

TD n° 5 : Intégrales généralisées

Organisation : les exercices sont divisés en trois catégories : * correspond aux exercices de base, à maîtriser impérativement, ** correspond aux exercices de difficulté moyenne, c'est en gros le niveau requis pour valider l'UE, *** correspond aux exercices plus avancés.

* Définitions à connaître par cœur

- Définition de la convergence d'une intégrale généralisée.
- Définition de l'absolue convergence d'une intégrale généralisée.

* Propriétés à connaître par cœur

- Théorèmes de comparaison pour les fonctions positives.
- La convergence absolue entraîne la convergence.

Exercice 1. * Intégration par parties

Déterminer une primitive F de la fonction

$$f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\\ t \mapsto t^2 e^{-t}$$

En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, et déterminer sa valeur.

Exercice 2. * Une fraction rationnelle

1. Calculer pour $X > 0$:

$$I(X) = \int_1^X \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$$

2. Quelle est la limite lorsque $X \rightarrow +\infty$ de $I(X)$? Que peut-on donc dire de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$?

Exercice 3. * Changement de variable

Soit $X \in [0, +\infty[$. Calculer $I(X) = \int_0^X \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$ puis déterminer la limite de $I(X)$ lorsque $X \rightarrow +\infty$.

Exercice 4. ** Nature d'intégrales généralisées

Déterminer la nature de chacune des intégrales généralisées suivantes.

1. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x + e^{-x}} dx$;
2. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x + e^{-x}} dx$;
3. $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x + e^{-x}} dx$;
4. $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2 + 1} dx$;
5. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$;
6. $\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}(x-3)^{2/3}}$;
7. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} e^{-x} dx$;
8. $\int_0^{\infty} (x+2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1}) dx$;
9. $\int_1^{\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}) dx$;
10. $\int_{-4}^{-1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x} dx$;

11. $\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}} dx$;
12. $\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^3} dx$;
13. $\int_1^{\infty} \frac{2 + \sin x + \sin^2 x}{\sqrt[3]{x^4 + x^2}} dx$;
14. $\int_0^2 \frac{\ln x}{1-x} dx$;
15. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Exercice 5. ** Limite et convergence de l'intégrale

1. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue par morceaux telle que $f(t) \rightarrow \ell$ quand $t \rightarrow +\infty$, avec $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ diverge.
2. Donner un exemple de fonction continue par morceaux $g : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ telle que $g(t)$ ne tend pas vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$ et $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge.

Exercice 6. ** Deux équivalents

1. Déterminer la nature des intégrales généralisées $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
2. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. Déterminer sa limite en $+\infty$.
3. Utiliser une intégration par parties pour montrer que $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x}$.
4. Montrer que $f(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\frac{1}{x})$.

Exercice 7. ** Dérivée logarithmique

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ une fonction continue. Pour tout $x \in [0, +\infty[$ on note $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Montrer que les intégrales généralisées $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{F(t)} dt$ ont même nature.

Exercice 8. Tiré de l'examen de rattrapage 2010

Pour tout entier $n \geq 0$ on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos^2 x}{1+x} dx, \quad v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{1+x} dx.$$

1. Calculer $a_n := u_n + v_n$ et vérifier que la série $(\sum_n a_n)$ diverge.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n > 0$ on a

$$|u_n - v_n| \leq \frac{1}{2\pi n^2}.$$

3. Dédire des résultats précédents que $(\sum_n u_n)$ et $(\sum_n v_n)$ sont deux séries divergentes.
4. Si α est un paramètre réel, on pose

$$f_\alpha(x) = \frac{\sin^2 x}{(1+x)^\alpha} \quad \forall x \geq 0.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la fonction f_α est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 9. ** Nature d'intégrales généralisées, cas général

Déterminer la nature de chacune des intégrales généralisées suivantes.

1. $\int_2^{\infty} \frac{\cos x}{\ln(x)} dx;$
2. $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\sin(x-1)}{\ln(x)} dx;$
3. $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx;$
4. $\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{x} dx.$

Exercice 10. *** $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ n'est pas absolument convergente

Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt.$$

1. Déterminer un réel $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}]$, $|\sin(x)| \geq a$.
2. En déduire un réel $b > 0$ tel que $u_n \geq \frac{b}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.
3. En déduire que l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ est divergente.

Exercice 11. *** $\int_0^{+\infty} f(t^\alpha) dt$ pour une fonction périodique de moyenne nulle

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} , périodique, de période 1, et telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$. On rappelle qu'une fonction continue sur un intervalle compact est bornée sur cet intervalle.

1. Montrer que la fonction f est bornée sur \mathbb{R} , et en déduire que la fonction F définie par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ est bornée sur \mathbb{R} .
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ converge pour tout $\alpha \in]0, 1[$.
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t^\alpha) dt$ converge pour tout $\alpha > 1$.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin(\sqrt{t}) dt$ est divergente.

Exercice 12. ** Avec paramètre

1. Étudier suivant les valeurs de α et β la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$.
2. Même question avec $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$.

Exercice 13. ** Astuce

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$ converge.
2. En faisant le changement de variable, $t = \frac{1}{x}$, calculer l'intégrale précédente.

Exercice 14. ** Exercice seconde session 2017

1. Montrer que pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin^2 t = \frac{\tan^2 t}{1+\tan^2 t}$.
Soit $a > -1$.
Montrer en faisant le changement de variable $x = \tan t$ que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+a \sin^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$.
2. Montrer que $\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+a \sin^2 t} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+a \sin^2 t}$.
3. Soit $u_n = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2 t}$ où α est un réel strictement positif.
Montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 2$.
4. Soit $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t}$. Étudier la convergence de la série de terme général v_n .
5. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t}$?

Exercice 15. ** Exercice seconde session 2017

Soit pour n entier, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$.

1. Pour tout n , montrer la convergence de l'intégrale I_n .
2. Après avoir montré que $I_n - I_{n+1} = \int_0^{+\infty} x \frac{x}{(1+x^2)^{n+2}} dx$ et fait une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2(n+1)} I_n$.
3. Pour $n \geq 1$ on pose $u_n = \sqrt{n} I_n$. Montrer que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(1 + \frac{1}{2n}) - \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{1}{n})$.
En utilisant un développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 2, montrer que la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ converge.
En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $I_n \sim \frac{C}{\sqrt{n}}$.

Exercice 16. ** Intégrales de Wallis

Les intégrales de Wallis sont données par $I_n = \int_0^\pi (\sin \theta)^n d\theta$.

1. Montrer que $I_0 = \pi$ et $I_1 = 2$, et que la suite (I_n) est décroissante.
2. Montrer la relation de récurrence $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \pi \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$, $I_{2n+1} = 2 \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.
4. Montrer que $I_{2n} \sim I_{2n+1} \sim I_{2n+2}$, et en déduire que $I_{2n}^2 \sim I_{2n} I_{2n+1} \sim \frac{\pi}{n}$.

Exercice 17. * Un calcul d'intégrale**

On s'intéresse à l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt$ où $[t]$ est la partie entière de t .

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire $\int_1^n \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt$ comme la somme partielle d'une série. En déduire que $\int_1^n \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt$ admet une limite notée I .
2. Pour montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt$ converge, il faut montrer que $\int_1^x \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$. L'étude en une suite particulière ne suffit pas (ex : $\int_0^n \cos(x\pi) dx$).

$$\text{Montrer que } \int_1^x \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt = \int_1^{[x]} \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt + \int_{[x]}^x \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt.$$

$$\text{Montrer que } \left| \int_{[x]}^x \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt \right| \leq \ln \frac{x}{x-1}.$$

$$\text{En déduire que } \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt \text{ converge et que } \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[t]}}{t} dt = I.$$

3. Donner la valeur de I en utilisant les intégrales de Wallis.