# Memento des critères de convergence pour les séries de nombres réelles

## Table des matières



## 1 Notations et notions générales

Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels. Par la suite on utilisera les notations récurrentes suivantes

- On note

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

| $a_n$ | $S_n$ |
|---|---|
| $a_0$ | $a_0$ |
| $a_1$ | $a_0 + a_1$ |
| $a_2$ | $a_0 + a_1 + a_2$ |
| $a_3$ | $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ |

- Le $n$-ème **terme général de la série** est $a_n$.
- La **suite des termes généraux** est la suite $(a_n)_n$.
- La **série** est la suite $(S_n)_n$.
- La **$n$-ème somme partielle de la série** est $S_n$.
- La **série converge** si la suite $(S_n)_n$ converge vers un nombre réel (c'est à dire si elle a une limite fini).
- La **série diverge** si la suite $(S_n)_n$ n'a pas de limite ou si cette limite est $\pm\infty$.
- La **nature de la série** est le fait qu'elle converge ou pas. La nature de la série est convergente si la série converge, la nature est divergente si elle diverge. Deux séries ont même nature si les deux convergent au même temps ou si les deux divergent.
- Le **caractère de la série** est sa nature. On parle de caractère convergent (ou divergent) d'une série.
- La **somme de la série** (si elle existe) est

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \;=\; \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n \;.$$

- **Notation pour la série** : on met des parenthèses

$$(\sum_n a_n) \quad \text{ou} \quad (\sum_{n\geq 0} a_n) \quad \text{ou} \quad (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$$

- **Notation pour la somme de la série** : sans parenthèses

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

- Attention au fait que ces deux dernières notations ne sont pas utilisés dans les livres de mathématique. D'habitude on utilise le même symbole $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ pour indiquer *au même temps la série et sa somme*. Cela engendre une incohérence de notations, toutefois on comprends si l'on parle de la série ou de sa somme à partir du contexte. Par exemple si l'on dit "*montrer que* $\sum_n a_n$ *converge*", il est clair qu'on demande de démontrer que la suite $(S_n)_n$ converge. Si l'on demande "*calculer la somme de la série* $\sum_{n\geq 0} a_n$", il est clair qu'on sous-entend que la série $(S_n)_n$ converge et qu'on demande à calculer sa limite. Il est possible que de tels ambiguïtés soient présentes en TD et dans la cours.

# 2 Séries à connaitre par coeur.

## 2.1 Séries de Riemann.

Une **série de Riemann** est une série de la forme

$$(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s})$$

avec $s \in \mathbb{R}$.

- Si $s > 1$, alors $(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s})$ converge.
- Si $s \leq 1$, alors $(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s})$ diverge.

## 2.2 Séries géométriques.

Une **série géométrique** est une série de la forme

$$(\sum_{n\geq 0} a^n)$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

- Si $|a| < 1$, alors $(\sum_{n\geq 1} a^n)$ converge.
- Si $|a| \geq 1$, alors $(\sum_{n\geq 1} a^n)$ diverge.

Les séries géométriques sont télescopiques (voir paragraphe 3.1.7) car

$$\begin{aligned}(1-a)S_n &= (1-a)(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n)\\ &= (1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n)-(a+a^2+a^3+\cdots+a^{n+1})\\ &= 1-a^{n+1}\end{aligned}$$

Quand elles convergent, c'est à dire si $|a| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}\,.$$

## 2.3 Séries de type exponentielle.

On dit qu'une série est de type exponentielle, si elle est de la forme

$$(\sum_n \frac{a_n}{n!})$$

où $(a_n)_n$ est une suite telle qu'il existe une constante $C > 0$ telle qu'à partir d'un certain rang $N$, on a $|a_n| \leq C^n$ pour tout $n \geq N$. Ces suites sont absolument convergentes car majorées par une série du type $\sum_n \frac{C^n}{n!}$ (qui converge et sa somme est $e^C$, modulo éventuellement addition d'une constante).

## 2.4 Commentaire.

- Pour $|r| < 1$ et $s > 1$, $C \in \mathbb{R}_{>0}$ on a

$$\frac{C^n}{n!} \ll r^n \ll \frac{1}{n^s}$$

où $\ll$ signifie *négligeable.*[1]

Donc, quand on cherche à majorer $a_n \geq 0$ par les termes d'une série convergente, c'est plus probable d'y réussir avec le terme général $\frac{1}{n^s}$ d'une série de Riemann (voir critère de comparaison au paragraphe 3.2.1).

- Pour $|r| \geq 1$ et $s \leq 1$, on a

$$\frac{1}{n^s} \ll r^n\,.$$

Donc, si l'on cherche à démontrer que notre série diverge, et on cherche à minorer notre $a_n$ par le terme général d'une série divergente, il est encore une fois plus probable d'y arriver avec le terme général $\frac{1}{n^s}$ d'une série de Riemann avec $s \leq 1$.

- Dans tous les cas, il est donc mieux de comparer avec un série de Riemann.

1. Rappelons que si $\exists N, \forall n \geq N\ b_n \neq 0$, alors la suite $(a_n)_n$ est négligeable par rapport à $(b_n)_n$ si $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$.

# 3 CRITERES DE CONVERGENCE

## 3.1 Critères sans nom.

### 3.1.1 Décalage des indices.

Si les termes généraux commencent à partir de $a_3$ au lieu de $a_0$, alors on sous-entend automatiquement que $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ et $S_3 = a_3$, $S_4 = a_3 + a_4$, $S_5 = a_3 + a_4 + a_5$, ...
Cette série a même caractère que la série de terme général $b_n = a_{n+3}$.

| $a_n = b_{n-3}$ | $S_n = a_3 + a_4 + \cdots + a_n$ |
|---|---|
| $a_3 = b_0$ | $S_3 = a_3 = b_0$ |
| $a_4 = b_1$ | $S_4 = a_3 + a_4 = b_0 + b_1$ |
| $a_5 = b_2$ | $S_5 = a_3 + a_4 + a_5 = b_0 + b_1 + b_2$ |
| $\ldots$ | $\ldots$ |

### 3.1.2 Suppression d'un nombre fini de termes généraux.

La série $(\sum_{n\geq 0} a_n)$ converge si, et seulement si, la série $(\sum_{n\geq k} a_n)$ converge.

Autrement dit, on peut supprimer un nombre fini de termes géneraux de la série sans changer la nature de sa convergence. (Attention que la somme de la série change).

Par exemple, pour tout $N \geq 0$, les trois conditions suivantes sont équivalentes

- $(\sum_{n\geq 0} a_n)$ converge
- $(\sum_{n\geq N} a_n)$ converge
- $(\sum_{k\geq 0} a_{N+k})$ converge

### 3.1.3 Somme de deux séries.

- Si $(\sum_n a_n)$ et $(\sum_n b_n)$ convergent, alors $(\sum_n a_n + b_n)$ converge.
- Si $(\sum_n a_n)$ converge et $(\sum_n b_n)$ diverge, alors $(\sum_n a_n + b_n)$ diverge.
- Si $(\sum_n a_n)$ diverge et $(\sum_n b_n)$ diverge, alors on ne peut rien dire.

Concernant le dernier point, on a une information plus précise si les termes sont positifs :

- Si $(\sum_n a_n)$ diverge et $(\sum_n b_n)$ diverge, et si $\exists N$, $\forall n \geq N$, $a_n, b_n \geq 0$ (ou $a_n, b_n \leq 0$), alors $(\sum (a_n + b_n))$ diverge.
- $\sum_n |b_n| + |a_n|$ converge si, et seulement si, $\sum |a_n|$ et $(\sum_n b_n)$ convergent.

### 3.1.4 Multiplication par un scalaire non nul.

Si $r \in \mathbb{R}^*$ alors la série $(\sum_n a_n)$ a même caractère que la série $(\sum_n r \cdot a_n)$.

Autrement dit, si l'on multiplie tous les termes de la série par un scalaire non nul, la série qu'on trouve a même caractère que la série originaire.

### 3.1.5 Critère du terme général infinitésimal.

Si $(a_n)_n$ ne tend pas vers 0, alors $(\sum_n a_n)$ diverge.

### 3.1.6 Convergence absolue.

Si $(\sum_n |a_n|)$ converge, alors $(\sum_n a_n)$ converge.
Dans ce cas on dit que $(\sum_n a_n)$ converge **absolument**.

### 3.1.7 Séries télescopiques.

La notion de série télescopique n'est pas bien précis. Grosso modo, on parle de série est télescopique si la somme $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ peut se calculer explicitement par quelque procédé qui permet de "*simplifier*" la plupart des termes $a_k$.

Par exemple si $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ on a $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$ et

$$\begin{aligned} S_n &= (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\ &= \frac{1}{1} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

ce qui permet de calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_n S_n = \lim_n 1 - \frac{1}{n+1} = 1$.

Les séries géométriques sont télescopiques (voir paragraphe 2.2).

### 3.1.8 Les sommes partielles forment une suite de Cauchy.

Une série $(\sum_n a_n)$ converge si, et seulement si, pour tout $r > 0$ il existe un cran $N_r$ tel que pour tout $n \leq m \geq N_r$ on a

$$|a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \leq r\ .$$

## 3.2 Critères spécifiques pour les séries à termes positifs.

NOTE : Le critères du paragraphe 3.2 s'appliquent aussi aux séries dont les termes sont tous **négatifs** à partir d'un certain cran. En effet, grâce à ce qu'on a dit aux paragraphes 3.1.2 et 3.1.4, on peut supprimer un nombre fini de termes et éventuellement multiplier par $-1$ pour changer le signe des termes restant sans changer le caractère de la série. Pour cette raison, nous allons formuler les critères sans supposer que $a_n$ est positif, nous donnerons des conditions pour sa valeur absolue $|a_n|$ et nous allons utiliser le critère 3.1.6.

### 3.2.1 Critère de comparaison.

Supposons que $\exists N, \forall n \geq N$ on a l'encadrement

$$0 \leq |a_n| \leq b_n$$

alors

- Si $(\sum_n b_n)$ converge, alors $(\sum_n |a_n|)$ et $(\sum_n a_n)$ convergent
- Si $(\sum_n |a_n|)$ diverge, alors $(\sum_n b_n)$ diverge

### 3.2.2 Critère de comparaison faible.

Supposons que

- $\exists N, \forall n \geq N$, $b_n > 0$
- Il existe $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que

$$\lim_n \frac{|a_n|}{b_n} = L$$

Alors

- Si $(\sum_n b_n)$ converge, alors les séries $(\sum_n |a_n|)$ et $(\sum_n a_n)$ convergent ;
- Si $L \neq 0$, les séries $(\sum_n |a_n|)$ et $(\sum_n b_n)$ ont même nature ;
- Si $L = +\infty$ et si $(\sum b_n)$ diverge, alors $(\sum |a_n|)$ diverge.

### 3.2.3 Critère d'Équivalence.

Le critère d'équivalence est une relecture d'un cas spécial de l'équivalence faible.

Supposons que

- $\exists N, \forall n \geq N,\, b_n > 0$
- $\lim_n \frac{|a_n|}{b_n} = L$ et $L > 0$ (**attention à l'inégalité stricte ici**)

alors

- La série $(\sum_n b_n)$ converge si, et seulement si, $(\sum_n |a_n|)$ converge.

Rappelons que si $\exists N, \forall n \geq N\ b_n \neq 0$, alors la suite $(a_n)_n$ est équivalente à $(b_n)_n$ si $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$. L'hypothèse $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = L$ se traduit en disant qu'il existe $L \neq 0$ tel que $a_n \sim L \cdot b_n$.

### 3.2.4 Critère de Riemann (terminologie non standard, méconnue par des enseignants).

- Si on peut trouver $s > 1$ et $L \geq 0$ tels que
$$\lim_n\ n^s \cdot |a_n| = L$$
Alors les séries $(\sum_n |a_n|)$ et $(\sum_n a_n)$ convergent.
- Si on peut trouver $s \leq 1$ et $L > 0$ (**attention à l'inégalité stricte ici**), ou $L = +\infty$, tels que
$$\lim_n n^s \cdot |a_n| = L$$
Alors la série $(\sum_n |a_n|)$ diverge.

La preuve résulte d'une comparaison faible de $a_n$ avec $b_n = \frac{1}{n^s}$.

### 3.2.5 Critère intégrale.

Supposons qu'il existe une constante $a \geq 0$ et une fonction $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$, telle que

- $f$ est continue
- $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq a$
- $f$ est décroissante
- pour tout $n \geq a$ on a $f(n) = |a_n|$

alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes

- $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$ existe dans $\mathbb{R}$ (c'est à dire que c'est différent de $+\infty$) ; [2]
- la série $(\sum_n |a_n|)$ converge.

### 3.2.6 Critère de d'Alembert, ou du rapport.

Supposons que

- Il existe $L \geq 0$ tel que
$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$$

alors

- Si $L < 1$ les séries $(\sum_n |a_n|)$ et $(\sum_n a_n)$ convergent

2. Autrement dit l'intégrale généralisé $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

- Si $L > 1$ la série $(\sum_n |a_n|)$ diverge
- Si $L = 1$ on ne peut rien dire

### 3.2.7 Critère de Cauchy, ou de la racine.

Supposons que
- Il existe $L \geq 0$ tel que
$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

alors

- Si $L < 1$ les séries $(\sum_n |a_n|)$ et $(\sum_n a_n)$ convergent
- Si $L > 1$ la série $(\sum_n |a_n|)$ diverge
- Si $L = 1$ on ne peut rien dire

### 3.2.8 Commentaire (bis).

Les critères de Cauchy et d'Alembert se démontrent par comparaison avec les séries géométriques. Intuitivement, cela ne peut marcher que si $a_n$ tend vers zéro plus vite que $L^n$ ce qui est une condition très forte comme on a vu au paragraphe 2.4. Le plus souvent, cela ne marche pas et il faut plutôt chercher de comparer avec des séries de Riemann comme au paragraphe 3.2.4. On peut en effet démontrer les implications suivantes

$$\boxed{\text{D'Alembert permet de conclure}} \Longrightarrow \boxed{\text{Cauchy permet de conclure}} \Longrightarrow \boxed{\text{Riemann permet de conclure}}$$

Le critère de Riemann au paragraphe 3.2.4 est donc le critère le plus efficace. Toutefois, les critères de d'Alembert et Cauchy sont mieux adaptés à certains séries et permettent de conclure plus rapidement dans une certaine classe de situations.

## 3.3 Critères pour les séries à termes quelconques.

Rappelons que

- Tous les critères listés au paragraphe 3.1 s'appliquent aux séries à termes quelconque.

- Il est utile de vérifier avant tous si la série $(\sum_n |a_n|)$ converge (voir paragraphe 3.1.6), car dans ce cas on peut appliquer tous les critères des séries à termes positifs du paragraphe 3.2.

TERMINOLOGIE : Rappelons que si $(\sum_n |a_n|)$ converge, on dit que la série $(\sum_n a_n)$ **converge absolument**.

### 3.3.1 Critère de Leibniz pour les séries à termes de signe alterné.

On dit qu'une série $\sum_n a_n$ a des **signes alternés** si $\exists N, \forall n \geq N$ on a

$$\text{signe}(a_{n+1}) = -\text{signe}(a_n) \ .$$

Autrement dit, si $(-1)^n a_n$ a signe constant pour tout $n \geq N$.
Supposons que

- la suite $(a_n)_n$ a des signes alternés
- $\exists N, \forall n \geq N$ on a $|a_{n+1}| \leq |a_n|$
- $\lim_n |a_n| = 0$

Alors la série $(\sum_n a_n)$ converge.

EXEMPLE : Ce critère entraine que pour tout $s > 0$ la série $(\sum_n \frac{(-1)^n}{n^s})$ converge.

### 3.3.2 Critère d'Abel.

Supposons que

- $\exists N, \forall n \geq N,\ a_n = u_n \cdot v_n$
- La série $(\sum_{n \geq N} |v_{n+1} - v_n|)$ converge
- $\lim_n v_n = 0$
- Soit $U_n := \sum_{k=0}^{n} u_n$ (somme partielle). Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \geq 0$ on a
$$|U_n| \leq C$$

Alors, la série $(\sum_n a_n)$ converge.

### 3.3.3 Critère d'Abel faible.

Supposons que

- $\exists N, \forall n \geq N,\ a_n = u_n \cdot v_n$
- $\forall n \geq N$,
$$0 \leq v_{n+1} \leq v_n$$
- $\lim_n v_n = 0$
- Soit $U_n := \sum_{k=0}^{n} u_n$ (somme partielle). Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \geq 0$ on a
$$|U_n| \leq C$$

Alors, la série $(\sum_n a_n)$ converge.

### 3.3.4 Sommations par paquets.

Si $0 \leq k < s$, on appelle **paquet** $p_{k,s}$ associé à la série $(\sum_n a_n)$ la somme de tous les termes de la série $p = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{s-1}$. La **taille du paquet** $p_{k,s}$ est $s - k$ (c'est nombre de termes additionnés).

On va repartir la somme infinie $(\sum_n a_n)$ en des paquets *consécutifs* :

$$p_{0,k_1} + p_{k_1,k_2} + p_{k_2,k_3} + \cdots .$$

Supposons que

- la taille des paquets est bornée : c'est à dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $m \geq 0$
$$k_{m+1} - k_m \leq C$$
- $\lim_n a_n = 0$

Alors
$$(\sum_n a_n) \quad \text{converge} \iff (\sum_m p_{k_m,k_{m+1}}) \quad \text{converge}$$

EXEMPLE : La série $(\sum_n \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n})$ est alternée, mais ne vérifie pas la condition de décroissance du critère de Leibniz (cf. paragraphe 3.3.1). Elle ne converge pas absolument, car $|\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}| = \frac{1}{n+(-1)^n} \sim \frac{1}{n}$, la valeur absolue de son terme général est donc équivalente à celui d'une série de Riemann divergente et le critère d'équivalence entraine qu'elle diverge (cf. paragraphe 3.2.3).

En revanche, en faisant des paquets de taille 2 on trouve

$$p_{2m,2m+1} = a_{2m} + a_{2m+1} = \frac{1}{2m+1} + \frac{-1}{2m+1+(-1)} = \frac{-1}{4m^2+2m}$$

qui donne lieu à la série $(-\sum_m \frac{1}{4m^2+2m})$ qui est absolument convergente. En effet, on a $\frac{1}{4m^2+2m} \sim \frac{1}{4m^2}$ et donc le terme général $\frac{1}{4m^2+2m}$ est équivalent à celui d'une série de Riemann convergente et le critère d'équivalence entraine qu'elle est convergente. Donc la série $(\sum_n \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n})$ converge.

### 3.3.5 Développements limités.

Supposons qu'on puisse trouver une fonction $f(x)$ telle que pour tout $n$ on ait une expression du type

$$a_n = f(\frac{1}{n}), \qquad \text{ou} \qquad a_n = f(\frac{1}{\sqrt{n}}), \qquad \text{ou} \qquad a_n = f(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$$

ou une expression analogue. Si $f$ a un DL en 0 on peut l'utiliser pour démontrer la convergence de $(\sum_n a_n)$.

EXEMPLE : Supposons que

$$a_n = \ln\Big(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big)$$

et on se propose de démontrer que $\sum_n a_n$ converge ou pas.[3] On sait que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R(x)$ où $R(x)$ est une fonction négligeable par rapport à $x^3$ :

$$\lim_{x \to 0} \frac{|R(x)|}{x^3} = 0 \,.$$

Si l'on remplace $x$ par $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ on trouve

$$a_n = \Big(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} + R\Big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big) \,.$$

On peut discuter terme à terme la convergence :

- $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le critère de Leibniz ;
- $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge car c'est une série de Riemann d'exposant $s = 1$ ;
- $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^{2/3}}$ converge absolument (voir paragraphe 3.1.6) car $\frac{1}{n^{2/3}}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente car l'exposant est $s = 3/2$ ;
- $\sum_n R\Big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big)$ est une série absolument convergente car

$$\lim_n \frac{\Big|R(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})\Big|}{1/n^{3/2}} = 0$$

  et on peut utiliser le critère de Riemann (voir paragraphe 3.2.4).

En conclusion, comme la somme de séries convergentes est convergente (voir paragraphe 3.1.3), on voit que la série $\sum_n b_n$ avec $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} + R\Big(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big)$ est convergente. Donc $a_n = b_n + \frac{1}{n}$ et la série $\sum_n a_n$ est somme d'une série convergente $\sum_n b_n$ et une série divergente $\sum_n 1/n$. Donc $\sum_n a_n$ diverge (voir encore le paragraphe 3.1.3).

### 3.3.6 Séries de Taylor.

C'est une remarque qui permet parfois de calculer les sommes des séries. Certaines fonctions, dites analytiques, coïncident avec leur développement de Taylor (c'est à dire leur développement limité "*infini*")

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}$$

3. Remarquons que $a_n$ est équivalente à $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et que $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le critère de Leibniz, mais cela ne permet pas de conclure que $\sum_n a_n$ converge car les termes de ces séries ne sont pas de signe positif (voir le critère d'équivalence au paragraphe 3.2.3).

où $f^{(n)}(x)$ est la drivée $n$-ème de $f$. La remarque consiste alors à observer que notre série $\sum_n a_n$ coïncide avec la valeur speciale de $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$ en $x = c$. C'est à dire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $a_n = f^{(n)}(0)\frac{c^n}{n!}$. Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = f(c) \; .$$

EXEMPLE : Considérons $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$. On a $a_n = \frac{1}{n!}$. Alors on voit que c'est la valeur en $x = 1$ de la série exponentielle

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \; .$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \; .$$

EXEMPLE : Considérons $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, on a $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Alors on voit que c'est la valeur en $x = 1$ de la fonction $-\ln(1+x) = -(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots)$. Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2).$$