TD n^o 4 : Intégrales de Riemann

Organisation : les exercices sont divisés en trois catégories : * correspond aux exercices de base, à maîtriser impérativement, ** correspond aux exercices de difficulté moyenne, c'est en gros le niveau requis pour valider l'UE, *** correspond aux exercices plus avancés.

Cette feuille est en grande partie des révisions de L1. Il peut être utile de faire un tableau des primitives usuelles.

*** Définitions à connaître par cœur**

somme de Riemann

*** Propriétés à connaître par cœur**

- linéarité, positivité de l'intégrale
- lien entre intégration et primitive
- formule d'intégration par parties
- formule de changement de variable

Exercice 1. *Des sommes de Riemann

1. Montrer que la suite
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$$
est une suite de sommes de Riemann convergente et déterminer sa limite.

2. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

3. Pour quelle valeur du réel α la suite
$$v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sin \frac{k}{n}$$
est-elle une suite de sommes de Riemann ? Que vaut alors sa limite ? Que se passe-t-il pour les autres valeurs de α dans $]-1, +\infty[$?

4. A l'aide des sommes de Riemann, montrer les équivalents
$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1} \quad (\alpha > 0) \qquad\qquad \sum_{k=n+1}^{2n} \ln k \sim n \ln n\,.$$

Exercice 2. *Rappel de primitives

Pour chacune des intégrales suivantes,

- déterminer les intervalles $[a, b]$ tels que la fonction soit Riemann intégrable sur $[a, b]$,
- calculer alors la valeur de l'intégrale :

1. $\int_a^b t^n \, dt$ avec $n \in \mathbb{N}$
2. $\int_a^b e^{\alpha t} \, dt$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$
3. $\int_a^b \sqrt{t} \, dt$
4. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt$
5. $\int_a^b t^{1/3} \, dt$
6. $\int_a^b \frac{1}{1+t^2} \, dt\,.$

Exercice 3. *Intégration et dérivation

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue.

Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)dt$ est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 4. ** Cas d'égalité

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Donner une CNS sur f pour que $|\int_a^b f(x)dx| = \int_a^b |f(x)|dx$.
2. Même question si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5. **Calcul de primitives

Calculer les primitives des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

$$x \mapsto x^3 \ln x, \qquad x \mapsto e^{-x} \cos x.$$

Exercice 6. *Calcul de primitives de fractions rationnelles

Déterminer des intervalles sur lesquels les fractions rationnelles suivantes sont définies et donner leurs primitives sur ces intervalles :

$$\frac{x^3}{x^2+1}, \ \frac{1}{x(1+x)^2}, \ \frac{1}{4x^2-3x+2}, \ \frac{x^2}{x^4-1}, \ \frac{1}{49-4x^2}, \ \frac{5x-12}{x(x-4)}, \ \frac{x-1}{x^2+x+1}\,.$$

Exercice 7. *Linéarisation de polynômes en sin, cos

Linéariser les polynômes trigonométriques suivants de la variable x, puis en donner des primitives : $\sin^2 x,\ \cos^4 x,\ \sin^2 x \cos^4 x,\ \sin^5 x\,.$

Exercice 8. **Calcul de primitives de fonctions en sin, cos

Calculer les primitives des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$x \mapsto (\sin x)^3, \qquad x \mapsto \dfrac{\sin x}{(2+\cos x)^2}, \qquad x \mapsto \sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{3}, \qquad , x \mapsto \sin^2 x \cos^3 x,$

$x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin^2 x}$ (attention au domaine de définition du changement de variable).

Exercice 9. *Calcul de primitives par changement de variable

Donner des primitives de $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$, $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur des intervalles sur lesquels ces fonctions sont définies (utiliser les changements de variable $x = \sinh u$ ou $x = \cosh u$ ou $x = \sin u$).

Exercice 10. ** Primitive avec fonction exponentielle

1. Montrer qu'une primitive de $x \mapsto P(x)e^{ax}$ où P est un polynôme et a un réel est de la forme $x \mapsto Q(x)e^{ax} + C$ où Q est un polynôme et C une constante.
2. Montrer qu'une primitive de $x \mapsto P(x)\cos \alpha x$ où P est un polynôme et α un réel est de la forme $x \mapsto Q_1(x)\cos \alpha x + Q_2(x)\sin \alpha x + C$ où Q_1, Q_2 sont des polynômes et C une constante.