000\end{array}\right) \sim \begin{array}{c}\ell_1\\ -\ell_2/3\\ \ell_3+2/3\ell_2\end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&10\\ 0&1&7/6&-100/3\\ 0&0&-1/3&3200/3\end{array}\right)}_{\text{échelonée}} \sim \begin{array}{c}\ell_1\\ \ell_2+\frac{7}{2}\ell_3\\ -3\ell_3\end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&10\\ 0&1&0&3700\\ 0&0&1&-3200\end{array}\right)}_{\text{échelonée reduite}}$$

$$\widetilde{A}_5 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2&1&0&1\\ 5&4&3&7\end{array}\right) \sim \begin{array}{c}\ell_1/2\\ \ell_2-5/2\ell_1\end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}1&1/2&0&1/2\\ 0&3/2&3&9/2\end{array}\right)}_{\text{échelonée}} \sim \begin{array}{c}\ell_1-1/3\ell_2\\ 2/3\ell_2\end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\ 0&1&2&3\end{array}\right)}_{\text{échelonée reduite}}$$

$$\widetilde{A}_6 = \left(\begin{array}{cc|c} 3&2&0\\ 4&5&0\\ 0&1&200\end{array}\right) \sim \begin{array}{c}\ell_1/3\\ \ell_2-4/3\ell_1\\ \ell_3\end{array} \left(\begin{array}{cc|c}1&2/3&0\\ 0&7/3&0\\ 0&1&200\end{array}\right) \sim \begin{array}{c}\ell_1-2/7\ell_2\\ 3/7\ell_2\\ \ell_3-3/7\ell_2\end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&200\end{array}\right)}_{\text{échelonée}} \sim \begin{array}{c}\ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3/3\end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{array}\right)}_{\text{échelonée reduite}}$$

Chaque système est équivalent au système obtenu a partir de sa forme échelonée reduite :

$$\begin{aligned}
(S_2) &\sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1\\ y-2z = 0\end{array}\right. && (11)\\
(S_3) &\sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-6\\4\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1\\ y = -6\\ z = 4\end{array}\right. && (12)\\
(S_4) &\sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\3700\\-3200\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 10\\ y = 3700\\ z = -3200\end{array}\right. && (13)\\
(S_5) &\sim \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-z = -1\\ y+2z = 3\end{array}\right. && (14)\\
(S_6) &\sim \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0\\ y = 0\\ 0 = 1\end{array}\right. && (15)
\end{aligned}$$

Donc :

- Le système (S_2) possède une infinité “à un paramètre” de solutions. Les solutions sont

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1\\ y = 2z\end{array}\right. \qquad (16)$$

  Le rang de la matrice du système est $rg(A_2) = 2$. Le rang de la matrice augmentée du système est $rg(\widetilde{A}_2) = 2$. En effet on a

$$\dim \text{sol}(S_2) = (n^0 \text{ de colonne de } A_2) - rg(A_2) = 3 - 2 = 1 \ . \qquad (17)$$

- Le systèmes (S_3) et (S_4) ont une solution unique donée par

$$(S_3) : \left\{\begin{array}{l} x = 1\\ y = -6\\ z = 4\end{array}\right. \qquad (S_4) : \left\{\begin{array}{l} x = 10\\ y = 3700\\ z = -3200\end{array}\right. \qquad (18)$$

- Le fait qu'on a solution unique se voit aussi sur les rangs : On a $rg(A_3) = rg(\widetilde{A}_3) = rg(A_4) = rg(\widetilde{A}_4) = 3$, donc ceci confirme le fait qu'il y a des solutions et que

$$\begin{aligned}
\dim \text{sol}(S_3) &= (n^0 \text{ de colonne de } A_3) - rg(A_3) = 3 - 3 = 0 \ , && (19)\\
\dim \text{sol}(S_4) &= (n^0 \text{ de colonne de } A_4) - rg(A_4) = 3 - 3 = 0 \ . && (20)
\end{aligned}$$

– Le système (S_5) possède une infinité “à un paramètre” de solutions. Les solutions sont

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1+z \\ y = 3-2z \end{array}\right. \tag{21}$$

En effet cela se voit aussi sur les rangs : $rg(A_5) =$ et $rg(\widetilde{A}_5) =$, les deux rangs sont égaux donc le système (S_5) a des solutions, de plus

$$\dim \mathrm{sol}(S_5) = (n^0 \text{ de colonne de } A_5) - rg(A_5) = 3 - 2 = 1\ . \tag{22}$$

– Le système (S_6) est impossible. En effet $rg(A_6) = 2$ et $rg(\widetilde{A}_6) = 3$.

Exercice 5. Chaque operation élementaire sur les lignes est est une multiplication par une matrice inversible. Par exemple l'operation suivante

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \ell_1/7 \\ \ell_2-3\ell_1 \end{array} \begin{pmatrix} a/7 & b/7 \\ c-3a & d-3b \end{pmatrix} \tag{23}$$

est la multiplication par la matrice $\begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ en effet on a

$$\begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/7 & b/7 \\ c-3a & d-3b \end{pmatrix}\ . \tag{24}$$

Pour trouver la matrice $\begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ qui est attachée a cette transformation élementaire il faut immaginer que si ℓ_1' et ℓ_2' sont les nouvelles lignes de la matrice d'arrivée alors on a

$$\left\{\begin{array}{rl} 1/7\ell_1 & = \ell_1' \\ -3\ell_1+\ell_2 & = \ell_2' \end{array}\right. . \tag{25}$$

la matrice $\begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est alors la matrice de ce système.

Pour le système (S_1) on avait suivi la methode suivante :

$$\widetilde{A}_1 \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -10 & 5 \\ 21 & 21 & -42 & 1 \\ 11 & 11 & -22 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \ell_1/5 \\ \ell_2/21 \\ \ell_3/11 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1/21 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2-\ell_1 \\ \ell_3-\ell_1 \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -20/21 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)}_{\text{échelonnée}}$$

$$\sim \begin{array}{c} \ell_1+\ell_3 \\ -\ell_3 \\ \ell_2-(21/20)\ell_3 \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\text{échelonnée reduite}}$$

donc les matrices correspondants sont :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -(21/20) \end{pmatrix}}_{\left\{\begin{array}{rl} \ell_1+\ell_3 & = \ell_1' \\ -\ell_3 & = \ell_2 \\ \ell_2-(21/20)\ell_3 & = \ell_3' \end{array}\right.} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\left\{\begin{array}{rl} \ell_1 & = \ell_1' \\ \ell_2-\ell_1 & = \ell_2' \\ \ell_3-\ell_1 & = \ell_3' \end{array}\right.} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/21 & 0 \\ 0 & 0 & 1/11 \end{pmatrix}}_{\left\{\begin{array}{rl} \ell_1/5 & = \ell_1' \\ \ell_2/21 & = \ell_2' \\ \ell_3/11 & = \ell_3' \end{array}\right.} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & -10 & 5 \\ 21 & 21 & -42 & 1 \\ 11 & 11 & -22 & 0 \end{array}\right)}_{\widetilde{A}_1} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\widetilde{R}_1} .$$

Donc la matrice M_1 qui a servi pour transformer la matrice $\widetilde{A}_1$ en la matrice $\widetilde{R}_1$ est

$$M_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -(21/20) \end{pmatrix}}_{L_3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/21 & 0 \\ 0 & 0 & 1/11 \end{pmatrix}}_{L_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/11 \\ 1/5 & 0 & -1/11 \\ 1/100 & 1/21 & -21/220 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Cette matrice n'est pas unique, elle dépend des choix qu'on a fait pour réduire la matrice $\widetilde{A}_1$ à la matrice $\widetilde{R}_1$. En d'autres termes : si pour calculer on avait consideré d'autres opérations élémentaires on aurait trouvé la même matrice $\widetilde{R}_1$ (qui est unique), mais une autre matrice M_1.

Un autre methode pour trouver M_1 : On forme la grande matrice

$$\left(\underbrace{\begin{smallmatrix} 5 & 5 & -10 & 5 \\ 21 & 21 & -42 & 1 \\ 11 & 11 & -22 & 0 \end{smallmatrix}}_{\widetilde{A}_1} \middle| \underbrace{\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}}_{\mathrm{I}}\right) = \left(\widetilde{A}_1 \,|\mathrm{I}\right) \tag{27}$$

Comme chaque opération sur les lignes qu'on a fait pour obtenir $\widetilde{R}_1$ est la multiplication par L_i, si l'on fait les mêmes opérations sur la matrice $\left(\widetilde{A}_1 \,|\mathrm{I}\right)$ on obtient

$$\begin{aligned} L_3 \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot \left(\widetilde{A}_1 \,|\mathrm{I}\right) &= L_3 \cdot L_2 \cdot \left(L_1\widetilde{A}_1 \,|L_1\right) = L_3 \cdot \left(L_2L_1\widetilde{A}_1 \,|L_2L_1\right) && (28) \\ &= \left(L_3L_2L_1\widetilde{A}_1 \,|L_3L_2L_1\right) && (29) \\ &= \left(\widetilde{R}_1 \,|M_1\right) . && (30) \end{aligned}$$

Donc si depuis le départ on faisait toutes les opérations élémentaires sur la matrice $\left(\widetilde{A}_1 \,|\mathrm{I}\right)$ au lieu de la matrice $\widetilde{A}_1$, alors on aurait trouvé $\left(\widetilde{R}_1 \,|M_1\right)$, c'est à dire que on aurais aussi trouvé la matrice M_1 à droite.

Calcul de l'inverse d'une matrice :

Définition : Une matrice B est inversible s'il existe une matrice C tel que

$$C \cdot B = \mathrm{I} . \tag{31}$$

Dans ce cas on denote la matrice C par $C = B^{-1}$.

Rémarque : Une matrice *carrée* est inversible si et seulement si sa forme échelonnée est la matrice I.

En utilisant la méthode précédente pour le calcul de M_1 on peut calculer l'inverse de B, car si l'on multiplie $\left(B \,|\mathrm{I}\right)$ par C, on obtient

$$B^{-1} \cdot \left(B \,|\mathrm{I}\right) = \left(B^{-1}B \,\middle|B^{-1}\right) = \left(\mathrm{I} \,\middle|B^{-1}\right) \tag{32}$$

Donc si l'on part de $\left(B \,|\mathrm{I}\right)$ et on trouve son échelonnée reduite par opérations élémentaires, on trouvera forcement $\left(\mathrm{I} \,\middle|B^{-1}\right)$ car l'inverse est unique. En effet, comme l'inverse est unique, la matrice qu'on trouve a droite est toujour B^{-1}, ce procédé ne depend pas des operations élémentaires qu'on fait pour obtenir la forme échellonnée. Dans l'exercice 4 on utilisera cette methode pour calculer la matrice inverse.

Trouvons les matrices M_i qui ont servi pour trouver la forme échellonnée reduite de $\widetilde{A}_i$:

– Pour la matrice $\widetilde{A}_2$ on trouve :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\left\{\begin{smallmatrix} \ell_1-\ell_2 & = \ell_1' \\ \ell_2 & = \ell_2' \\ \ell_3 & = \ell_3' \end{smallmatrix}\right.} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/8 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}}_{\left\{\begin{smallmatrix} \ell_1 & = \ell_1' \\ -\ell_2/8 & = \ell_2' \\ \ell_3-\ell_2/2 & = \ell_3' \end{smallmatrix}\right.} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\left\{\begin{smallmatrix} \ell_1 & = \ell_1' \\ \ell_2-9\ell_1 & = \ell_2' \\ \ell_3-5\ell_1 & = \ell_3' \end{smallmatrix}\right.} \cdot \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 9 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)}_{\widetilde{A}_2} = \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}_{\widetilde{R}_2} .$$

Dans ce cas la matrice qui a servi pour trouver $\widetilde{R}_2$ est

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/8 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 & 1/8 & 0 \\ 9/8 & -1/8 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} . \tag{33}$$

– Pour la matrice $\widetilde{A}_3$ on trouve :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\left\{\begin{array}{cc} \ell_1 & = \ell'_1 \\ \ell_2 - 7/2\ell_3 & = \ell'_2 \\ 2\ell_3 & = \ell'_3 \end{array}\right.} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\left\{\begin{array}{cc} \ell_1 & = \ell'_1 \\ \ell_2/2 & = \ell'_2 \\ \ell_3 + \ell_2 & = \ell'_3 \end{array}\right.} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7/2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right)}_{\widetilde{A}_3} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)}_{\widetilde{R}_3} .$$

Dans ce cas la matrice qui a servi pour trouver $\widetilde{R}_3$ est

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7/2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} . \tag{34}$$

Comme la matrice R_3 est l'identité, alors la matrice A_3 est inversible. Pour ce qu'on a dit avant, la matrice M_3 est alors égale a A_3^{-1}, car $M_3 \cdot (A_3 \,|\mathrm{I}) = (M_3 A_3 \,| M_3) = (\mathrm{I}\,| M_3)$. En effet on trouve

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7/2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7/2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{I} . \tag{35}$$

– Pour la matrice $\widetilde{A}_4$ on trouve :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{\left\{\begin{array}{cc} \ell_1 & = \ell'_1 \\ \ell_2 + 7/2\ell_3 & = \ell'_2 \\ -3\ell_3 & = \ell'_3 \end{array}\right.} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}}_{\left\{\begin{array}{cc} \ell_1 & = \ell'_1 \\ -\ell_2/3 & = \ell'_2 \\ \ell_3 + 2/3\ell_2 & = \ell'_3 \end{array}\right.} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -3 & -7/2 & 100 \\ 0 & 2 & 2 & 1000 \end{array}\right)}_{\widetilde{A}_4} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 3700 \\ 0 & 0 & 1 & -3200 \end{array}\right)}_{\widetilde{R}_4} .$$

Dans ce cas la matrice qui a servi pour trouver $\widetilde{R}_4$ est

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7/2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} . \tag{36}$$

Comme la matrice R_4 est l'identité, alors la matrice A_4 est inversible. Pour ce qu'on a dit avant, la matrice M_4 est alors égale a A_4^{-1}, car $M_4 \cdot (A_4 \,|\mathrm{I}) = (M_4 A_4 \,| M_4) = (\mathrm{I}\,| M_4)$.

– Pour la matrice $\widetilde{A}_5$ on trouve :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}}_{\left\{\begin{array}{cc} \ell_1 - 1/3\ell_2 & = \ell'_1 \\ 2/3\ell_2 & = \ell'_2 \end{array}\right.} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix}}_{\left\{\begin{array}{cc} \ell_1/2 & = \ell'_1 \\ \ell_2 - 5/2\ell_1 & = \ell'_2 \end{array}\right.} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right)}_{\widetilde{A}_5} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)}_{\widetilde{R}_5} .$$

Dans ce cas la matrice qui a servi pour trouver $\widetilde{R}_5$ est

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 \\ -5/3 & 2/3 \end{pmatrix} . \tag{37}$$

Comme la matrice R_5 n'est pas l'identité, alors pour ce qu'on a dit avant, la matrice M_5 n'est pas unique ! Si l'on avait fait des opérations élémentaires différentes on aurait trouvé, peut etre, une autre matrice M_5.

– Pour la matrice $\widetilde{A}_6$ on trouve :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/200 \end{pmatrix}}_{\begin{cases} \ell_1 & = \ell_1' \\ \ell_2 & = \ell_2' \\ \ell_3/200 & = \ell_3' \end{cases}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2/7 & 0 \\ 0 & 3/7 & 0 \\ 0 & -3/7 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{cases} \ell_1 - 2/7\ell_2 & = \ell_1' \\ 3/7\ell_2 & = \ell_2' \\ \ell_3 - 3/7\ell_2 & = \ell_3' \end{cases}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{cases} \ell_1/3 & = \ell_1' \\ \ell_2 - 4/3\ell_1 & = \ell_2' \\ \ell_3 & = \ell_3' \end{cases}} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right)}_{\widetilde{A}_6} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\widetilde{R}_6} .$$

Dans ce cas la matrice qui a servi pour trouver $\widetilde{R}_6$ est

$$M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/200 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2/7 & 0 \\ 0 & 3/7 & 0 \\ 0 & -3/7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 & -2/7 & 0 \\ -4/7 & 3/7 & 0 \\ 1/350 & -3/1400 & 1/200 \end{pmatrix} . \tag{38}$$

Comme la matrice R_6 n'est pas l'identité, alors pour ce qu'on a dit avant, la matrice M_6 n'est pas unique.

Exercice 3.
On a

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -10 \\ 21 & 21 & -42 \\ 11 & 11 & -22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 9 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{39}$$

$$= \begin{pmatrix} 5+9\cdot5-5\cdot10 & 5+5-10 & -2\cdot5-2\cdot5+2\cdot10 \\ 21+9\cdot21-5\cdot42 & 21+21-42 & -2\cdot21-2\cdot21+2\cdot42 \\ 11+9\cdot11-5\cdot22 & 11+11-22 & -2\cdot11-2\cdot11+2\cdot22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

Calculons A_2^4 :

$$A_2^4 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 9 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 9 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & -16 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 9 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 9 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & -16 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

Calculons A_3^3 :

$$A_3^3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7/2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7/2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7/2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7/2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

Comme $A_3^3 = 1$, on voit alors que $A_3^2 \cdot A_3 = 1$, alors que A_3^2 est l'inverse de A_3. Mais $A_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7/2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A_4$.

Exercice 4. La méthode de Gauss pour le calcul de l'inverse d'une matrice B consiste à reduire en forme echelonnée reduite la grand matrice $(B|\,\mathrm{I}\,)$ en faisant, comme d'habitude, des opérations élémentaires sur les lignes. L'inverse de B est la matrice qui se trouve "de l'autre coté du miroir" dans la forme echelonnée reduite $(\,\mathrm{I}\,|B^{-1})$.

Trouvons par exemple l'inverse de $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & -1 & 1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \tag{43}$$

En effet la matrice $\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ est bien l'inverse de B_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{44}$$

Pour les inverses des matrices $B_2, \cdots, B_6$ on trouve :

$$B_2 : \quad \left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{smallmatrix}\right) \tag{45}$$

$$B_3 : \quad \left(\begin{smallmatrix}1&1&0\\10&1&0\\1&1&1\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}-1/9&1/9&0\\10/9&-1/9&0\\-1&0&1\end{smallmatrix}\right) \tag{46}$$

$$B_4 : \quad \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\4&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}0&1/4&0\\1/2&-1/8&-3/2\\0&0&1\end{smallmatrix}\right) \tag{47}$$

$$B_5 : \quad \left(\begin{smallmatrix}1&1&0&0\\2&1&0&1\\1&1&1&2\\0&0&0&1\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}-1&1&0&-1\\2&-1&0&1\\-1&0&1&-2\\0&0&0&1\end{smallmatrix}\right) \tag{48}$$

$$B_6 : \quad \left(\begin{smallmatrix}2&0&0&0\\2&0&0&1\\2&0&1&2\\2&1&1&1\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1/2&0&0&0\\-1&1&-1&1\\1&-2&1&0\\-1&1&0&0\end{smallmatrix}\right) \tag{49}$$

Si A et B sont deux matrices inversibles du même ordre, alors l'inverse de $A \cdot B$ est

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \, . \tag{50}$$

(Ici il faut faire attention car $B^{-1} \cdot A^{-1} \neq A^{-1} \cdot B^{-1}$).

Donc l'inverse de $B_1 \cdot B_2$ est

$$B_2^{-1} \cdot B_1^{-1} = \begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1/2&1/2\\3/2&-1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/2&-3/2\\-3/2&1\end{pmatrix} \tag{51}$$

en effet $B_1 \cdot B_2 = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\3&1\end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}4&6\\6&10\end{smallmatrix}\right)$, donc la matrice $\begin{pmatrix}5/2&-3/2\\-3/2&1\end{pmatrix}$ est bien l'inverse de $B_1 B_2$, car

$$\begin{pmatrix}5/2&-3/2\\-3/2&1\end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix}4&6\\6&10\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) \, . \tag{52}$$

On calcule de la meme façon les autres produits.

Exercice 7. Comme l'exercice demande de trouver les matrices qui servent pour trouver la forme réduite, alors cette fois on travaille directement avec les grands matrices :

- <u>Système (S_7) :</u>

$$(S_7) : \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\3&4&5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\a\end{pmatrix} \tag{53}$$

On trouve

$$\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&2&3\\3&4&5\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1\\4\\a\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right) \sim \begin{smallmatrix}\ell_1\\ \ell_2-\ell_1\\ \ell_3-3\ell_1\end{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&1&2\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1\\3\\a-3\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-3&0&1\end{smallmatrix}\right) \sim \begin{smallmatrix}\ell_1-\ell_2\\ \ell_2\\ \ell_3-\ell_2\end{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}-2\\3\\a-6\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}2&-1&0\\-1&1&0\\-2&-1&1\end{smallmatrix}\right)$$

Si $a \neq 6$, alors $rg(A_7) = 2 < 3 = rg(\widetilde{A}_7)$, et le système est impossible.

Si $a = 6$, alors $rg(A_7) = 2 = rg(\widetilde{A}_7)$. Le nombre de colonnes du système est égal à 3, le rang est 2, donc les dimensions ont pour dimension 1. En effet les solutions sont

$$\left\{\begin{smallmatrix}x = & z-2\\ y = & -2z+3\end{smallmatrix}\right. \, , \tag{54}$$

les solutions sont "parametrées" par un "paramètre", et celuici est z. La matrice qui a servi pour trouver la forme échelonnée reduite est la matrice qui est "de l'autre coté du miroir" :

$$\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&0\\-2&-1&1\end{pmatrix} \, . \tag{55}$$

• Système (S_8) :

$$(S_8) : \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & (a-1) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \tag{56}$$

On trouve

$$\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & a-1 & a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a+1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2-a\ell_1 \\ \ell_3-\ell_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & -1 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

À ce point il y a deux cas : $a = 1$ et $a \neq 1$.

• Si $a = 1$ alors la matrice précedente est

$$\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \ell_1+\ell_2 \\ -\ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \ell_1-\ell_3 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{57}$$

Donc, si $a = 1$, alors le rang de la matrice du système est égal à 2, alors que le rang de la matrice augmentée est égal à 3 : $rg(A_8) = 2 < 3 = rg(\widetilde{A}_8)$. Dans ce cas le système est impossible. La matrice qui a servi pour trouver la forme echelonnée réduite est $M_8 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• Si $a \neq 1$, alors on peut diviser par $a - 1$ et l'on a :

$$\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & -1 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \ell_1-\frac{a}{1-a}\ell_3 \\ \ell_3/(1-a) \\ \ell_2-(1+a)\ell_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1-a-a^2}{1-a} & 1+\frac{a}{1-a} & 0 & \frac{-a}{1-a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{1-a} & \frac{-1}{1-a} & 0 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 & -1 & -a(1+a) & 1 & 1 & -(1+a) \end{array}\right) \tag{58}$$

$$\sim \begin{array}{c} \ell_1+\ell_3 \\ \ell_2 \\ -\ell_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1-2a-a^2+a^3}{1-a} & \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{1-a} & \underbrace{\begin{matrix} \frac{a-2}{a-1} & 1 & \frac{a^2-a-1}{1-a} \\ \frac{1}{a-1} & 0 & \frac{1}{1-a} \\ -1 & -1 & (1+a) \end{matrix}}_{M_8} \\ 0 & 0 & 1 & a(1+a) & \end{array}\right) \tag{59}$$

On a $rg(A_8) = 3$, donc aussi $rg(\widetilde{A}_8) = 3$ car on a toujours l'inegalité

$$rg(A) \leq rg(\widetilde{A}) \leq \text{ nombre de lignes de } A. \tag{60}$$

Donc, comme le nombre de linges est égale à 3, et comme $rg(A_8) = 3$, alors on a forcement $rg(A_8) = 3$, pour tout valeur de a différents de 1. Ce type de raisonnement peut sembler un peu stupite ici car on voit immediatement que $rg(\widetilde{A}_8) = 3$, mais ce sera utile dans la suite du curs. En effet on apprendrà a calculer les rangs sans resoudre le systèmes.

Pour tout valeurs de a, différents de 1, le sistème (S_8) a alors une solution unique donnée par

$$\begin{cases} x = & \frac{1-2a-a^2+a^3}{1-a} \\ y = & \frac{a}{1-a} \\ z = & a(1+a) \end{cases} \tag{61}$$

La matrice qui a servi pour passer à la forme échelonnée réduitte est M_8.

• Système (S_9) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2-3\ell_1 \\ \ell_3-2\ell_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -12 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & a-6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{62}$$

$$\sim \begin{array}{c} \ell_1-\ell_2/3 \\ \ell_2/3 \\ \ell_3-2\ell_2/3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 5 & 17/3 & 2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -8/3 & -1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-\frac{2}{3} & 0 & -2/3 & 1 \end{array}\right) \tag{63}$$

On a $rg(A_9) = 2$ et

$$rg(\widetilde{A}_9) = \begin{cases} 2 \text{ si } a=2/3 \\ 3 \text{ si } a\neq 2/3 \end{cases} . \tag{64}$$

Donc, si $a = 2/3$ il y a des solutions et l'éspace des solutions est de dimension 1. Dans ce cas les solutions sont données par

$$\begin{cases} x = 17/3-5z \\ y = -8/3+4z \end{cases} . \tag{65}$$

Par contre si $a \neq 2/3$, alors il n'y a pas de solution et le sistème est imposible car $rg(A_9) = 2 < 3 = rg(\widetilde{A}_9)$.

• Système (S_{10}) :
Première réduction :

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ b & a & 1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \sim \begin{smallmatrix} \ell_1 \\ \ell_2-a\ell_1 \\ \ell_3-b\ell_1 \end{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1-a^2 & b(1-a) \\ 0 & a(1-b) & 1-b^2 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \tag{66}$$

Le prochain passage on necessite de diviser la ligne 2 par $1-a^2 = (1+a)(1-a)$. Donc nous devons étudier d'abord les cas $a = 1$ et $a = -1$.
• Si $a = 1$, alors

$$(66) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-b & 1-b^2 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \tag{67}$$

$$\sim \begin{smallmatrix} \ell_1 \\ \ell_3 \\ \ell_2 \end{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1-b & 1-b^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \tag{68}$$

Ici la prochaine reduction nécessite de diviser la ligne 2 par $1-b$, il faut d'abord discuter le cas $b = 1$:
• Si $a = 1$ et $b = 1$, alors

$$(66) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \tag{69}$$

Dans ce cas $rg(A_{10}) = 1 = rg(\widetilde{A}_{10})$. Donc l'espace des solutios est de dimension 2. Les solutions sont

$$\{ x=-y-z \tag{70}$$

La matrice qui a servi pour passer à la forme échelonnée réduitte est

$$M_{10} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right). \tag{71}$$

• Nous venons de discuter le cas $b = 1$, nous pouvons maintenant supposer que $a = 1$ et $b \neq 1$, dans ce cas on peut diviser par $b - 1$ et on trouve

$$(68) \sim \begin{smallmatrix} \ell_1-\ell_2/(1-b) \\ \ell_2/(1-b) \\ \ell_3 \end{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1+b \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1+b/(1-b) & 0 & -1/(1-b) \\ -b/(1-b) & 0 & 1/(1-b) \\ -1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \tag{72}$$

Dans ce cas on trouve $rg(A_{10}) = 2 = rg(\widetilde{A}_{10})$, donc l'éspace des solutions à dimension 1, et les solutions sont

$$\begin{cases} x = z \\ y = -(b+1)z \end{cases} \tag{73}$$

La matrice qui a servi pour passer à la forme échelonnée réduitte est

$$M_{10} = \begin{pmatrix} 1+b/(1-b) & 0 & -1/(1-b) \\ -b/(1-b) & 0 & 1/(1-b) \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{74}$$

• Nous venons de discuter complètement le cas $a = 1$. Il nous reste a voire le cas $a = -1$. On trouve

$$(66) \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -1 & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & 1-b^2 & 0 & -b & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{75}$$

$$\sim \quad \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_3 \\ \ell_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -1 & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & 1-b^2 & 0 & -b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2b & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \tag{76}$$

• Étudions d'abord le cas special $a = -1$ et $b = 1$, on trouve

$$(76) \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \tag{77}$$

$$\sim \quad \begin{array}{c} \ell_1-\ell_3 \\ \ell_3 \\ \ell_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{78}$$

dans ce cas $rg(A_{10}) = 2 = rg(\widetilde{A}_{10})$, donc l'éspace des solutions est de dimension 1. Les solutions sont données par

$$\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \tag{79}$$

La matrice qui a servi pour arriver à la forme réduitte

$$M_{10} := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{80}$$

• Nous venons de discuter le cas ($a = -1$ et $b = 1$), il nous reste à voir le cas ($a = -1$ et $b \neq 1$). On trouve

$$(68) \quad \sim \quad \begin{array}{c} \ell_1+\ell_2/(b-1) \\ \ell_2/(b-1) \\ \ell_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1-b/(b-1) & 0 & 1/(b-1) \\ 0 & 1 & -(1+b) & 0 & -b/(b-1) & 0 & 1/(b-1) \\ 0 & 0 & 2b & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \tag{81}$$

dans ce cas nous sommes obbligé de discuter deux cases $b = 0$ et $b \neq 0$. Si $b = 0$, alors $rg(A_{10}) = 2 = rg(\widetilde{A}_{10})$, donc l'éspace des solutions est de dimension 1 et les solutions sont $\{ \begin{smallmatrix} x = z \\ y = z \end{smallmatrix}$ La matrice qui a servi pour trouver la forme echelonnée réduitte est $M_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si par contre $a = -1$ et $b \neq 0, 1$, alors on voit que $rg(A_{10}) = rg(\widetilde{A}_10) = 3$. Il y a une unique soulution. On trouve

$$(81) \sim \begin{array}{c} \ell_1+\ell_3/2b \\ \ell_2+\frac{(1+b)}{2b}\ell_3 \\ \ell_3/2b \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b+1}{2b(b-1)} & \frac{1}{2b} & \frac{1}{b-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-2b^2+1+b}{2b(b-1)} & \frac{1+b}{2b} & \frac{1}{b-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2b & 1/2b & 0 \end{array}\right) \tag{82}$$

Donc la solution est $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$. La matrice qui a servi pour trouver la forme échelonnée réduitte est

$$\begin{pmatrix} -\frac{b+1}{2b(b-1)} & \frac{1}{2b} & \frac{1}{b-1} \\ \frac{-2b^2+1+b}{2b(b-1)} & \frac{1+b}{2b} & \frac{1}{b-1} \\ 1/2b & 1/2b & 0 \end{pmatrix}. \tag{83}$$

• Nous venons de étudier complètement les cas speciales $a = 1$ et $a = -1$. Nous pouvons maintenant étudier le cas $a \neq 1, -1$. On trouve

$$\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & a & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & b(1-a) & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & a(1-b) & 1-b^2 & 0 & -b & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \tag{84}$$

$$\sim \begin{array}{c} \ell_1 - \frac{a}{1-a^2}\ell_2 \\ \ell_2/1-a^2 \\ \ell_3 - \frac{a(1-b)}{1-a^2}\ell_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & \frac{b}{1+a} & 0 & \frac{1}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{b}{1+a} & 0 & \frac{-a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+b+a)(1-b)}{1+a} & 0 & -b+\frac{a}{1+a}(b^2-b) & \frac{-a(1-b)}{1-a^2} & 1 \end{array}\right) \tag{85}$$

les cas speciales à étudier sont $b = 1$ et $1 + a + b = 0$.

• Si $a \neq 1, -1$, mais $b = 1$, alors

$$(85) \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{1+a} & 0 & \frac{1}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{1+a} & 0 & \frac{-a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{86}$$

dans ce cas $rg(A_{10}) = rg(\widetilde{A}_{10}) = 2$. Les solutions ont dimension 1 et sont données par

$$\begin{cases} x = \frac{-z}{1+a} \\ y = \frac{-z}{1+a} \end{cases}. \tag{87}$$

La matrice qui a servi pour trouver la forme échelonnée réduitte est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} & 0 \\ \frac{-a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{88}$$

• Si $a \neq 1, -1$, mais $(1 + b + a) = 0$, alors

$$(85) \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{-a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2-a+1 & \frac{-a(2+a)}{1-a^2} & 1 \end{array}\right) \tag{89}$$

dans ce cas $rg(A_{10}) = rg(\widetilde{A}_{10}) = 2$. Les solutions ont dimension 1 et sont données par

$$\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}. \tag{90}$$

La matrice qui a servi pour trouver la forme échelonnée réduitte est

$$M_{10} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a^2} & \frac{-a}{1-a^2} & 0 \\ \frac{-a}{1-a^2} & \frac{1}{1-a^2} & 0 \\ a^2-a+1 & \frac{-a(2+a)}{1-a^2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{91}$$

Nous venons d'étudier les cases $b = 1$ et $(1 + a + b) = 0$, nous pouvons maintenat le cas général $a \neq 1, -1$ et $b \neq 1$ et $(1 + a + b) \neq 0$. On trouve

$$(85) \sim \begin{array}{c} \ell_1 - \frac{b(1+a)}{(1+a)(1-b)(1+a+b)}\ell_3 \\ \ell_2 - \frac{b}{(1-b)(1+b+a)}\ell_3 \\ \frac{(1+a)}{(1-b)(1+b+a)}\ell_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & M_{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \end{array}\right) \tag{92}$$

où M_{10} est la matrice

$$M_{10} := \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a^2} - \frac{b(-b-ab+a(b^2-b))}{(1+a)(1+a+b)(1-b)} & \frac{-ab(1-b)+a(1+a+b)(1-b)}{(a^2-1)(1+a+b)(1-b)} & \frac{-b}{(1+a+b)(1-b)} \\ \frac{-a}{(1-a^2)} - \frac{b(-b-ab+a(b^2-b))}{(1+a)(1+a+b)(1-b)} & \frac{-ab(1-b)-(1+a+b)(1-b)}{(a^2-1)(1+a+b)(1-b)} & \frac{-b}{(1+a+b)(1-b)} \\ \frac{-b-ab+a(b^2-b)}{(1+a+b)(1-b)} & \frac{a(1-b)}{(a-1)(1+a+b)(1-b)} & \frac{(1+a)}{(1+a+b)(1-b)} \end{pmatrix} \tag{93}$$

L'unique solution est donnée par $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Pour clarté donnons le résumé de la discussion du sistème (S_{10}) :

			$rg(A_{10})$	$rg(\widetilde{A}_{10})$	dim. Sol.	Sol.
$a=1$	$b=1$		1	1	2	$x=-y-z$
	$b\neq 1$		2	2	1	$\begin{cases} x = z \\ y = -(1+b)z \end{cases}$
$a=-1$	$b=1$		2	2	1	$\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$
	$b\neq 1$	$b=0$	2	2	1	$\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$
		$b\neq 0$	3	3	0	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
$a\neq 1,-1$	$b=1$		2	2	1	$\begin{cases} x = -\frac{1}{a+1}z \\ y = -\frac{1}{a+1}z \end{cases}$
	$1+a+b=0$		2	2	1	$\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$
	$1+a+b\neq 0$ et $b\neq 1$		3	3	0	$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

• Système (S_{11}) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 1-a & a+2 & 1 & 0 & 0 \\ 1+a & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -a & 3 & a+2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2-(1+a)\ell_1 \\ \ell_3-2\ell_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 1-a & a+2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(a+2) & a^2+1 & -(a+2)(a+1) & -(a+1) & 1 & 0 \\ 0 & -(a+2) & 2a+1 & -(a+2) & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (94)$$

• Etudions le cas particulier $a=-2$. On trouve

$$(94) \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \ell_1-3\ell_2/5 \\ \ell_2/5 \\ \ell_3+3\ell_2/5 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7/5 & 3/5 & 1 \end{array}\right) \quad (95)$$

Dans ce cas $rg(A_{11})=2$ et $rg(\widetilde{A}_{11})=3$, le système est donc impossible.

• Nous venons de décrire complètement le cas $a=-2$, supposons donc maintenant que $a\neq -2$. On trouve

$$(94) \quad \sim \quad \begin{array}{c} \ell_1+\ell_2/(a+2) \\ -\ell_2/(a+2) \\ \ell_3-\ell_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & \frac{3-a}{a+2} & 1 & 1/(a+2) & \frac{1}{a+2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a^2+1}{a+2} & 1+a & (1+a)/(a+2) & -1/(a+2) & 0 \\ 0 & 0 & a(2-a) & a(a+2) & a-1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad (96)$$

Nous devons discuter les cas $a=0$ et $a=2$.

• Si $a=0$, on a

$$(96) = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad (97)$$

donc si $a=0$ on a $rg(A_{11})=2=rg(\widetilde{A}_{11})$. Les solutions ont dimension 1 et sont données par $\begin{cases} x = 1-3z/2 \\ y = 1+z/2 \end{cases}$.

Supposons maintenant $a=2$, alors on a

$$(96) = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 1/4 & 1 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -5/4 & 3 & 3/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad (98)$$

Donc le système est impossible dans ce cas.

• Nous avons traité les cas $a=0$ et $a=2$. Supposons donc $a\neq 0,2,-2$. On trouve

$$(96) \sim \begin{array}{c} \ell_1-\frac{3-a}{a+2}\ell_2/a(2-a) \\ \ell_2+\frac{(a^2+1)\ell_3}{a(a+2)(2-a)} \\ \ell_3/a(2-a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{(a-2)} & \frac{2a-3}{a(a+2)(a-2)} & \frac{-a^2+a+3}{a(a+2)(2-a)} & -\frac{3-a}{a(a+2)(2-a)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3+a}{2-a} & \frac{3a-1}{a(a+2)(2-a)} & \frac{1+2a}{a(a+2)(a-2)} & \frac{a^2+1}{a(a+2)(2-a)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+2}{2-a} & \frac{a-1}{a(2-a)} & -\frac{1}{a(2-a)} & \frac{1}{a(2-a)} \end{array}\right) \quad (99)$$

Dans ce cas $rg(A_{11})=3$ donc il y a une solution unique donnée par

$$\begin{cases} x = \frac{1}{(a-2)} \\ y = \frac{3+a}{2-a} \\ z = \frac{a+2}{2-a} \end{cases} \tag{100}$$

• <u>Système (S_{12}) :</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} a & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2-a & b-1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \ell_3 \\ \ell_2-\ell_3 \\ \ell_1-a\ell_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 2-a & b-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & a-1 & a-b+1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & 1-2a+a^2 & 1+a-ab & 1 & 0 & -a \end{array}\right) \tag{101}$$

• Etudions le cas particulier $a=1$. On trouve

$$(101) = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 1 & b-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \tag{102}$$

• Donc si $a=1$ et $b=2$ on a $rg(A_{12})=1=rg(\widetilde{A}_{12})$, donc les solutions ont dimension 2 et sont données par

$$x = 1-y-z\ . \tag{103}$$

• Si par contre $a=1$ et $b\neq 2$ on a $rg(A_{12})=1$ et $rg(\widetilde{A}_{12})=2$, donc le système est impossible.

• Nous venons de décrire complètement le cas $a=1$, supposons donc maintenant que $a\neq 1$. On trouve

$$(101) \sim \begin{array}{c} \ell_1-\ell_2/(a-1) \\ \ell_2/(a-1) \\ \ell_3+\ell_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 1-a & \frac{a(b-1)}{a-1} & 0 & -1/(a-1) & \frac{a}{a-1} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{a-b+1}{a-1} & 0 & 1/(a-1) & -1/(a-1) \\ 0 & 0 & a^2-a & 2+2a-ab-b & 1 & 1 & -a-1 \end{array}\right) \tag{104}$$

• Si $a=0$, on a

$$(101) = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & b-1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \tag{105}$$

• Dans ce cas si $a=0$ et $b=2$, alors $rg(A_{12})=2=rg(\widetilde{A}_{12})$, les solutions ont dimension 1 et sont données par $\begin{cases} x = -z \\ y = 1-z \end{cases}$.

• Dans ce cas si $a=0$ et $b\neq 2$, alors $rg(A_{12})=2$ et $rg(\widetilde{A}_{12})=3$. Donc le système est impossible dans ce cas.

• Nous avons traité les cas $a=1$ et $a=0$. Supposons donc $a\neq 0,1$. On trouve

$$(101) \sim \begin{array}{c} \ell_1-\ell_2/(a-1) \\ \ell_2/(a-1) \\ \ell_3+\ell_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{(b-2)}{a(a-1)} & 1/a & -1/a(a-1) & \frac{1}{a(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a^2-a-2+b}{a(a-1)} & -1/a(a-1) & 1/a & 1/a(a-1) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2+2a-ab-b}{a(a-1)} & 1/a(a-1) & 1/a(a-1) & -\frac{a+1}{a(a-1)} \end{array}\right) \tag{106}$$

Dans ce cas $rg(A_{12})=3$ donc il y a une solution unique donnée par

$$\begin{cases} x = \frac{b-2}{a(a-1)} \\ y = \frac{a^2-a-2+b}{a(a-1)} \\ z = \frac{2-2a-ab-b}{a(a-1)} \end{cases} \tag{107}$$

Resumé :

			$rg(A_{12})$	$rg(\widetilde{A}_{12})$	dim. Sol.	Sol.
$a = 1$	$b = 2$		1	1	2	$x = -y - z$
	$b \neq 2$		1	2	$--$	$--$
$a \neq 1$	$a = 0$	$b = 2$	2	2	1	$\begin{cases} x = -z \\ y = 1-z \end{cases}$
		$b \neq 2$	2	3	$--$	$--$
	$a \neq 0, 1$		3	3	0	$\begin{cases} x = \frac{b-2}{a(a-1)} \\ y = \frac{a^2-a-2+b}{a(a-1)} \\ z = \frac{2-2a-ab-b}{a(a-1)} \end{cases}$