Université Paris VI
Pierre et Marie Curie

LM120
PCME24

Feuille d'exercice n° 1.

Exercice 1. Donner la réprésentation exponentielle des nombres complexes suivants :

$$\pm 1\ , \quad \pm i\ , \quad \pm 2i\ , \quad \pm 3 \pm 4i\ , \quad \pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}\ .$$

Exercice 2. Trouver les 2 racines carrées de chaque nombre trouvé. Exprimer ces racines sous la forme $a + ib$.

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes :

1. $z^2 = 1\ , \quad z^3 = 1\ , \quad z^4 = 1\ , \quad z^5 = 1 \quad ;$
2. $z^2 - 6z + 25 = 0 \quad ;$
3. $\sqrt{2} \cdot z^2 - 4z + \sqrt{2} \cdot 4 = 0 \quad ;$
4. $z^2 - (1+i)z + i = 0 \quad ;$
5. $z^2 - (6+5i)z + (2+14i) = 0 \quad .$

Exercice 4. Soit ω le nombre complexe $\omega = e^{2i\pi/7}$. On pose

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A & = & \omega + \omega^2 + \omega^4, \\ B & = & \omega^3 + \omega^5 + \omega^6. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que $A + B = -1$.
2. Calculer AB.
3. En déduire que $A = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et que $B = \frac{-1-\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 5. Résoudre cette équation en posant $z = a + ib$

$$z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0.$$

Exercice 6. Calculer en forme cartésienne les nombres

$$(1+i)^{100}\ , \quad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}\ .$$

Exercice 7. Démontrer les égalités :

$$(\cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7))\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(1+i) \quad = \quad \sqrt{2}(\cos(5\pi/84) + i\sin(5\pi/84))\ , \tag{1}$$

$$(1-i)(\cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5))(\sqrt{3} - i) \quad = \quad 2\sqrt{2}(\cos(13\pi/60) - i\sin(13\pi/60))\ , \tag{2}$$

Exercice 8. Soit $z := e^{2i\pi/5}$. Démontrer que $z + \frac{1}{z}$ est racine du polynome

$$X^2 + X - 1 = 0\ . \tag{3}$$

Exercice 9. Résoudre les équations $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ et $z^4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

Exercice 1. On rappelle (cf.[Dre, prop.5,ch.1]) que tout nombre complexe $z = a + ib$ peut s'écrire de manière unique comme

$$a + ib = \rho \cdot e^{i\theta} \tag{4}$$

avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Le nombre ρ s'appelle le *module* de z, il est indiqué aussi par $|z|$ et le nombre θ s'appelle l'*argument* de z, il est indiqué par $\arg(z)$:

$$\rho = |z| \; , \qquad \theta = \arg(z) \; . \tag{5}$$

• Si $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, de manière générale on a

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \; . \tag{6}$$

La détérmination de θ est un peu plus delicate.

$$\theta \quad = \quad \begin{cases} \arctan(b/a) \\ \text{ ou} \\ \arctan(b/a) + \pi \end{cases} , \quad (\text{ si } a \neq 0 \;) \; , \tag{7}$$

$$\theta \quad = \quad \begin{cases} \pi/2 & \text{si } b > 0 \\ \\ 3\pi/2 & \text{si } b < 0 \end{cases} , \quad (\text{ si } a = 0 \;) \; . \tag{8}$$

On rappelle que $\tan(\theta) = \tan(\theta + \pi)$, dans les calculs il faudra alors faire très attention à prendre la bonne valeur de θ parmi $\arctan(b/a)$ et $\arctan(b/a) + \pi$. Si il l'est demandé, en remplaçant θ par $\theta + 2\pi$, on peut trouver θ qui vérifie $0 \leq \theta < 2\pi$.

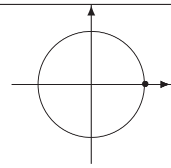
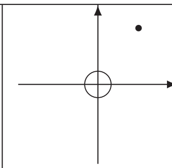
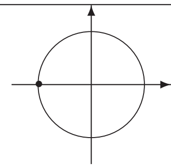
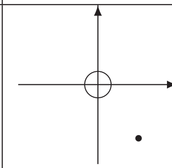
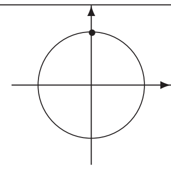
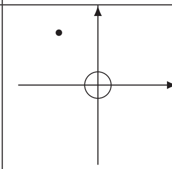
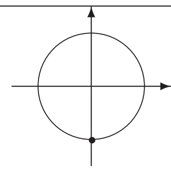
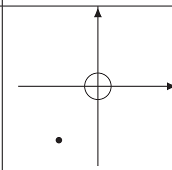
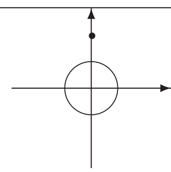
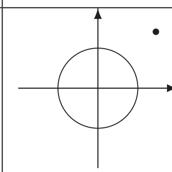
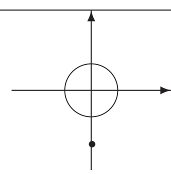
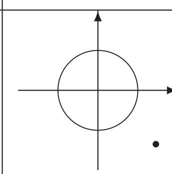
• Réciproquement pour rétrouver a et b à partir de $\rho \geq 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$ on a les formules

$$a = \rho \cdot \cos(\theta) \; , \qquad b = \rho \cdot \sin(\theta) \tag{9}$$

de sorte que

$$a + ib = \rho \cdot e^{i\theta} = \rho \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \; . \tag{10}$$

En particulier pour $\rho = 1$ et $z = e^{i\theta}$, on trouve $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

z	ρ	θ	$z=\rho\cdot e^{i\theta}$	position	z	ρ	θ	$z=\rho\cdot e^{i\theta}$	position
1	1	0	$1=1e^{i0}$		$3+i4$	5		$\begin{cases}\theta = \arctan(4/3)\\ 3+i4=5e^{i\arctan(4/3)}\end{cases}$	
-1	1	π	$-1=e^{i\pi}$		$3-i4$	5		$\begin{cases}\theta = \arctan(4/3)+2\pi\\ 3-i4=5e^{i(\arctan(4/3)+2\pi)}\end{cases}$	
i	1	$\pi/2$	$i=e^{i\pi/2}$		$-3+i4$	5		$\begin{cases}\theta = \arctan(-4/3)+\pi\\ -3+i4=5e^{i(\arctan(-4/3)+\pi)}\end{cases}$	
$-i$	1		$-i=e^{\frac{3i\pi}{2}}$		$-3-i4$	5		$\begin{cases}\theta = \arctan(4/3)+\pi\\ -3-i4=5e^{i(\arctan(4/3)+\pi)}\end{cases}$	
$2i$	2	$\pi/2$	$i=2e^{i\pi/2}$		$\sqrt{2}+i\sqrt{2}$	2	$\pi/4$	$\sqrt{2}+i\sqrt{2}=$ $2e^{i\pi/4}$	
$-2i$	2	$3\pi/2$	$-i=2e^{\frac{3i\pi}{2}}$		$\sqrt{2}-i\sqrt{2}$	2	$7\pi/4$	$\sqrt{2}-i\sqrt{2}=$ $2e^{\frac{7i\pi}{4}}$	

Exercice 2. Un nombre complexe $z=x+iy$ est une racine de $a+ib$ si l'on a

$$z^2 = a+ib\ .$$

C'est à dire $(x^2-y^2)+2ixy = a+ib$, ce qui donne

$$\begin{cases} x^2-y^2 = a\\ 2xy = b\ . \end{cases} \tag{11}$$

Les racines carrées d'un nombre complexe $a+ib$ sont toujours 2.

• Si $z = x+iy$ est une racine *carrée* de $a+ib$, alors l'autre racine est $-z=-x-iy$.

Quand l'on écrit $\sqrt{a+ib}$, on indique par là les *deux* racines de $a+ib$. Donc le sybmbole $\sqrt{z}$ indique *en même temps* deux nombres. Il est utilisé par abus de langage. Parfois l'on écrit aussi $\pm\sqrt{z}$.

• Pour calculer x et y à partir de a et b il y a éssentiellement 2 méthodes :

Première méthode : On transforme $a+ib$ dans la forme $a+ib=\rho\cdot e^{i\theta}$, avec $\rho \geq 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Puis on a

$$z=\sqrt{a+ib}=\sqrt{\rho\cdot e^{i\theta}}=\begin{cases}\sqrt{\rho}\cdot e^{i\theta/2}\\ \sqrt{\rho}\cdot e^{i(\pi+\theta/2)}\end{cases} \tag{12}$$

Si l'exercice le demande, il faut retrouver x et y à partir de ρ et θ par la formule (9).

Deuxième méthode (moins conseillée, à utiliser seulement en cas de echec de la première methode) : On essaye de résoudre l'équation $z^2=a+ib$. On a $(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i2xy$, donc pour trouver x et y il faut résoudre le système du second degré

$$\begin{cases}x^2-y^2=a\\ 2xy=b\ .\end{cases} \tag{13}$$

Il y a deux cas : $b=0$ et $b\neq 0$.

• Si $b=0$, alors $z=\pm\sqrt{a}$ et $a\in\mathbb{R}$, donc

$$z=\begin{cases}\pm\sqrt{a} & \text{si } a>0\ ,\\ \pm i\sqrt{-a} & \text{si } a<0\ ,\\ 0 & \text{si } a=0\ .\end{cases} \tag{14}$$

• Nous supposerons donc, depuis maintenant, que $b\neq 0$. On a $y\neq 0$ par la deuxième équation de (13). Comme $y\neq 0$, la seconde équation de (13) donne $x=b/2y$. Et la première donne donc

$$y^4+ay^2-b^2/4=0\ . \tag{15}$$

On pose $t=y^2$. Les solutions de l'équation $t^2+at-b^2/4=0$ sont données par

$$t=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2} \tag{16}$$

elle sont donc réelles. De plus comme l'on a supposé que $b\neq 0$, alors $\sqrt{a^2+b^2}>\pm a$, et donc

$$\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}>0\ ,\qquad \frac{-a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}<0 \tag{17}$$

La valeur $\frac{-a-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ est parasite, il ne faut pas en tenir compte. Enfin on trouve donc :

$$y=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\quad ,\qquad x=b/2y\ . \tag{18}$$

Donc

$$z=\pm\left(\sqrt{\frac{2b^2}{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}\ +\ i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)\ . \tag{19}$$

(Il est sous-intendu que les racines carrées qui apparaissent dans cette formule sont toujours des racines *positives* de nombres réels *positifs*).

• *Résultats de l'exercice 2* : Dans l'encadré qui suit, la racine est z : on a donc $z = x + iy = \rho \cdot e^{i\theta}$, et $z^2 = a + ib$.

$a+ib$	$z = x+iy$	$z = \rho \cdot e^{i\theta}$
1	$\begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} e^{i0} \\ e^{i\pi} \end{cases}$
-1	$\begin{cases} i \\ -i \end{cases}$	$\begin{cases} e^{i\pi/2} \\ e^{3i\pi/2} \end{cases}$
i	$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} e^{i\pi/4} \\ -e^{i\pi/4} = e^{5i\pi/4} \end{cases}$
$-i$	$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} e^{3i\pi/4} \\ -e^{3i\pi/4} = e^{-i\pi/4} = e^{7i\pi/4} \end{cases}$
$2i$	$\begin{cases} 1+i \\ -1-i \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4} \\ \sqrt{2} \cdot e^{5i\pi/4} \end{cases}$
$-2i$	$\begin{cases} -1+i \\ 1-i \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot e^{3i\pi/4} \\ \sqrt{2} \cdot e^{7i\pi/4} \end{cases}$
$3+i4$	$\begin{cases} 2+i \\ -2-i \end{cases}$ (2−ème méthode)	$\begin{cases} \sqrt{5} \cdot e^{i\arctan(1/2)} \\ \sqrt{5} \cdot e^{i(\arctan(1/2)+\pi)} \end{cases}$
$3-i4$	$\begin{cases} -2+i \\ 2-i \end{cases}$ (2−ème méthode)	$\begin{cases} \sqrt{5} \cdot e^{i\arctan(-1/2)+\pi} \\ \sqrt{5} \cdot e^{i(\arctan(-1/2)+2\pi)} \end{cases}$
$-3+i4$	$\begin{cases} 1+2i \\ -1-2i \end{cases}$ (2−ème méthode)	$\begin{cases} \sqrt{5} \cdot e^{i\arctan(2)} \\ \sqrt{5} \cdot e^{i(\arctan(2)+\pi)} \end{cases}$
$-3-i4$	$\begin{cases} -1+2i \\ 1-2i \end{cases}$ (2−ème méthode)	$\begin{cases} \sqrt{5} \cdot e^{i\arctan(-2)+\pi} \\ \sqrt{5} \cdot e^{i\arctan(-2)+2\pi} \end{cases}$
$\sqrt{2}+i\sqrt{2}$	$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot (\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)) \\ \sqrt{2} \cdot (\cos(9\pi/8) + i\sin(9\pi/8)) \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/8} \\ \sqrt{2} \cdot e^{9i\pi/8} \end{cases}$
$\sqrt{2}-i\sqrt{2}$	$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot (\cos(7\pi/8) + i\sin(7\pi/8)) \\ \sqrt{2} \cdot (\cos(15\pi/8) + i\sin(15\pi/8)) \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot e^{7i\pi/8} \\ \sqrt{2} \cdot e^{15i\pi/8} \end{cases}$
$-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$	$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot (\cos(3\pi/8) + i\sin(3\pi/8)) \\ \sqrt{2} \cdot (\cos(11\pi/8) + i\sin(11\pi/8)) \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot e^{3i\pi/8} \\ \sqrt{2} \cdot e^{11i\pi/8} \end{cases}$
$-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$	$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot (\cos(5\pi/8) + i\sin(5\pi/8)) \\ \sqrt{2} \cdot (\cos(13\pi/8) + i\sin(13\pi/8)) \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot e^{5i\pi/8} \\ \sqrt{2} \cdot e^{13i\pi/8} \end{cases}$

Exercice 3. 3.1.– Racines de l'unité : Les racines de l'équations $z^n = 1$ sont appellées *racines* $n-$ièmes de l'unité. Il y en a n différéntes. Ce sont les nombres complexes de la forme

$$1,\ e^{2i\pi/n},\ e^{4i\pi/n}, \cdots, e^{(n-1)2i\pi/n}\ . \tag{20}$$

Si l'on pose $\omega_n := e^{2i\pi/n}$, alors toutes les autres racines sont de la forme ω_n^k pour $k = 0, \ldots, n-1$ (pour $k = n$ on trouve $\omega_n^n = 1$). On verra dans l'exercice 4 d'autres propriétées remarquables des racines de 1.

Équations de degré deux : Une équation (algèbrique) de degré 2 est une écriture de la forme

$$az^2 + bz + c = 0\ \ , \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{C}\ ,\ a \neq 0. \tag{21}$$

On cherche les nombres complexes z qui vérifient cette egalité. Ces nombres s'appellent *racines* de l'équation et il y en a toujours deux. Il sont donnés par la formule

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ . \tag{22}$$

Pour la résoudre il faut savoir calculer les racines carrées des nombres complexes (voir exercice 2).

• Équations de degré deux à coefficients réels : En générale, le calcul de la racine carrée d'un nombre complexe est compliqué, et l'on essaye de l'éviter. Si les nombres a, b, c sont réels, i.e. $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors il y a une méthode plus simple que le calcul (22).

Supposons que $a, b, c \in \mathbb{R}$ soient réels, et que $a = 1$ (ce qui n'est pas restrictif, car on peut diviser le tout par a, dans l'équation (21)). Soit $\Delta := b^2 - 4ac$, alors deux cas se présséntent

$$\Delta \geq 0 \ , \qquad \Delta < 0 \tag{23}$$

Si $\Delta \geq 0$ alors le calcul (22) n'est pas compliqué. Supposons donc que $\Delta < 0$, alors :

A. Si $z_1 = x + iy$ est une racine de l'équation, alors l'autre racine est $z_2 = x - iy$.

B. Comme $z^2 + bz + c = (z - z_1)(z - z_2)$, alors on a

$$b = \ -(z_1 + z_2) = -2x \ , \qquad c = z_1 \cdot z_2 = x^2 + y^2 \ . \tag{24}$$

• On trouve

$$x \ = \ -b/2 \tag{25}$$

$$y \ = \ \pm\sqrt{c - \frac{b^2}{4}} \tag{26}$$

Comme $\Delta < 0$, le nombre réel $c - \frac{b^2}{4}$ est toujours positif et $\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}$ est donc facile à calculer.

Solutions des exercices 3.2 et 3.3 :

3.2.– L'équation est $z^2 + 6Z + 25 = 0$. On a $b = -6$, $c = 25$. Donc par les formules (25), on trouve $x = 3$ et $y = \pm 4$. Donc

$$z = 3 \pm i4 \ .$$

3.3.– L'équation est $\sqrt{2} \cdot z^2 - 4z + \sqrt{2} \cdot 4 = 0$. On divise par $a = \sqrt{2}$ (!) et on a alors $b = -2\sqrt{2}$, $c = 4$. Donc par les formules (25) on trouve $x = \sqrt{2}$ et $y = \pm\sqrt{2}$. Donc

$$z = \sqrt{2} \pm i\sqrt{2} \ .$$

Solutions des exercices 3.4 et 3.5 : Comme les équations ne sont pas a coéfficients réels, il faut utiliser la formule générale (22) :

3.4.– L'équation est $z^2 - (1+i)z + i = 0$. On a alors $b = -(1+i)$, $c = i$. Donc $b^2 - 4ac = (1+i)^2 - 4i = 1 + 2i + i^2 - 4i = 2i - 4i = -2i$. On sait par l'exercice 1 que les racines carrées de $-2i$ sont $1-i$ et $-1+i$. Donc on trouve

$$z = \frac{1 + i \pm (1-i)}{2} = \begin{cases} 1 \\ i \end{cases}$$

3.5.– L'équation est $z^2 - (6+5i)z + (2+14i) = 0$. On a alors $b = -(6+5i)$, $c = 1+14i$. Donc $b^2 - 4ac = (6+5i)^2 - 4(1+14i) = 36 + 60i + 25i^2 - 4 - 56i = 3 + 4i$. On sait par l'exercice 1 que les racines carrées de $3 + 4i$ (avec la deuxième méthode) sont $\pm(2+i)$. Donc on trouve

$$z = \frac{6 + 5i \pm (2+i)}{2} = \begin{cases} 4 + 3i \\ 2 + 2i \end{cases} .$$

Exercice 4. Propriétés des racines de l'unité : Soit

$$\omega_n = e^{2i\pi/n}$$

la racine $n-$eme primitive de l'unité. L'équation $z^n - 1 = 0$ a pour racines les éléments $1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$, donc on a

$$(z-1)(z-\omega_n)(z-\omega_n^2)\cdots(z-\omega_n^{n-1}) = z^n - 1 . \tag{27}$$

Ce qui donne les deux relations fondamentales sur les racines de l'unité :

$$1 + \omega_n + \omega_n^2 + \cdots + \omega_n^{n-1} = 0 , \tag{28}$$

$$\omega_n \cdot \omega_n^2 \cdot \omega_n^3 \cdots \omega_n^{n-1} = (-1)^{n-1} . \tag{29}$$

Solution de l'exercice 4 : Pour simplifier les notations, posons $\omega := \omega_7 = e^{2i\pi/7}$.

1. Si on calcule $A + B$, on obtient :

$$A + B = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6$$

   Donc par la relation fondamentale (28) on trouve $A + B = -1$.

2. Si maintenant nous calculons AB, on obtient, en utilisant le fait que $\omega^7 = 1$, et donc que $\omega^8 = \omega$,$\omega^9 = \omega^2$ et $\omega^{10} = \omega^3$:

$$\begin{aligned} AB &= (\omega + \omega^2 + \omega^4)(\omega^3 + \omega^5 + \omega^6) \\ &= \omega^4\omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10} \\ &= \omega^4 + \omega^6 + 1 + \omega^5 + 1 + \omega + 1 + \omega^2 + \omega^3 \\ &= 3 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 3 + A + B = 2. \end{aligned}$$

3. On en déduit donc que A et B sont les racines du polynôme $X^2 + X + 2$. Le discriminant de ce polynôme s'écrit $\Delta = 1 - 8 = -7$. Ces racines s'écrivent donc

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}, \quad \beta = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}.$$

   Pour savoir si A est égal à α ou β, on calcule sa partie imaginaire : $Im(A) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$. Or $\sin\frac{8\pi}{7} = \sin\pi + \frac{\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$. Donc, comme la fonction sinus est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et que $\sin \frac{4\pi}{7} \geq 0$ puisque $\frac{4\pi}{7} \in [0, \pi]$, on en déduit :

$$Im(A) \geq \sin \frac{4\pi}{7} \geq 0.$$

On ne peut donc pas avor $A = \beta$, et donc

$$A = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}, \quad B = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}.$$

Exercice 5. L'équation $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$ n'est pas algèbrique. On ne peut pas appliquer les méthodes d'avant. On pose donc $z = a + ib$, et l'équation $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$ est équivalente à :

$$a^2 - b^2 - 2a + 1 + i(2ab + 2b) = 0. \tag{30}$$

et donc elle est équivalente au système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - 2a + 1 & = & 0 \\ 2b(a+1) & = & 0 \,. \end{cases} \tag{31}$$

Ceci est un systeme d'équations algèbriques dans les deux variables réelles a et b. On cherche donc les nombres réels a et b qui sont solutions du système (31).

Si un produit de deux nombres est égal à 0, c'est que l'un de ces deux est égal à 0. La deuxième équation donne alors deux cas possibles :

$$\begin{cases} a & = & -1 \\ b & = & \text{arbitraire} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a & = & \text{arbitraire} \\ b & = & 0 \end{cases} \,. \tag{32}$$

Traitons donc séparément chaque cas :

Premier cas : $a = -1$. Dans ce cas, la première équation s'écrit alors $b^2 = 4$, ce qui équivaut à $b = \pm 2$. On trouve don comme solutions $z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = -1 - 2i$.

Deuxième cas : $b = 0$. Dans ce cas, la première équation devient $a^2 - 2a + 1 = 0$, c'est à dire $a = 1$.

Dans ce cas il y a une seule solution $z_3 = 1$.

On trouve donc trois solutions en tout :

$$z_1 = -1 + 2i \,, \quad z_2 = -1 - 2i \,, \quad z_3 = 1 \,. \tag{33}$$

Exercice 6. On a

$$(1+i)^{100} = (\sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4})^{100} = 2^{50} e^{i\pi 100/4} = 2^{50} e^{i\pi 25} = 2^{50} e^{i\pi} = -2^{50} \,. \tag{34}$$

et

$$(1+i)^9 = (\sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4})^9 = 2^{9/2} e^{i\pi 9/4} = 2^{9/2} e^{i\pi/4} \,, \tag{35}$$

$$(1-i)^7 = (\sqrt{2} \cdot e^{-i\pi/4})^7 = 2^{7/2} e^{-i\pi 7/4} = 2^{7/2} e^{i\pi/4} \,, \tag{36}$$

$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = 2^{(9-7)/2} = 2 \,. \tag{37}$$

Exercice 7. On a

$$(\cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7)) \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \cdot (1+i) = e^{i\pi/7} \cdot e^{-i\pi/3} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4} \quad (38)$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^{i\pi \frac{3\cdot4-7\cdot4+7\cdot3}{84}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi \frac{5}{84}} \quad (39)$$

$$= \sqrt{2} \cdot (\cos(5\pi/84) + i\sin(5\pi/84)) \,. \quad (40)$$

Encore :

$$(1-i)(\cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5)) \cdot (\sqrt{3} - i) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \cdot e^{i\pi/5} \cdot 2 \cdot e^{-i\pi/6} \quad (41)$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot e^{i\pi \frac{-15+12-10}{60}} = 2\sqrt{2} \cdot e^{-i\pi \frac{13}{60}} \quad (42)$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot (\cos(-13\pi/60) + i\sin(-13\pi/60)) \quad (43)$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot (\cos(13\pi/60) - i\sin(13\pi/60)) \,. \quad (44)$$

Exercice 8. On a

$$(z + \frac{1}{z})^2 + (z + \frac{1}{z}) - 1 = (z^2 + \frac{1}{z^2} + 2) + (z + \frac{1}{z}) - 1 \quad (45)$$

$$= 1 + z + z^2 + z^{-2} + z^{-1} \quad (46)$$

comme $z^5 = 1$, alors $z^4 \cdot z = 1$, donc $z^4 = z^{-1}$. Egalement $z^{-2} = z^3$ donc on trouve

$$1 + z + z^2 + z^{-2} + z^{-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0 \,.$$

Exercice 9.

Pour trouver toutes les racines de l'équation $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$, nous posons $y = z^2$. Nous allons alors calculer les deux racines, y_1 et y_2, de l'équation $y^2 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$, puis pour chaque racine carrée trouvée nous calculerons $z^2 = y_1$ et $z^2 = y_2$.

Dans ce cas particulier, il est commode de travailler avec la première méthode car les nombres $1 - i$ et $1 + i\sqrt{3}$ ont une expression simple : $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ et $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$, on trouve $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-i7\pi/12}$. Donc

$$y = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot e^{-i7\pi/24} \\ -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot e^{-i7\pi/24} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot e^{i\pi 17/24} \end{cases} \quad (47)$$

Maintenant on il faut trouver les racines de l'équation $z^2 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot e^{-i7\pi/24}$ et de l'équation $z^2 = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot e^{-i7\pi/24}$. Il faut faire attention car dans ce dernier cas $-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ est un nombre negatif ! Pour cette raison on transforme $-1 = e^{i\pi}$ et donc $-\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot e^{-i7\pi/24} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot e^{i\pi(1-7/24)} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot e^{i\pi 17/24}$. Donc

$$z = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[8]{2}} \cdot e^{i7\pi/48} \\ -\frac{1}{\sqrt[8]{2}} \cdot e^{i7\pi/48} \end{cases} , \qquad z = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[8]{2}} \cdot e^{i\pi 31/48} \\ -\frac{1}{\sqrt[8]{2}} \cdot e^{i\pi 31/48} \end{cases} . \quad (48)$$

• On procede de la même façon pour l'équation $z^4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$. On pose $y = z^2$. De plus on a $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{-i\pi/3}} = e^{2i\pi/3}$. Donc

$$y = \begin{cases} e^{i\pi/3} \\ -e^{i\pi/3} = e^{4i\pi/3} \end{cases} . \quad (49)$$

Pour finir

$$z = \begin{cases} e^{i\pi/6} \\ -e^{i\pi/6} \end{cases}, \qquad z = \begin{cases} e^{2i\pi/3} \\ -e^{2i\pi/3} \end{cases}. \tag{50}$$

Références

[Dre] Hervé Le Dret. Notes de cours L1—MATH120. 3 janvier 2005. http ://www.ann.jussieu.fr/%7Esmets/lm120/MATH120final.pdf.