Fiche d'exercices n°3 : géométrie et algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Prenez l'habitude de vérifier systématiquement vos résultats, par exemple avec `www.wolframalpha.com`.

Pour réviser...

Exercice 1. Résoudre les systèmes d'équations :

$a)\quad \begin{cases} 3x+4y=1 \\ 2x+3y=-5 \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases} \qquad c)\quad \begin{cases} 2x-3y=1 \\ x-4y=2 \end{cases}$

Exercice 2. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, tracer les droites d'équation :

$a)\quad y=3x-1 \qquad b)\quad y=-2x+3 \qquad c)\quad x=2y+1$

$d)\quad -3x+2y-1=0 \qquad e)\quad y+2=0 \qquad f)\quad 2x-1=0$

$g)\quad (x,y)=(2t+1,3t-1), t\in\mathbb{R} \qquad h)\quad (x,y)=(-s+2,2s-1), s\in\mathbb{R}$

Exercice 3. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par les 2 points A et B :

$a)\quad A(2,1)\quad B(0,1) \qquad b)\quad A(-3,1)\quad B(0,1) \qquad c)\quad A(-1,3)\quad B(2,-1) \qquad d)\quad A(-2,1)\quad B(-2,4)$

Exercice 4.
a) Quel est l'ensemble des points M de l'espace $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(x,0,0)$ lorsque x prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$?
b) Quel est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ tels que $x=1$?
c) Quel est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ tels que $x=1$ et $z=0$?

Exercice 5.
a) Si une droite de l'espace $\mathbb{R}^3$ est orthogonale à un plan, est-elle orthogonale à toutes les droites de ce plan ?
b) Si une droite de l'espace $\mathbb{R}^3$ est parallèle à un plan, est-elle parallèle à toutes les droites de ce plan ?
c) Soit un plan sécant avec deux plans parallèles. Que peut-on dire de leurs droites d'intersection ? Quelle est l'intersection des trois plans ?

Exercices de base

Exercice 6. Calculer la norme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ suivants, ainsi que leur produit scalaire.

$a)\quad \overrightarrow{u}=(1,5),\ \overrightarrow{v}=(3,1) \qquad b)\quad \overrightarrow{u}=(\cos\alpha,-\sin\alpha),\ \overrightarrow{v}=(\sin\alpha,\cos\alpha)$

$c)\quad \overrightarrow{u}=(2,3),\ \overrightarrow{v}=(-3,2) \qquad d)\quad \overrightarrow{u}=(1,0,2),\ \overrightarrow{v}=(-4,7,2)$

$e)\quad \overrightarrow{u}=(-2,0,1),\ \overrightarrow{v}=(0,3,8) \qquad f)\quad \overrightarrow{u}=(1,2,-1,2),\ \overrightarrow{v}=(3,1,1,-3)$

Exercice 7. Pour quelles valeurs du paramètre t les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils orthogonaux ?

$a)\quad \overrightarrow{u}=(t-1,2t-3),\ \overrightarrow{v}=(3,-1) \qquad b)\quad \overrightarrow{u}=(3t,2+t,-t),\ \overrightarrow{v}=(1,1,2)$

$c)\quad \overrightarrow{u}=(t-1,2t,2),\ \overrightarrow{v}=(1,2,-1) \qquad d)\quad \overrightarrow{u}=(t^2+1,2t,t^2-1),\ \overrightarrow{v}=(t^2,-t,1)$

Exercice 8. Calculer la distance entre les points A et B.

$a)\quad A=(3,4),\ B=(2,1) \qquad b)\quad A=(1,6),\ B=(4,2) \qquad c)\quad A=(3,1,2),\ B=(1,-1,1)$

Exercice 9. Pour quelles valeurs du paramètre t les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils colinéaires ?

$a)\quad \overrightarrow{u}=(1-t,2+t),\ \overrightarrow{v}=(3,4) \qquad b)\quad \overrightarrow{u}=(5t,6),\ \overrightarrow{v}=(6t,7) \qquad c)\quad \overrightarrow{u}=(2,1),\ \overrightarrow{v}=(3-t,2-t)$

Exercice 10. Calculer les déterminants suivants :

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad b)\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \quad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \quad d)\ \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \quad e)\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \quad f)\ \begin{vmatrix} 1+i & 1 \\ 3i & -1-i \end{vmatrix}$$

Exercice 11. Les 3 vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont-ils coplanaires ?

a) $\overrightarrow{u} = (1,2,3),\ \overrightarrow{v} = (-1,3,4),\ \overrightarrow{w} = (1,0,2)$ *b)* $\overrightarrow{u} = (1,-1,1),\ \overrightarrow{v} = (2,2,1),\ \overrightarrow{w} = (0,-4,1)$

Exercice 12. Calculer les déterminants suivants :

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad b)\ \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 6 & b & 0 \\ 7 & 1 & c \end{vmatrix} \quad c)\ \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad d)\ \begin{vmatrix} a & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix}$$

$$e)\ \begin{vmatrix} 0 & b & 7 \\ 11 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad f)\ \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} \quad g)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad h)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$i)\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \quad j)\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad k)\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad l)\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 13. Calculer l'aire du triangle ABC :

a) $A = (1,0),\ B = (2,3),\ C = (4,4)$ *b)* $A = (0,1),\ B = (2,1),\ C = (-1,2)$

c) $A = (2,1),\ B = (-2,1),\ C = (1,1)$ *d)* $A = (1,1),\ B = (2,2),\ C = (0,3)$

Exercice 14. Calculer le volume du tétraèdre ABCD :

a) $A = (0,-1,0),\ B = (0,4,1),\ C = (1,4,2),\ D = (0,0,2)$

b) $A = (1,0,0),\ B = (0,2,3),\ C = (1,4,4),\ D = (0,-1,0)$

Exercice 15. Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et vérifier que le vecteur résultat $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

a) $\overrightarrow{u} = (1,0,0),\ \overrightarrow{v} = (0,0,-1)$ *b)* $\overrightarrow{u} = (1,0,0),\ \overrightarrow{v} = (1,1,1)$

c) $\overrightarrow{u} = (2,3,1),\ \overrightarrow{v} = (1,2,1)$ *d)* $\overrightarrow{u} = (1,1,1),\ \overrightarrow{v} = (-3,2,1)$

e) $\overrightarrow{u} = (1,0,1),\ \overrightarrow{v} = (x,0,-1)$ *f)* $\overrightarrow{u} = (\cos\alpha, -\sin\alpha, 0),\ \overrightarrow{v} = (\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$

g) $\overrightarrow{u} = (3,2,-1),\ \overrightarrow{v} = (2,1,z)$ *h)* $\overrightarrow{u} = (1,2,2),\ \overrightarrow{v} = (3,1,1)$

Exercice 16. Trouver l'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

a) $\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x+y=0\},\quad \mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ 2x+y=1\}$

b) $\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ 2x+y=1\},\quad \mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x+2y=5\}$

c) $\mathcal{D}_1 = \{(2s-1, s+2)\,,\ s \in \mathbb{R}\},\quad \mathcal{D}_2 = \{(1-2t, 3-t)\,,\ t \in \mathbb{R}\}$

d) $\mathcal{D}_1 = \{(1+4t, 2+t)\,,\ t \in \mathbb{R}\},\quad \mathcal{D}_2 = \{(x,y)\,,\ x+2y=11\}$

e) $\mathcal{D}_1 = \{(x,y)\,,\ 2x-y=3\},\quad \mathcal{D}_2 = \{(s-1, 3+2s)\,,\ s \in \mathbb{R}\}$

f) $\mathcal{D}_1 = \{(1+\lambda, 2-\lambda)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\},\quad \mathcal{D}_2 = \{(x,y)\,,\ x+4y=3\}$

g) $\mathcal{D}_1 = \{(1+t, 2-t)\,,\ t \in \mathbb{R}\},\quad \mathcal{D}_2 = \{(1+s, 2+s)\,,\ s \in \mathbb{R}\}$

h) $\mathcal{D}_1 = \{(5-t, 2t-1)\,,\ t \in \mathbb{R}\},\quad \mathcal{D}_2 = \{(1+s, 2+3s)\,,\ s \in \mathbb{R}\}$

Exercice 17. Trouver l'équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points A et B.

a) $A=(1,2)$, $B=(3,1)$ *b)* $A=(3,0)$, $B=(2,-1)$ *c)* $A=(1,0)$, $B=(2,3)$

Exercice 18. Trouver le point d'intersection M de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par les points A et B, avec la droite $\mathcal{D}_2$ passant par les points E et F, où $A=(0,1)$, $B=(4,3)$, $E=(1,3)$, $F=(3,1)$.

Exercice 19. Trouver la projection orthogonale du point M sur la droite $\mathcal{D}$.

a) $M=(1,2)$, $\mathcal{D}=\{(2t,1+t)\,,t\in\mathbb{R}\}$ *b)* $M=(1,3)$, $\mathcal{D}=\{(4-t,2+2t)\,,t\in\mathbb{R}\}$

c) $M=(1,-3)$, $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,x+2y+3=0\}$ *d)* $M=(1,5)$, $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,x-y=2\}$

e) $M=(-1,1)$, $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,-2x+y=3\}$ *f)* $M=(1,0,1)$, $\mathcal{D}=\{(2t,t-1,-t+4)\,,t\in\mathbb{R}\}$

Exercice 20. Calculer l'aire du triangle déterminé par les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$:
$\mathcal{D}_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,x+y=0\}$ $\mathcal{D}_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,2x-y=2\}$
$\mathcal{D}_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,4x+y+2=0\}$

Exercice 21. Trouver l'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point M et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

a) $M=(1,2,4)$, $\mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,x+y+z=3\}$

b) $M=(-1,0,0)$, $\mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,x+2y+3z=7\}$

c) $M=(1,2,4)$, $\mathcal{P}=\{\alpha(1,0,3)+\beta(0,1,0)\,,\alpha\in\mathbb{R},\ \beta\in\mathbb{R}\}$

d) $M=(1,-2,1)$, $\mathcal{P}=\{\alpha(1,-1,1)+\beta(0,1,1)\,,\alpha\in\mathbb{R},\ \beta\in\mathbb{R}\}$

Exercice 22. Trouver l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}=\{M+\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}\,,\ \alpha\in\mathbb{R},\ \beta\in\mathbb{R}\}$.

a) $M=(1,0,1)$, $\overrightarrow{u}=(1,1,0)$, $\overrightarrow{v}=(1,0,0)$ *b)* $M=(1,0,0)$, $\overrightarrow{u}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{v}=(1,0,1)$

Exercice 23. Trouver l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ déterminé par les points A, B et C.

a) $A=(1,0,1)$, $B=(1,1,0)$, $C=(1,0,0)$ *b)* $A=(2,0,1)$, $B=(1,1,1)$, $C=(-1,0,-1)$

Exercice 24. Trouver l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant le point A et la droite $\mathcal{D}$.
a) $A=(1,0,1)$, $\mathcal{D}=\{(1+t,2-t,-1+t)\,,t\in\mathbb{R}\}$ *b)* $A=(-1,1,0)$, $\mathcal{D}=\{(1+2t,t,1-t)\,,t\in\mathbb{R}\}$

Exercice 25. Trouver une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

a) $\mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,x+y+z=3\}$ *b)* $\mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,x+2y-2z=1\}$

c) $\mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,x-z=1\}$ *d)* $\mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,x-y+3z=0\}$

Exercice 26. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans dans $\mathbb{R}^3$. Trouver la forme paramétrique de la droite $\mathcal{D}=\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2$.

a) $\mathcal{P}_1=\{(x,y,z)\,,x+y+z=3\}$, $\mathcal{P}_2=\{(x,y,z)\,,x-2y+z=0\}$

b) $\mathcal{P}_1=\{(x,y,z)\,,x+y-z=-1\}$, $\mathcal{P}_2=\{(x,y,z)\,,x+2y+3z=0\}$

c) $\mathcal{P}_1=\{(x,y,z)\,,2x-z=1\}$, $\mathcal{P}_2=\{(x,y,z)\,,x+y=2\}$

Exercice 27. Calculer les coordonnées de la projection orthogonale du point M sur le plan $\mathcal{P}$.

a) $M=(1,1,0)$ $\mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,x-y+2z=3\}$ *b)* $M=(2,-1,1)$ $\mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,2x+y=1\}$

c) $M=(-1,5,-1)$ $\mathcal{P}=\{(2-t+s,1+2t-s,3t+2s)\,,t,s\in\mathbb{R}\}$

Exercice 28. Réécrire la droite $\mathcal{D}$ comme intersection de deux plans :

a) $\mathcal{D}=\{(1,0,2)+t(1,1,1)\,,t\in\mathbb{R}\}$ *b)* $\mathcal{D}=\{(1+t,2-t,t-3)\,,t\in\mathbb{R}\}$

Pour vous entrainer...

Exercice 29. Trouver les valeurs du paramètre t pour lesquelles les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

$$a)\quad \overrightarrow{u} = (-1-t, 5+t),\ \overrightarrow{v} = (1,-1) \qquad b)\quad \overrightarrow{u} = (1-t, 1),\ \overrightarrow{v} = (3, 1-t)$$

Exercice 30. Calculer les déterminants suivants :

$$a)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad d)\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 21 \end{vmatrix} \qquad e)\begin{vmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} & 1+i \\ 1-i & e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{vmatrix}$$

Exercice 31. Calculer les déterminants suivants :

$$a)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \qquad d)\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$e)\begin{vmatrix} X & 1 & X \\ 1 & 1 & 2 \\ X & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad f)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \qquad g)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad h)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 32. Calculer l'aire du triangle ABC :

$$a)\quad A = (0,0),\ B = (-2,1),\ C = (3,0) \qquad b)\quad A = (t, 1+t),\ B = (1,t),\ C = (2-t, 1-t)$$

Exercice 33. Calculer le volume du tétraèdre ABCD :

$$a)\quad A = (1,1,0),\ B = (0,1,1),\ C = (1,0,1),\ D = (1,1,1)$$

$$b)\quad A = (1,2,3),\ B = (0,1,-1),\ C = (2,1,0),\ D = (0,1,0)$$

Exercice 34. Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et vérifier que le vecteur résultat $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

$$a)\quad \overrightarrow{u} = (1,2,1),\ \overrightarrow{v} = (0,1,-1) \qquad b)\quad \overrightarrow{u} = (3,2,0),\ \overrightarrow{v} = (-1,2,-1)$$

Exercice 35. Trouver l'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

$a)\quad \mathcal{D}_1 = \{(1+2s, 3-s)\,,\ s \in \mathbb{R}\},\quad \mathcal{D}_2 = \{(x,y)\,,\ x-2y+1 = 0\}$

$b)\quad \mathcal{D}_1 = \{(s-1, s-2)\,,\ s \in \mathbb{R}\},\quad \mathcal{D}_2 = \{(3-t, 2-t)\,,\ t \in \mathbb{R}\}$

$c)\quad \mathcal{D}_1 = \{(x,y)\,,\ 2x+y+1 = 0\},\quad \mathcal{D}_2 = \{(1+t, 3-2t)\,,\ t \in \mathbb{R}\}$

$d)\quad \mathcal{D}_1 = \{(t-2, t-1)\,,\ t \in \mathbb{R}\},\quad \mathcal{D}_2 = \{(-1+2s, 3-s)\,,\ s \in \mathbb{R}\}$

Exercice 36. Trouver l'équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points A et B.

$a)\quad A = (2,3)\ ,\ B = (3,2) \qquad b)\quad A = (4,1)\ ,\ B = (2,2) \qquad c)\quad A = (-2,1)\ ,\ B = (1,3)$

Exercice 37. Trouver le point d'intersection M de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par les points A et B, avec la droite $\mathcal{D}_2$ passant par les points E et F, où $A = (2,0)\ ,\ B = (4,4),\ E = (1,1)\ ,\ F = (5,3)$.

Exercice 38. Trouver la projection orthogonale du point M sur la droite $\mathcal{D}$.

$a)\quad M = \left(\dfrac{3}{2}, 2\right)\ ,\ \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,, 2x+y = 3\} \qquad b)\quad M = (4,0)\ ,\ \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,, 3x-y = 2\}$

$c)\quad M = (1,-2,1)\ ,\ \mathcal{D} = \{(t-2, 1-2t, 2t+1)\,, t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 39. Trouver l'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point M et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

$$a)\quad M=(2,1,-3),\ \mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,2x-y+z=1\}$$

$$b)\quad M=(-1,2,0),\ \mathcal{P}=\{\alpha(0,1,2)+\beta(-1,1,1)\,,\alpha\in\mathbb{R},\ \beta\in\mathbb{R}\}$$

Exercice 40. Trouver l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}=\{M+\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}\ ,\ \alpha\in\mathbb{R},\ \beta\in\mathbb{R}\}$.

$a)\quad M=(0,-1,1),\ \overrightarrow{u}=(2,1,1),\ \overrightarrow{v}=(0,1,1)\qquad b)\quad M=(1,2,-1),\ \overrightarrow{u}=(1,0,1),\ \overrightarrow{v}=(-1,0,1)$

Exercice 41. Trouver l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ déterminé par les points A, B et C.

$a)\quad A=(1,2,-1),\ B=(-1,2,1),\ C=(1,0,1)\qquad b)\quad A=(2,-2,0),\ B=(1,-1,1),\ C=(0,0,1)$

Exercice 42. Trouver l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant le point A et la droite $\mathcal{D}$.

$a)\quad A=(-1,2,1),\ \mathcal{D}=\{(1-t,1+t,1+2t)\,,t\in\mathbb{R}\}\qquad b)\quad A=(1,1,1),\ \mathcal{D}=\{(t,1-t,2+t)\,,t\in\mathbb{R}\}$

Exercice 43. Trouver une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

$$a)\quad \mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,2x-y+z=1\}\qquad b)\quad \mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,x-2y-z=2\}$$

$$c)\quad \mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,x-3y-z=-2\}\qquad d)\quad \mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,x-y+2=0\}$$

Exercice 44. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans dans $\mathbb{R}^3$. Trouver la forme paramétrique de la droite $\mathcal{D}=\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2$.

$$a)\quad \mathcal{P}_1=\{(x,y,z)\,,2x+y-z=3\},\ \mathcal{P}_2=\{(x,y,z)\,,x+2y+z=0\}$$

$$b)\quad \mathcal{P}_1=\{(x,y,z)\,,-x+y-z=1\},\ \mathcal{P}_2=\{(x,y,z)\,,x-2y-z=2\}$$

Exercice 45. Calculer les coordonnées de la projection orthogonale du point M sur le plan $\mathcal{P}$.

$a)\ M=(2,-3,2)\quad \mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,2x-3y+z=1\}\qquad b)\ M=(0,2,-4)\quad \mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,x-3z=2\}$

$$c)\ M=(-2,5,-5)\quad \mathcal{P}=\{(1+2t+s,3t-s,-t-s)\,,t,s\in\mathbb{R}\}$$

Exercice 46. Réécrire la droite $\mathcal{D}$ comme intersection de 2 plans : $\mathcal{D}=\{(1,1,-1)+t(0,2,1)\,,t\in\mathbb{R}\}$

Pour aller plus loin...

Exercice 47.

1. Soient $\overrightarrow{u}=(1,1,-1)$ et $\overrightarrow{v}=(1,2,1)$. Exprimer les conditions sur a,b,c pour que le vecteur $\overrightarrow{w}=(a,b,c)$ soit orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Donner une forme paramétrique de cette droite. Vérifier que la valeur de $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ est cohérente avec les résultats précédents.
2. De façon plus générale, traiter les mêmes questions avec $\overrightarrow{u}=(x,y,z)$ et $\overrightarrow{v}=(x',y',z')$.

Exercice 48. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soit le point $M(0,4)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x-2$. Soit P la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$.

1. Faire un dessin (soigné) représentant M, $\mathcal{D}$ et P.
2. Calculer (en expliquant votre raisonnement) les coordonnées de P.
3. Soient les vecteurs $\vec{u}=(-3,3)$ et $\vec{v}=(1,1)$. On définit les nombres complexes correspondants $z_u=-3+3i$ et $z_v=1+i$. Calculer $z_u\,\bar{z}_v$. Interpréter géométriquement ce résultat.
4. On va maintenant généraliser la notion évoquée à la question précédente. Soient dorénavant les vecteurs $\vec{u}=(x,y)$ et $\vec{v}=(x',y')$. On définit les nombres complexes correspondants $z_u=x+iy$ et $z_v=x'+iy'$.
   (a) Calculer $z_u\,\bar{z}_v$.
   (b) Que peut-on dire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si $z_u\,\bar{z}_v$ est un nombre imaginaire pur ?

(c) Que peut-on dire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si $z_u\,\bar{z}_v$ est un nombre réel ?

(d) En utilisant l'écriture sous forme exponentielle $z_u = \rho\, e^{i\theta}$ et $z_v = \rho'\, e^{i\theta'}$, interpréter les résultats précédents.

Exercice 49. On considère dans $\mathbb{R}^2$ le parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u} = (a,b) \neq (0,0)$ et $\overrightarrow{v} = (c,d) \neq (0,0)$, c'est-à-dire le parallélogramme $EFGH$, où $E = (0,0)$, $F = (a,b)$, $G = (a+c, b+d)$ et $H = (c,d)$.

1. Trouver la projection orthogonale P du point H sur la droite passant par les points E et F.
2. Calculer la distance entre P et H.
3. Calculer l'aire du parallélogramme $EFGH$.

Exercice 50. Soit $\mathcal{T}$ un triangle de sommets A, B et C dans le plan $\mathbb{R}^2$, et soit $\mathcal{A}$ son aire. En utilisant la formule usuelle $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \times \textit{base} \times \textit{hauteur}$, démontrer le théorème du cours :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right| = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})\right| = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\right|$$

Exercice 51. Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre de sommets A, B, C et D dans l'espace $\mathbb{R}^3$, et soit $\mathcal{V}$ son volume. En utilisant la formule usuelle $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \textit{surface de base} \times \textit{hauteur}$, démontrer le théorème du cours :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})\right| = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})\right| = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})\right|$$

Exercice 52. Un rayon de lumière est envoyé depuis le point $A = (1,0,1)$ dans la direction du vecteur $\overrightarrow{v}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $\overrightarrow{v}$ le rayon réfléchi dans le miroir d'équation $x - y + z = 1$ passe-t-il par le point $T = (3,2,3)$?

Exercice 53. Un rayon de lumière est envoyé depuis le point $A = (1,1,2)$ dans la direction du vecteur $\overrightarrow{v} = (-1,-1,-1)$. Trouver l'équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $M = (2,0,0)$ pour lequel le rayon réfléchi dans le miroir $\mathcal{P}$ passe par le point $T = (-2,-2,1)$.