Fiche d'exercices n°4 : fonctions d'une variable réelle

Prenez l'habitude de vérifier systématiquement vos résultats, par exemple avec `www.wolframalpha.com`.

Pour réviser...

Exercice 1. En utilisant les identités remarquables, développer A et factoriser B et C :

$$A(x) = (x+\sqrt{2})^2 - (x+3)(x-3), \quad B(x) = x^2 - 3, \quad C(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

Exercice 2. Réduire les fractions suivantes :

$$F(x) = \frac{2}{4-x} + \frac{1}{x-1} \qquad G(x) = \frac{2}{x(x+1)} - \frac{1}{x} + \frac{4x}{x+1} \qquad H(x) = \frac{3x}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x}{x-1}$$

Exercice 3. Calculer les expressions suivantes (on simplifiera les fractions le plus possible) :

$$A = \frac{2(3x-1)}{4x} \times \frac{1}{4} \times \frac{x^2+x}{3} \quad (\text{pour } x \neq 0) \qquad B = \frac{2(x+3)^2+1}{x-1} + \frac{3x}{x+4} \quad (\text{pour } x \notin \{-4; 1\})$$

Exercice 4. Etudier le signe des expressions suivantes :

$$a) \quad (x^2-1)(x^2-3) \qquad b) \quad \frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad c) \quad \frac{4x^2-x-2}{x+1} + 1 \qquad d) \quad x - \frac{1}{x}$$

Exercice 5. Soit P un polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

1. Montrer que 1 est racine de P
2. Montrer que $P(x) = (x-1)(x^2+5x+6)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
3. Factoriser complètement le polynôme P
4. En faisant un tableau de signe, résoudre l'inéquation $P(x) \leq 0$

Exercice 6. Etudier le signe de $E(x) = (x-3)^2 - (3x+1)^2$, et en déduire le domaine de définition de la fonction $f(x) = \ln\left((x-3)^2 - (3x+1)^2\right)$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(a) \quad x^2 - 2\,x - 3 > 0 \qquad (b) \quad 2\,x^2 - 7\,x + 3 \leq 0 \qquad (c) \quad x^4 + 3\,x^2 - 4 \leq 0$$

Exercice 8. Interpréter graphiquement les (in)équations suivantes, puis les résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(a) \quad |x+3| \geq 1 \qquad (b) \quad 1 < |1-x| \leq 5 \qquad (c) \quad |x+3| = |x-5| \qquad (d) \quad |x+1| = |x^2+x-2|$$

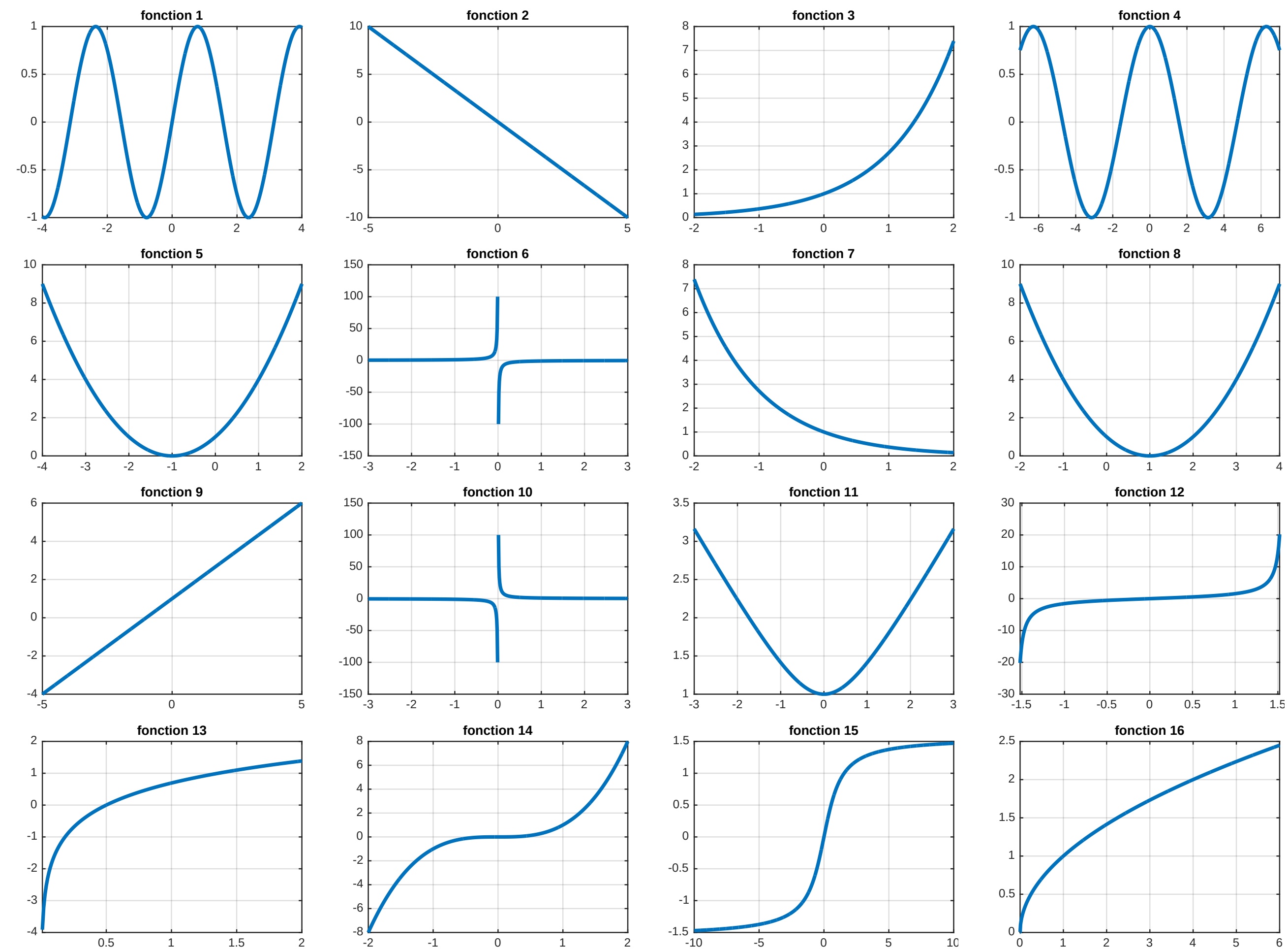
Exercice 9. Soit la fonction $f(x) = |x+1| - |2\,x-1|$

1. Simplifier l'expression de f et tracer sa courbe représentative.
2. En déduire graphiquement (sans calcul ni preuve) les points où f n'est pas dérivable et les solutions de $f(x) \geq \frac{3}{2}$.

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\qquad \sqrt{x+4} \leq x+2$

Exercice 11. Associer les dessins des fonctions aux définitions du tableau ci-dessous.

$A(x) = -2x$		$B(x) = \exp(-x)$		$C(x) = 1/x$		$D(x) = \sqrt{x^2+1}$	
$E(x) = \ln(2x)$		$F(x) = \sin(2x)$		$G(x) = \tan(x)$		$H(x) = (x-1)^2$	
$I(x) = \exp(x)$		$J(x) = -1/x$		$K(x) = x^3$		$L(x) = (x+1)^2$	
$M(x) = \arctan(x)$		$N(x) = \sqrt{x}$		$O(x) = x+1$		$P(x) = \cos(x)$	



Exercice 12. Vrai ou Faux ?

a) $\ln(72) = 2\ln(3)+3\ln(2)$ b) $\ln(0.08) = 3\ln(2)-2\ln(5)$ c) $\ln(0.04) = 2\ln(2)-2\ln(5)-\ln(4)$

d) $e^{72} = (e^6)^{12}$ e) $e^{72} = e^6\, e^{12}$ f) $e^{72} = (e^{36})^2$ g) $e^{72} = e^{36}\, e^2$

Exercice 13. Calculer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ les expressions suivantes :

$$\ln(1.5) \qquad \ln(16) \qquad \ln(\sqrt[3]{9}) \qquad \ln(0.25e) \qquad \ln(2\sqrt{2})$$

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

a) $\ln(1-2x) = \ln(x+2) + \ln(3)$ b) $2e^{2x} - 5e^x = -2$ c) $\ln(2-x) \leq \ln(2x+1) - \ln(3)$

d) $e^{x^2} = 1/2$ e) $e^{x+1} = 2$ f) $(2x-7)\ln(x+2) > 0$

g) $e^{2x} > 3e^x$ h) $e^{x-1} \leq 1$ i) $\dfrac{e^x - 1}{e^{-x/2} - e^{x/2}} = 3$

Exercice 15. Remplir le tableau suivant :

fonction	domaine de définition	dérivée	allure du graphe	remarques diverses (valeurs spéciales, ...)
$f(x) = ax$ (distinguer selon le signe de a)				
$f(x) = x^2$				
$f(x) = x^3$				
$f(x) = \frac{1}{x}$				
$f(x) = \sqrt{x}$				
$f(x) = \sin x$				

fonction	domaine de définition	dérivée	allure du graphe	remarques diverses (valeurs spéciales, ...)
$f(x) = \cos x$				
$f(x) = \tan x$				
$f(x) = \ln x$				
$f(x) = e^x$				

Les différents éléments de l'étude de fonctions...

Exercice 16. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3} \qquad f_2(x) = \frac{-x+2}{2x^2-3x-2} \qquad f_3(x) = \sqrt{\sin x}$$

$$f_4(x) = \ln(x^2+2x-3) \qquad f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}-2x} \qquad f_6(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}}$$

Exercice 17. Déterminer les valeurs du paramètre b pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x+b & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 - bx + 3 & \text{si } x < 1 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} bx^2 - x + 1 & \text{si } x > 1 \\ -bx^2 + 3x + 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Exercice 18. Soit $f(x) = 3x^2 - 5x$.
Calculer la dérivée f' de f, et étudier son signe. En déduire le tableau de variation de f.

Exercice 19. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 3x^2 - 4x + 5$ $\quad f_2(x) = x^n - nx$ $\quad f_3(x) = \dfrac{1}{3x+2}$ $\quad f_4(x) = \dfrac{x-2}{2x+3}$

$f_5(x) = \dfrac{4x^2+x+2}{x^2+x}$ $\quad f_6(x) = \sqrt{x^2-4x}$ $\quad f_7(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad f_8(x) = (x-1)\sqrt{x}$

$f_9(x) = (x(x-2))^{1/3}$ $\quad f_{10}(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ $\quad f_{11}(x) = x\tan x$ $\quad f_{12}(x) = \sqrt{1+\cos x}$

$f_{13}(x) = \sin(3x)$ $\quad f_{14}(x) = \cos(2x) - \sin(2x)$ $\quad f_{15}(x) = x\sin x$ $\quad f_{16}(x) = \cos(x^n)$

$f_{17}(x) = \sin\sqrt{x}$ $\quad f_{18}(x) = \dfrac{1}{e^x+3}$ $\quad f_{19}(x) = e^{3x}$ $\quad f_{20}(x) = e^{x^2}$

$f_{21}(x) = e^{\sin x}$ $\quad f_{22}(x) = e^x\sin(x)$ $\quad f_{23}(x) = e^{\sqrt{x}}$ $\quad f_{24}(x) = \sqrt{e^x+1}$

$f_{25}(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{3x}+1}$ $\quad f_{26}(x) = (x^2+x+1)e^x$ $\quad f_{27}(x) = x\ln x - 1$ $\quad f_{28}(x) = e^{1+\ln x}$

$f_{29}(x) = \sin(\ln x)$ $\quad f_{30}(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ $\quad f_{31}(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$ $\quad f_{32}(x) = \ln(x^2)$

$f_{33}(x) = \ln(1+\sin(x^2))$ $\quad f_{34}(x) = (1+x)^{2x}$ $\quad f_{35}(x) = x^{1+x}$ $\quad f_{36}(x) = (\sin x)^{\cos x}$

Exercice 20. Calculer les dérivées suivantes :

$$(\sin(2x))'' \qquad (\cos(3x))'' \qquad (e^{-2x})'' \qquad (e^{x^2})'' \qquad (\ln(3x))''$$

Exercice 21. Trouver les valeurs des paramètres réels a et b pour lesquelles la fonction f est solution de l'équation différentielle indiquée :

(1) $f(x) = \cos(ax)$ pour $f''(x) + 4f(x) = 0$

(2) $f(x) = 2\sin(ax) + 3\cos(ax)$ pour $f''(x) + f(x) = 0$

(3) $f(x) = e^{ax}$ pour $f''(x) - 4f(x) = 0$

(4) $f(x) = e^{ax}$ pour $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 0$

(5) $f(x) = e^{ax}\cos(bx)$ pour $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

Exercice 22. Pour chacune des limites suivantes, indiquer s'il y a une forme indéterminée (FI) et préciser son type, puis proposer une méthode adaptée pour lever cette FI, et faire le calcul.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(2x+5)$ $\quad$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x^2-5x-2)$ $\quad$ *c)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3-x^2+1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x+1})$ $\quad$ *e)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^3+1})$ $\quad$ *f)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x^2+x+6}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}}$ $\quad$ *h)* $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ $\quad$ *i)* $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{|x|-1}{\sqrt{x}-1}$ $\quad$ *k)* $\displaystyle\lim_{x\to4^+}\frac{\sqrt{x-4}}{x+2}$ $\quad$ *l)* $\displaystyle\lim_{x\to3^-}\frac{|x-3|}{x-3}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to1}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $\quad$ *n)* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{2x}$ $\quad$ *o)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x-1}{2x^2-x-2}$

p) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1})$ $\quad$ *q)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ $\quad$ *r)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

s) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x-1}{3x^3-2x^2-x-2}$ $\quad$ *t)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4+2x-1}{x^4-x-2}$ $\quad$ *u)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-3})$

v) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{x+ax^3}$ $\quad$ *w)* $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-xe^x}{x^2}$ $\quad$ *x)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x+7}$

Exercice 23. Idem exercice précédent :

$a)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$	$b)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$	$c)\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(3x+1)}{2x}$
$d)\ \lim_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x}$	$e)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{x\, e^{\cos x}}{x^2+1}$	$f)\ \lim_{x\to +\infty} (x\ln x - x\ln(x+2))$
$g)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\lvert x\rvert}{x}$	$h)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$	$i)\ \lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$
$j)\ \lim_{x\to +\infty} \dfrac{4x^5+4x^3+x^2}{-3x^2+50x}$	$k)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{4x^5+4x^3+x^2}{-3x^2+50x}$	$l)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+\lvert x\rvert}{x}$
$m)\ \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}$	$n)$	$o)\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln x}$

Exercice 24. Soit la fonction $f(x) = 1 - x - \dfrac{1}{x}$ ayant pour domaine de définition $\mathbb{R}^*$. Déterminer l'équation d'une asymptote oblique à la courbe représentative C_f de f, ainsi que sa position par rapport à C_f.

Exercice 25. Déduire de chacune des limites suivantes (lorsque c'est possible) l'équation d'une asymptote verticale ou horizontale à la courbe représentative de la fonction f.

$(a)\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$	$(b)\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$	$(c)\ \lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$
$(d)\ \lim_{x\to 3} f(x) = 2$	$(e)\ \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = +\infty$	

Exercice 26. On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, et calculer les asymptotes à la courbe représentative de f (si elles existent).

Exercice 27. Etude de la fonction $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est impaire pour réduire son domaine d'étude à $\mathbb{R}^+$.
3. Etudier la limite de f en $+\infty$. En déduire celle en $-\infty$. (au passage : est-ce qu'il n'aurait pas été plus simple de calculer d'abord la limite en $-\infty$, et d'en déduire celle en $+\infty$?)
4. Calculer f' et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative

Exercice 28. Etude de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2 + \ln\dfrac{x-1}{x+1}$.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Etudier les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$. En déduire que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet deux asymptotes verticales, D_1 et D_2.
3. Calculer f' et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ.
6. Tracer $\mathcal{C}_f$, Δ, D_1 et D_2 dans le repère cartésien.

Exercice 29. Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+1} \qquad f_2(x) = \sqrt{x^2-x-6} \qquad f_3(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad f_4(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Exercice 30. Trouver la fonction réciproque de f et calculer sa dérivée :

$$f_1(x) = e^{2x} + 3 \quad \text{de } \mathbb{R} \text{ vers }]3, +\infty[\qquad\qquad f_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{de }]0, +\infty[\text{ vers }]1, +\infty[$$

Pour vous entrainer...

Exercice 31. Simplifier le plus possible les expressions suivantes :

$$C = \frac{\frac{1}{1+x}}{2x} \quad (\text{pour } x \notin \{-1; 0\}) \qquad\qquad D = \frac{\frac{5}{x} - 3}{\frac{2}{x^2}} \quad (\text{pour } x \neq 0)$$

$$E = \frac{x^3 + 3x^2 - x}{x(2x+1)} \quad (\text{pour } x \notin \{-\tfrac{1}{2}; 0\}) \qquad\qquad F = \frac{2x^2 - 12x + 18}{5(x-3)} \quad (\text{pour } x \neq 3)$$

Exercice 32. Etudier le signe des expressions suivantes :

$$a) \quad -x^2 + 4x - 1 \qquad b) \quad 5x^2 - 3 \qquad c) \quad (x-3)^2 - (3x+1)^2 \qquad d) \quad 5x - 6 + x^2$$

Exercice 33. Etudier le signe de $\left(-3x^2 + 8x + 3\right)(x-5)$ et en déduire le domaine de définition de

$$f(x) = \frac{\sqrt{(-3x^2 + 8x + 3)(x-5)}}{x-2}$$

Exercice 34. Etudier le signe de $\dfrac{2x^2 - x - 4}{x-1}$ et en déduire le domaine de définition de

$$g(x) = \ln\left(\frac{2x^2 - x - 4}{x-1}\right)$$

Exercice 35. Déterminer les valeurs du paramètre b pour que la fonction g soit continue sur $\mathbb{R}$.

$$g_1(x) = \begin{cases} bx + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ bx^3 + 2x - 3 & \text{si } x < 1 \end{cases} \qquad\qquad g_2(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + x + b & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - x - 2b & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Exercice 36. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = (x^2 + 3x + 1)^3 \qquad f_2(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} \qquad f_3(x) = 1 + \left(\frac{1}{1 - x^2}\right)^3$$

Exercice 37. Etudier le signe de $E(x) = 10x - 6 + x^2$ et utiliser ce résultat pour dresser le tableau de variation de la fonction $g(x) = 5x^2 - 6x + \dfrac{1}{3}x^3$.

Exercice 38. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad f_2(x) = \frac{1-x}{x+3} \qquad f_3(x) = \frac{x}{x^2 + 3x + 1} \qquad f_4(x) = (x^2 - x)^{1/3}$$

$$f_5(x) = \sqrt{3x+4} \qquad f_6(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad f_7(x) = \sin(3x) + 2\cos(3x) \qquad f_8(x) = \frac{1}{1 + \cos^2 x}$$

$$f_9(x) = e^{-7x} \qquad f_{10}(x) = e^{\cos x} \qquad f_{11}(x) = \frac{e^{-x}}{e^{2x} + 1} \qquad f_{12}(x) = e^{2x}\cos(3x)$$

$$f_{13}(x) = \ln(\ln x) \qquad f_{14}(x) = \ln(\cos x) \qquad f_{15}(x) = x^x \qquad f_{16}(x) = x^{\ln x}$$

Exercice 39. Trouver les valeurs des paramètres réels a et b pour lesquelles la fonction f est solution de l'équation différentielle indiquée :

(1) $f(x) = \sin(ax)$ pour $f''(x) + 9f(x) = 0$
(2) $f(x) = e^{ax}$ pour $f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0$
(3) $f(x) = xe^{ax}$ pour $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 0$
(4) $f(x) = e^{ax}\sin(bx)$ pour $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

Exercice 40. Pour chacune des limites suivantes, indiquer s'il y a une forme indéterminée (FI) et préciser son type, puis proposer une méthode adaptée pour lever cette FI, et faire le calcul.

$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ $b)$ $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ $c)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$

$d)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$ $e)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ $f)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x-3x^2}$

$g)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x+1}$ $h)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+1)(x-1)}{x^2+2}$ $i)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

$j)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{x^2+1}}$ $k)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$ $l)$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$

$m)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x+\sin x}$ $n)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{\sin x}$ $o)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\cos x}{\sin x}$

$p)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ $q)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2)-\cos x}{x^2}$ $r)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3+1}$

$s)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$ $t)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ $u)$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$

Exercice 41. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, et calculer les asymptotes à la courbe représentative de f (si elles existent).

$$f_1(x) = \frac{x^2-3}{x+1} \qquad f_2(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1} \qquad f_3(x) = \frac{2x^3-x}{x^2+1} \qquad f_4(x) = \sqrt{x^2+3x}$$

$$f_5(x) = \sqrt{4x^2+x} \qquad f_6(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$

Exercice 42. Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x+2+\frac{4}{x-2} \qquad f_2(x) = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} \qquad f_3(x) = \frac{x^2-2x+5}{x-1}$$

Exercice 43. Trouver la fonction réciproque de f et calculer sa dérivée :

$f_1(x) = e^x + 1$ de $\mathbb{R}$ vers $]1, +\infty[$ $f_2(x) = e^{-7x} + 1$ de $\mathbb{R}$ vers $]1, +\infty[$

Pour aller plus loin...

Exercice 44. Déterminer les valeurs du paramètre b pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x > 0 \\ x+b & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2} & \text{si } x > 2 \\ x^2-x+b & \text{si } x \leq 2 \end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1} & \text{si } x > 3 \\ b & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$$

Exercice 45. Déterminer, en fonction du paramètre $a > 0$, si f peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^4-1} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{\sqrt{ax}-1}{ax-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{ax+1}-\sqrt{x+1}}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-2x}-1}{\sqrt{1-x}-1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{(1+ax)^2-1}{(1+x)^2-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 46. Déterminer les valeurs des paramètres a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si } x<1 \\ ax+b & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2-x+3 & \text{si } x<2 \\ ax+b & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} x^2-x+1 & \text{si } x<1 \\ -x^2+ax+b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} -x^2+ax+b & \text{si } x \leq 1 \\ x^2+2x-1 & \text{si } x>1 \end{cases} \qquad f_5(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{5x-1} & \text{si } x>1 \end{cases} \qquad f_6(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{3-2x}+b & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{2x^2-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Exercice 47. Calculer les dérivées n-èmes suivantes :

$$(x^n)^{(n+1)} \qquad (\sin x)^{(n)} \qquad (\cos x)^{(n)} \qquad (x^n)^{(n)} \qquad (e^{2x})^{(n)}$$

Exercice 48. Trouver une formule explicite, en fonction de X et n, pour les sommes suivantes :

$$(a)\ \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{n} kX^k \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{n} k^2X^k$$

Exercice 49. Etant donnée une fonction de deux variables $f(x,y)$, on peut calculer ses *dérivées partielles* par rapport à x et y : il s'agit simplement des dérivées usuelles, en dérivant par rapport à l'une des variables et en considérant l'autre constante. Elles sont notées respectivement $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = \sqrt{x^2+3y^2} \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{5x^2+y^2} \qquad f_3(x,y) = \frac{2x+y}{x^2+y^2} \qquad f_4(x,y) = \frac{x}{x+y} \qquad f_5(x,y) = y\cos(xy)$$

Exercice 50. Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

$$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\arccos x} \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2} \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{x+\arctan x}{x}$$

Exercice 51. [difficile] Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = (x-x^2)^{\frac{1}{x}} \qquad f_2(x) = x\,e^{\frac{1}{\ln(1+x)}} \qquad f_3(x) = \frac{x}{1-e^x} \qquad f_4(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

Exercice 52. Trouver la fonction réciproque de f et calculer sa dérivée :

$$f_1(x) = \frac{1}{\sin x} \quad \text{de } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ vers }]1,+\infty[\qquad f_2(x) = \frac{1}{1+\cos(2x)} \quad \text{de } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ vers } \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

Exercice 53. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \arcsin(x) \qquad f_2(x) = \arccos(x) \qquad f_3(x) = \arccos(2x) \qquad f_4(x) = \arccos(7x)$$
$$f_5(x) = \arcsin(\sqrt{1+x} \qquad f_6(x) = \arcsin(\sqrt{1+2x}) \qquad f_7(x) = \arctan x \qquad f_8(x) = \arctan(3x)$$
$$f_9(x) = \arctan(2x+1) \qquad f_{10}(x) = x\arctan x - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2) \qquad f_{11}(x) = \arctan(\sqrt{x})$$

Exercice 54. Calculer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\sin x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(3x)}{x^2+x} \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(2x)}{1-\sqrt{1-x}} \qquad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(e^x-1)}{\sqrt{x+1}-1}$$