**Fiche d'exercices n°2 : sommes et produits**

---

*Prenez l'habitude de vérifier systématiquement vos résultats, par exemple avec* `www.wolframalpha.com`.

---

# Pour réviser...

**Exercice 1.** Simplifier les expressions suivantes :

$i)\ \frac{5^3\,2^4\,10^{-1}}{20^3}$ $\quad ii)\ \frac{10^9\,6^3}{25^4\;3\;2^{11}}$ $\quad iii)\ \frac{1}{10^{56}}-\frac{1}{10^{57}}$ $\quad iv)\ 5^{108}\,2^{106}\,\frac{11}{10^{107}}$ $\quad v)\ \frac{(3^4)^2\;4}{2^{-3}\;(6^2)^3}$

**Exercice 2.** Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$ les valeurs suivantes :

$$\ln(20) \quad ; \quad \ln\left(\sqrt{\frac{2}{125}}\right) \quad ; \quad \ln(0.001) \quad ; \quad \ln\left(\frac{\sqrt[3]{25}}{8\sqrt{2}}\right) \quad ; \quad \ln(500e)$$

**Exercice 3.** Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. Exprimer en fonction de $\ln a$ et $\ln b$ les valeurs suivantes :

$$\ln\frac{a^2\sqrt{a}}{b^3} - \ln\frac{b^2}{a} \quad ; \quad 2\ln ab^2 - 3\ln a^2b + \ln\left(\frac{a}{b}\right)^3 \quad ; \quad \ln\sqrt{a^3b^3} - \ln\sqrt[3]{a^2b^2}$$

**Exercice 4.** A l'aide du tableau ci-dessous, montrer que $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $2$ | $\dots$ | $\dots$ | $n-1$ | $n$ |
| $n$ | $n-1$ | $\dots$ | $\dots$ | $2$ | $1$ |

**Exercice 5.**

1. Développer les expressions $(1+a+a^2)(1-a)$ et $(1+a+a^2+a^3)(1-a)$.
2. Développer l'expression $(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n)(1-a)$.
3. En déduire la valeur de la somme $1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n$.
4. En déduire la valeur de la somme $3^3+3^4+\cdots+3^{10}$.

# Exercices de base sur les sommes et produits

**Exercice 6.** Développer les expressions suivantes :

$i)\ (a-b)^2 \quad ii)\ (x+y)(x-y) \quad iii)\ (u+3)^2 \quad iv)\ (x+y)^3 \quad v)\ (a-b)^3$

**Exercice 7.** Calculer les sommes et les produits suivants.

$a)\ \sum_{k=1}^{3}(k^2-1) \quad b)\ \sum_{k=1}^{3}(2k-1) \quad c)\ \sum_{k=2}^{4}k^2 \quad d)\ \sum_{k=0}^{2}(2k+1) \quad e)\ \sum_{k=0}^{2}2^k$

$f)\ \prod_{k=1}^{4}(2k-1) \quad g)\ \sum_{k=-2}^{2}k \quad h)\ \prod_{k=2}^{4}k \quad i)\ \sum_{k=1}^{3}5 \quad j)\ \prod_{k=3}^{5}2$

**Exercice 8.** Écrire les sommes et les produits suivants en utilisant les symboles $\sum$ et $\prod$.

*a)* $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$ *b)* $4+5+6+7+8+9$

*c)* $0+1+2+3+4+5$ *d)* $3+3+3+3+3+3$

*e)* $2\times3\times4\times5\times6\times7$ *f)* $1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$

*g)* $7\times7\times7\times7\times7\times7$ *h)* $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$

*i)* $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$ *j)* $3+5+7+9+11+13+15+17+19+21$

*k)* $1+3+5+7+9+11+13+15$ *l)* $2+4+6+8+10+\cdots+98+100$

**Exercice 9.** Simplifier les expressions suivantes, pour les écrire de façon plus concise :

*a)* $a_1+\sum_{k=2}^{n}a_k$ *b)* $a_0+\sum_{k=1}^{n+2}a_k$ *c)* $\sum_{k=0}^{3}a_k+\sum_{k=4}^{n}a_k$ *d)* $\sum_{k=n+1}^{2n}a_k+\sum_{k=1}^{n}a_k$

*e)* $\dfrac{\prod_{k=1}^{2n+1}3^k}{\prod_{k=1}^{n}3^k}$ *f)* $\dfrac{\prod_{k=1}^{10}2^k}{\prod_{k=1}^{3}2^k}$ *g)* $\dfrac{\prod_{k=1}^{10}3^k}{\prod_{k=7}^{10}3^k}$ *h)* $\dfrac{1}{3}\prod_{k=3}^{7}k$

*i)* $\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{4}2^k$ *j)* $\sum_{k=1}^{n+4}k^3-\sum_{k=1}^{n-1}k^3$ *k)* $\dfrac{1}{10}\prod_{k=1}^{10}k$ *l)* $\left(\prod_{k=1}^{n}(2k)\right)\left(\prod_{k=0}^{n}(2k+1)\right)$

**Exercice 10.** Calculer les sommes et les produits suivants :

*a)* $\sum_{k=1}^{n}5$ *b)* $\sum_{k=1}^{n+2}7$ *c)* $\prod_{k=2}^{n}6$ *d)* $\sum_{k=0}^{n}4$ *e)* $\prod_{k=0}^{n+3}5$ *f)* $\sum_{k=n}^{2n+1}8$ *g)* $\prod_{k=1}^{5}i$

**Exercice 11.** Simplifier les produits suivants :

*a)* $\prod_{k=1}^{n+2}k$ *b)* $\prod_{k=3}^{n}k$ *c)* $\prod_{k=1}^{n}3k^2$ *d)* $\prod_{k=2}^{n}(k-1)$ *e)* $\prod_{k=1}^{n}\dfrac{k+1}{3}$

*f)* $\prod_{k=2}^{n}\dfrac{(k-1)(k+2)}{2}$ *g)* $\prod_{k=2}^{n}\dfrac{k}{k-1}$ *h)* $\prod_{k=2}^{n}\dfrac{k(k+1)}{k-1}$ *i)* $\prod_{k=1}^{n}(2k+1)$ *j)* $\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)$

**Exercice 12.** Calculer les sommes suivantes :

*a)* $\sum_{k=2}^{n}\ln(2k^3)$ *b)* $\sum_{k=2}^{n}(2\ln k+\ln(k+1))$ *c)* $\sum_{k=1}^{n}(\ln 3+3\ln k)$

**Exercice 13.** Calculer les sommes suivantes :

*a)* $\sum_{k=0}^{n}3^k$ *b)* $\sum_{k=0}^{n+2}7^k$ *c)* $\sum_{k=1}^{n}2^k$ *d)* $\sum_{k=2}^{n}5^k$ *e)* $\sum_{k=0}^{n}(-2)^k$ *f)* $\sum_{k=0}^{n}2^{3k+2}$

*g)* $\sum_{k=1}^{n+1}7^{2k+1}$ *h)* $\sum_{k=0}^{n+2}\dfrac{1}{2^k}$ *i)* $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{2^{k+1}}{3^{k+2}}$ *j)* $\sum_{k=0}^{2n-1}3^{k/2}$ *k)* $\sum_{k=1}^{n+1}3^k5^{2-k}$ *l)* $\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{2i\pi k}{n}}$

**Exercice 14.** Calculer les sommes suivantes :

*a)* $\sum_{k=1}^{n}4k$ *b)* $\sum_{k=1}^{n}(2k+5)$ *c)* $\sum_{k=0}^{n+2}3k$ *d)* $\sum_{k=2}^{n}(k+4)$ *e)* $\sum_{k=0}^{n}(k-2)$ *f)* $\sum_{k=2}^{2n}\dfrac{k}{2}$

**Exercice 15.** Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n}(1+2ik) \qquad b)\ \sum_{k=1}^{10}(2+ik) \qquad c)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{5k}{2+i} \qquad d)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{k+i}{1+i}$$

**Exercice 16.** Calculer les sommes suivantes :

$$a)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k3^{n-k} \qquad b)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \qquad c)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{k+1}5^{n-k} \qquad d)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k+1}3^{2n-k}$$

$$e)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k \qquad f)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k3^{-k} \qquad g)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{5^k}{2^{n-k}} \qquad h)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{2k-n}$$

$$i)\ \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}5^k3^{n-k} \qquad j)\ \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}3^k4^{n-k}$$

**Exercice 17.** Simplifier les expressions suivantes :

$$a)\ \prod_{k=1}^{20}e^{ik\pi/3} \qquad b)\ \prod_{k=1}^{7}2e^{ik\pi/8} \qquad c)\ \prod_{k=1}^{6}(1+i)^k$$

$$d)\ \sum_{k=0}^{7}\left(-2+\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^k \qquad e)\ \sum_{k=0}^{7}\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^k \qquad f)\ \sum_{k=0}^{12}(-1+e^{i\pi/3})^k$$

**Exercice 18.** Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer les coefficients $\alpha$ et $\beta$ tels que $\dfrac{1}{k(k+a)} = \dfrac{\alpha}{k} + \dfrac{\beta}{k+a}$.
En déduire les valeurs des sommes suivantes :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} \qquad b)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)} \qquad c)\ \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$$

## Pour vous entrainer...

**Exercice 19.** Simplifier les expressions suivantes, pour les écrire de façon plus concise :

$$a)\ \sum_{k=1}^{3n+2}k - \sum_{k=2n}^{3n+2}k \qquad b)\ \sum_{k=1}^{n+4}k - \sum_{k=1}^{n-1}k \qquad c)\ \sum_{k=1}^{2n-1}k - \sum_{k=n-1}^{2n-1}k \qquad d)\ \frac{\prod_{k=1}^{n}2^k}{\prod_{k=1}^{2}2^k}$$

$$e)\ \frac{\prod_{k=1}^{2n+1}3^k}{\prod_{k=1}^{n}3^k} \qquad f)\ \sum_{k=n+1}^{2n}a_k + \sum_{k=1}^{n}a_k \qquad g)\ \prod_{k=0}^{n-1}(k+1)^2 \qquad h)\ \sum_{k=3}^{n+2}(k-2)$$

**Exercice 20.** Calculer les sommes et les produits suivants :

$$a)\ \sum_{k=0}^{n-1}3 \qquad b)\ \prod_{k=3}^{n+1}2 \qquad c)\ \sum_{k=m}^{n}a \qquad d)\ \prod_{k=3}^{n+1}2 \qquad e)\ \prod_{k=n+1}^{3n+5}7 \qquad f)\ \sum_{k=n-2}^{2n+2}8$$

**Exercice 21.** Simplifier les produits suivants :

*a)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1}(5k)$ *b)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+2}(k+3)$ *c)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1}$ *d)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(k-1)(k+1)$ *e)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}k(k+1)$

*f)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k}$ *g)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k}{k^2-1}$ *h)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(3k^2)$ *i)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{1}{k}$ *j)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+3}(k+2)$

**Exercice 22.** Calculer les sommes suivantes :

*a)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln(5k^2)$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2\ln k-\ln(k+1))$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left(\ln\frac{k+1}{3}+\ln\frac{2}{k}\right)$

**Exercice 23.** Calculer les sommes suivantes :

*a)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3^{3k-1}$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+2}\frac{1}{3^{k-2}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{1+3k}3^{-2(k+1)}$ *d)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2}(-3)^k$ *e)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{i\pi k}{n}}$ *f)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k3^{k+2}}{7^{k+1}}$

**Exercice 24.** Calculer les sommes suivantes :

*a)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{3n}(2k-1)$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1-k}{3}$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ak+b)$ *d)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}3(k+1)$ *e)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{3n}\frac{2-k}{3}$

**Exercice 25.** Calculer les sommes suivantes :

*a)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{3^k}$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^{k-n}$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k3^{2n-k}$ *d)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k+1}3^{2-k}$

*e)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{5^k}{2^{2k}}$ *f)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(3^k)^2$ *g)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}5^k3^{n+k}$

**Exercice 26.** Calculer les expressions suivantes :

*a)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1-2k}{5}$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}3^{k-2}2^{3-k}$ *c)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k+3}{k+1}$ *d)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{3^k2^{n-k}}{5^k}$

*e)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}j\right)$ *f)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{2k}2^{2n-k}$ *g)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(k+2)$ *h)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}2^{2-k}$

*i)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{2n+k}5^{2n-k}$ *j)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$

# Pour aller plus loin...

**Exercice 27.** Simplifier les expressions : $\displaystyle\prod_{k=1}^{393}i$ ; $\displaystyle\prod_{k=1}^{4n+3}i$ ; $\displaystyle\prod_{k=1}^{8n+5}(1+i)$ ; $\displaystyle\prod_{k=3}^{200}e^{i\pi/3}$

**Exercice 28.** Calculer les produits : $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n}(2k)\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\right)$ ; $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)$ ; $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k+1)$

**Exercice 29.** On démontre par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

A l'aide de ces formules, calculer les sommes suivantes :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \qquad b)\ \sum_{k=0}^{n}(k^2+1) \qquad c)\ \sum_{k=1}^{n}(2k+2)(3k-2) \qquad d)\ \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k+1)$$

**Exercice 30.** Calculer les sommes : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^k 3^{n-k}$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} 2^k 3^{n-k}$

**Exercice 31.** Calculer le module du nombre complexe : $\prod_{k=1}^{n} \frac{ki}{(\sqrt{k}+i)^2}$

**Exercice 32.** Calculer les sommes : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k(k-1)}{(k+1)!}$

**Exercice 33.** Exprimer en fonction de $x$ et $n$ les sommes suivantes :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} \sin(xk) \qquad b)\ \sum_{k=1}^{n} \sin(x(2k+1)) \qquad c)\ \sum_{k=1}^{n} k\cos(kx)$$

**Exercice 34.** On considére une expérience ayant deux issues possibles, que l'on appelle *issue positive* et *issue négative*. Soit $p \in ]0,1[$ la probabilité d'avoir une issue positive. On répète plusieurs fois cette expérience dans les mêmes conditions et de façon indépendante.

1. Calculer la probabilité $p_k$ pour que la première expérience positive soit la $k$-ième.
2. Soit $q_1$ la probabilité que au moins une expérience parmi les 100 premières soit positive. Exprimer $q_1$ en fonction de $p_1, \dots, p_{100}$ et donc en fonction de $p$.
3. Soit $q_0$ la probabilité que les 100 premières expériences soient toutes négatives. Exprimer $q_0$ en fonction de $p$.
4. Les événements *"Au moins une expérience parmi les* 100 *premières est positive"* et *"Les* 100 *premières expériences sont toutes négatives"* sont complémentaires. On devrait donc avoir $q_0 + q_1 = 1$. Est-ce bien ce que vous avez obtenu ?