TD n$^{\text{o}}$ 3 : Séries à termes quelconques

Organisation : les exercices sont divisés en trois catégories : * correspond aux exercices de base, à maîtriser impérativement, ** correspond aux exercices de difficulté moyenne, c'est en gros le niveau requis pour valider l'UE, *** correspond aux exercices plus avancés.

*** Définitions à connaître par cœur**

— convergence absolue

*** Propriétés à connaître par cœur**

— critère spécial des séries alternées
— séries géométriques convergentes/divergentes, séries de Riemann convergentes/divergentes
— comparaison entre termes généraux et implication sur la convergence/divergence des séries à termes quelconques
— résultat sur la sommation par paquets.

Exercice 1. * Séries alternées

Les séries suivantes vérifient-elles le critère spécial des séries alternées ?

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$,
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$,
5. ** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}$ en fonction de $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. * Convergence absolue

Les séries suivantes convergent-elles absolument ?

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^3}$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{\cos(n)}{n^2}\right)$,
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 3. * Domination ou décomposition

Pour les séries suivantes, dominer ou décomposer leur terme général pour se ramener à des séries connues, et en déduire si elles convergent.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{\cos(n)}{n^2}\right)$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} 1-\sqrt{1-\frac{(-1)^n}{n}}$,
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

Exercice 4. ** Convergence sans indication
Les séries $(\sum_n u_n)$ suivantes convergent-elles ?

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \cos(n)e^{-3n}$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$,
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$,
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{n^2+\cos^2 x}\,dx\right)$,
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sqrt[3]{n+(-1)^n} - \sqrt[3]{n}$,
7. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$,
8. $u_n = \dfrac{1}{n}$ si 3 divise n et $u_n = \dfrac{-1}{8n}$ sinon,
9. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1+(-1)^n n^{\alpha}}{n^{2\alpha}}$, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$,
10. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+a^n}$, en fonction de $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 5. ** Calculs de sommes
Montrer la convergence des séries associées aux sommes suivantes et calculer ces sommes :

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$,
3. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2-4}$,
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$,
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n}$,
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, où $x \in]-1,1[$.

Exercice 6. ** Tiré de l'examen de rattrapage 2021
On souhaite montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

1. Justifier la convergence de la série ci–dessus.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$.
2. Calculer J_0.
3. Montrer que $J_n \to_{n\to\infty} 0$ (on pourra majorer la fonction sous le signe intégrale).
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $J_{n+1} - J_n$.
5. Pour $N \in \mathbb{N}$, en déduire une expression de $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Conclure.

Exercice 7. ** Comparaison série-intégrale

1. Dériver la fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$, et en déduire que la série $\left(\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}\right)$ diverge.
   Montrer qu'on a également $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \sim \ln(\ln n)$.
2. En exploitant une comparaison avec une intégrale, établir $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3}n\sqrt{n}$.

Exercice 8. ** Série à terme général défini par une récurrence Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n$.
Montrer que $u_n \to 0$.
En utilisant $u_{n+1} - u_n$ montrer que la série $\left(\sum u_n^3\right)$ converge.
En utilisant $\ln u_{n+1} - \ln u_n$ montrer que la série $\left(\sum u_n^2\right)$ diverge.
Que peut-on dire de la série $\left(\sum u_n\right)$?

Exercice 9. ** Une série définie par récurrence linéaire
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs vérifiant la relation de récurrence suivante

$$u_{n+2} = \frac{1}{6}(u_{n+1} + u_n) \quad (*)$$

on pose $c = \max(u_0, u_1)$.

1. Montrer par récurrence que $u_n \leq c2^{1-n}$ pour tout $n \geq 2$. En déduire que la série $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge.
2. A l'aide de la propriété $(*)$, trouver une relation entre les sommes $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, $S' = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ et $S'' = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} u_k$.
   En déduire l'expression de S en fonction de u_0 et u_1.

Exercice 10. ** Calcul de $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$
Soit x un nombre réel, avec $|x| < 1$.

1. Montrer que $\left(\displaystyle\sum_n x^n\right)$ et $\left(\displaystyle\sum_n nx^{n-1}\right)$ convergent.
2. Donner des expressions fermées (c'est-à-dire sans signe $\sum$) de $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} nx^{n-1}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$.
4. Calculer les sommes suivantes après avoir justifié la convergence des séries associées :

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left((n-2)3^{-n} + (n-3)2^{-n}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 - 2n)3^{-n}$.

Exercice 11. * Critère d'Abel
Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\left(\sum \frac{\cos(2n)}{2n}\right), \quad \left(\sum \frac{\sin^2 n}{n}\right).$$

Exercice 12. ** Développement en série entière

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I contenant 0, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt\ .$$

2. (a) En déduire en utilisant la fonction exponentielle que :

$$|e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!})| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}.$$

(b) Montrer que, tout $x \in \mathbb{R}$, la série $(\sum \frac{x^n}{n!})$ converge.
Indication : On pourra utiliser la règle de d'Alembert.

(c) Montrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!} = 0.$$

(d) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

3. Pour tout $x \in]-1, 1]$, montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et montrer que sa somme vérifie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \ln(1+x) \ .$$

En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$.

Exercice 13. * Attention à la semi–convergence**

Soit $(\sum u_n)$ une série convergente à termes complexes. Montrer que la série $(\sum \dfrac{u_n}{n})$ converge.