Fiche d'exercices n°1 : nombres complexes

Prenez l'habitude de vérifier systématiquement vos résultats, par exemple avec `www.wolframalpha.com`.

Pour réviser...

Exercice 1. Développer les expressions suivantes :

$i)\ (a-b)^2 \qquad ii)\ (x+y)(x-y) \qquad iii)\ (u+3)^2 \qquad iv)\ (x+y)^3 \qquad v)\ (a-b)^3$

Exercice 2. Factoriser : $i)\ a^2-b^2 \qquad ii)\ a^3-b^3 \qquad iii)\ a^4-b^4$

Exercice 3.

1. Supprimer les racines carrées au dénominateur en utilisant l'expression conjuguée.

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}+2} \qquad B=\frac{12}{\sqrt{3}-1} \qquad C=\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2} \qquad D=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}-2}$$

2. En utilisant la quantité conjuguée pour transformer certaines expressions, regrouper les nombres par paires identiques.

$$\frac{2}{5-\sqrt{2}} \quad ; \quad 4+2\sqrt{2} \quad ; \quad \frac{5}{3+\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{4}{2-\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{15-5\sqrt{2}}{7} \quad ; \quad \frac{10+2\sqrt{2}}{23}$$

3. Comparer $\dfrac{2\sqrt{3}}{5-\sqrt{23}}$ et $5\sqrt{3}+\sqrt{69}$

Exercice 4. Dans chacun des cas, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$ et factoriser $P(x)$.

$$P_1(x)=3x^2-x+2 \qquad P_2(x)=-5x^2-9x+2 \qquad P_3(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+3 \qquad P_4(x)=-4x+3x^2+1$$

Exercice 5.

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$a)\ e^{-5}\,\frac{1}{e^{-3}}\,e \qquad b)\ \frac{e^{10}}{-e^{-2}}\,\frac{-e^{-4}}{e^{-8}} \qquad c)\ e^3(e^{-3}-e^2)+e^2(e^3+e)-1$$

$$d)\ \frac{\sqrt[3]{e}\,e^2}{\left(\sqrt{e}\right)^3} \qquad e)\ \frac{\left(e^{-2a}\right)^3\,e^{4a}}{e^{-2a}} \qquad f)\ \frac{\left(e^{1-t/2}\right)^3}{e\,e^{-9t/2}}$$

2. Prouver que, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \qquad e^{-x}-e^{-2x}=\frac{e^x-1}{e^{2x}} \qquad \left(e^x+e^{-x}\right)^2-2=\frac{e^{4x}+1}{e^{2x}}$$

Exercice 6. Dans le plan, calculer la distance entre les 2 points A et B :

$a)\ A(2,1)\quad B(-1,2) \qquad b)\ A(5,-3)\quad B(3,1) \qquad c)\ A(-1,3)\quad B(2,-1)$

Exercice 7.

1. Déterminer l'équation du cercle de centre $C(-2, 1)$ et de rayon 2.
2. Quel est l'ensemble des points (x, y) vérifiant l'équation $x^2 + y^2 - 4 - 4x + 2y = 0$?
3. Quel est l'ensemble des points (x, y) vérifiant l'équation $2x - 2x^2 - 2y^2 - 4y + \frac{15}{4} = 0$?

Exercice 8.

1. Donner les valeurs des sinus et cosinus des angles suivants :

$$\frac{2\pi}{3} \qquad \frac{9\pi}{2} \qquad -\frac{9\pi}{12} \qquad \frac{11\pi}{6} \qquad -\frac{13\pi}{4} \qquad \frac{7\pi}{3} \qquad -\frac{8\pi}{3}$$

2. Exprimer les sinus et cosinus des angles suivants en fonction de $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{5}$:

$$-\frac{\pi}{5} \qquad \frac{6\pi}{5} \qquad \frac{9\pi}{5} \qquad \frac{4\pi}{5} \qquad \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \qquad \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{5}$$

Exercices de base sur les nombres complexes

Exercice 9. Pour chacun des nombres complexes ci-dessous, indiquer sa partie réelle, sa partie imaginaire, son module, un argument, et le placer dans le plan complexe.

a) $1 + i$	*b)* $2 - 2i$	*c)* $\sqrt{3} + i$	*d)* $-i$
e) $-1 + i\sqrt{3}$	*f)* $\overline{-1 + i}$	*g)* -5	*h)* $a + ia$

Exercice 10. Mettre sous forme algébrique les expressions suivantes, et placer dans le plan complexe les différents termes mis en jeu.

a) $(1 + i)^2$	*b)* $(2 - i)^2$	*c)* $(a + ib)^2$	*d)* $\overline{(1 + i)}(2 + i)$
e) $(1 + 2i)(3 + 4i)$	*f)* $(1 - 3i)\overline{(5 + 2i)}$	*g)* $(2 + 3i)^2\overline{(2 + 3i)}$	*h)* $(3 + i)^3$
i) $(2 + 5i)(2 - 5i)$	*j)* $(1 - 4i)(1 + 4i)$	*k)* $(2 + 3i)^2 + (2 - 3i)^2$	*l)* $(a + bi)^2 + (a - bi)^2$

Exercice 11. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\mathcal{R}e(3 - 7i)$	*b)* $\mathcal{R}e(-\sqrt{7} + 2i)$	*c)* $\mathcal{I}m(\sqrt{5} + i)$	*d)* $\mathcal{I}m(\overline{2 + i})$
e) $\mathcal{R}e((1 - i)(3 + 4i))$	*f)* $\mathcal{R}e((1 + i)(3 + i))$	*g)* $\mathcal{I}m(i(2 - i))$	*h)* $\mathcal{I}m(\overline{(3 - i)}(1 + 2i))$

Exercice 12.

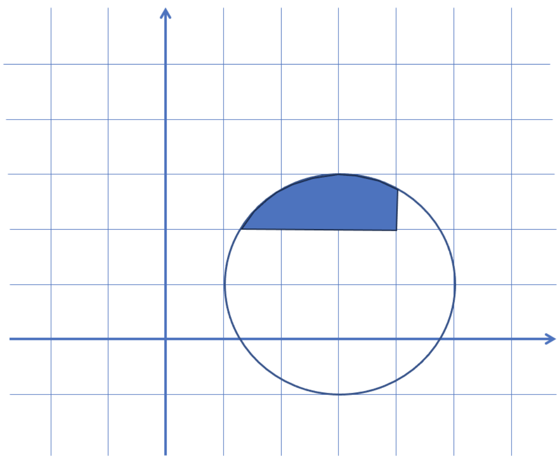
1. Soit A le point du plan de coordonnées $(1, 3)$. Quelle est l'équation caractérisant les affixes des points du cercle de centre A et de rayon 2 ?
2. Généraliser le résultat précédent au cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon r.
3. Soient $P(1, 3)$ et $Q(-1, 2)$ deux points du plan. Quelle est l'équation caractérisant les affixes des points de la médiatrice de $[PQ]$?
4. Généraliser le résultat de la question précédente à la médiatrice des points $P(a, b)$ et $Q(c, d)$.

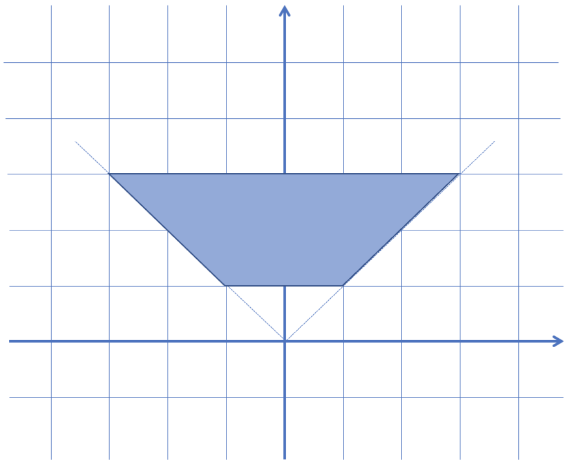
Exercice 13. Par un raisonnement géométrique, trouver et dessiner pour chacun des cas suivants l'ensemble des points dont l'affixe z satisfait la condition indiquée.

$a)\quad |z-3| = |z-1+i| \qquad b)\quad |z+2-i| = \sqrt{3} \qquad c)\quad |z-1+2i| \leq 2 \qquad d)\quad \left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$

$e)\quad \mathcal{R}e(z) \leq 2, \mathcal{I}m(z) \leq 1$ et $|z| \leq 3 \qquad f)\quad -\dfrac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \dfrac{\pi}{2}$ et $2 \leq |z| < 3$

Exercice 14. Par quelle(s) condition(s) sur leurs affixes z peut-on caractériser l'ensemble des points de la zone grisée des dessins ci-dessous ?





Exercice 15. Pour un point M du plan, d'affixe z quelconque, placer dans le plan les points d'affixe $2z$, $-3z$, $0.5\,\overline{z}$, iz.

Exercice 16. Mettre sous forme algébrique les expressions suivantes :

$a)\ \dfrac{5-5i}{4-3i} \qquad b)\ \dfrac{3+2i}{3-2i} \qquad c)\ \dfrac{3+i}{2-i} \qquad d)\ \dfrac{1+i}{3+4i} \qquad e)\ \dfrac{a+ib}{a-ib} \qquad f)\ \dfrac{(1-2i)^2}{(1+2i)^2}$

Exercice 17. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 1$, et $Z = \dfrac{z+2i}{z-1}$.

Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que :

a) Z soit un nombre réel b) Z soit un nombre imaginaire pur

Exercice 18. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$e^{2i\pi} \qquad e^{i\pi} \qquad e^{-i\pi} \qquad e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad 4\,e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

Exercice 19. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$a)\ i \qquad b)\ -1 \qquad c)\ -i \qquad d)\ (-i)^7 \qquad e)\ \overline{e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$f)\ \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{-2} \qquad g)\ \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5 \qquad h)\ \dfrac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}}} \qquad i)\ -2e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad j)\ ie^{-i\frac{\pi}{6}}$

$k)\ -ie^{i\frac{\pi}{4}} \qquad l)\ \left(\overline{2e^{i\frac{\pi}{7}}}\right)^{-3} \qquad m)\ \overline{\left(\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{-2}} \qquad n)\ \left(\dfrac{4e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^{-2} \qquad o)\ \left(\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{3\,e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^{-1}$

Exercice 20. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$a)\ 1+i \quad b)\ 1-i \quad c)\ \dfrac{1}{1+i} \quad d)\ -2+2i \quad e)\ (1+i)^9$

$f)\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \quad g)\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \quad h)\ i+\sqrt{3} \quad i)\ \dfrac{1+i}{i+\sqrt{3}} \quad j)\ \dfrac{(-1+i)^4}{1+i\sqrt{3}}$

$k)\ (1-i\sqrt{3})^{10} \quad l)\ \dfrac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i\sqrt{3})^5} \quad m)\ \dfrac{(\sqrt{3}+i)^8}{(\sqrt{3}-i)^8} \quad n)\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{17}$

Exercice 21. Résoudre les équations suivantes et placer les solutions dans le plan complexe :

$a)\ Z^2=8-6i \quad b)\ Z^2=-3+4i \quad c)\ Z^2=7+24i \quad d)\ Z^2=9+40i$

Exercice 22. Résoudre les équations suivantes et placer les solutions dans le plan complexe :

$a)\ X^2+3=0 \quad b)\ X^2-X+6=0 \quad c)\ X^2-4X+5=0 \quad d)\ X^2-2X+4=0$

Exercice 23. Résoudre les équations suivantes et placer les solutions dans le plan complexe :

$a)\ z^2+(1-5i)z+2i-6=0 \quad b)\ z^2-(3+4i)z+7i-1=0 \quad c)\ 2z^2+(5+i)z+2+2i=0$

Pour vous entrainer...

Exercice 24. Mettre sous forme algébrique les expressions suivantes, et placer dans le plan complexe les différents termes mis en jeu.

$a)\ (1-i)^2 \quad b)\ (3-i)^2 \quad c)\ (2+3i)^2 \quad d)\ (a-ib)^2$

$e)\ (2-i)(3-4i) \quad f)\ (1+2i)\overline{(4-2i)} \quad g)\ (1-3i)^3 \quad h)\ \overline{(2-i)}^3$

$i)\ (1+3i)(1-3i) \quad j)\ (2-i)(2+i) \quad k)\ (-1+2i)^2+(-1-2i)^2 \quad l)\ \overline{(1+2i)}(3-4i)$

Exercice 25. Simplifier les expressions suivantes :

$a)\ \mathcal{R}e((2+i)(3-4i)) \quad b)\ \mathcal{R}e((-1+i)(2+3i)) \quad c)\ \mathcal{I}m(-i(2+i)) \quad d)\ \mathcal{I}m(\overline{(2-i)}(1-2i))$

Exercice 26. Mettre sous forme algébrique les expressions suivantes :

$a)\ \dfrac{1-5i}{1+2i} \quad b)\ \dfrac{2-3i}{3-2i} \quad c)\ \dfrac{1+i}{2+i} \quad d)\ \dfrac{2-2i}{2+4i} \quad e)\ \dfrac{a-ib}{2a+ib} \quad f)\ \dfrac{(1+i)^2}{(1-2i)^2}$

Exercice 27. Par un raisonnement géométrique, trouver pour chacun des cas suivants l'ensemble des points dont l'affixe z satisfait la condition indiquée.

$a)\ |1+i-z|=|z-4+2i| \quad b)\ |z+3-2i|=5 \quad c)\ |z-2+i|>1$

Exercice 28. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad e^{i\frac{\pi}{2}} \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} \quad 2\,e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Exercice 29. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$(e^{i\frac{3\pi}{4}})^3 \quad (2e^{-i\frac{\pi}{6}})^{-3} \quad \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2} \quad \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^3 \quad \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^6\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^6 \quad \left(\overline{3e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^2$$

$$\overline{\left(2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{-2}} \quad \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\,e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^{-2} \quad \frac{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5}{\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^7\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^4} \quad \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{-3}\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4 \quad \frac{\left(ie^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6}{\left(-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{-2}}$$

Exercice 30. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$a)\ \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)$ $\quad b)\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\quad c)\ (1+i)e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad d)\ \frac{1}{\sqrt{3}-i}$

$e)\ \frac{1-i}{i-\sqrt{3}}$ $\quad f)\ \frac{(1-i\sqrt{3})^3}{(1+i\sqrt{3})^3}$ $\quad g)\ \frac{(\sqrt{3}+i)^8}{(\sqrt{3}-i)^8}$ $\quad h)\ \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{57}$

Exercice 31. Résoudre les équations suivantes et placer les solutions dans le plan complexe :

$a)\ X^2-X+3=0$ $\quad b)\ 2X^2-X+5=0$ $\quad c)\ 3X^2-X+1=0$ $\quad d)\ X^2+2X+4=0$

$e)\ Z^2=1+i$ $\quad f)\ Z^2=7-24i$ $\quad g)\ Z^2=3+4i$ $\quad h)\ Z^2=1-3i$

Exercice 32. Résoudre les équations suivantes et placer les solutions dans le plan complexe :

$a)\ z^2-(3+2i)z+5+5i=0$ $\quad b)\ z^2+(2-i)z-13+11i=0$ $\quad c)\ z^2+(3-3i)z-5i=0$

Pour aller plus loin...

Exercice 33.

1. Résoudre l'équation $Z^2=1+i$ de deux façons différentes (via la forme exponentielle et via la forme algébrique).
2. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.
3. Retrouver ces valeurs en utilisant les formules de trigonométrie $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ et $\cos^2 a+\sin^2 a=1$.

Exercice 34. On considère les nombres complexes $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2=e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Déterminer les écritures sous formes algébriques et exponentielles de z_1z_2.
3. En déduire les valeurs exactes de $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice 35. Trouver les valeurs du paramètre réel a pour lesquelles le module du nombre complexe z est égal à 1. Pour les valeurs de a trouvées, mettre z sous forme exponentielle.

$a)\ z=\frac{(1+i)}{(1-ai)}$ $\quad b)\ z=\frac{(1+i)^2}{(1+ai)}$ $\quad c)\ z=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2(\sqrt{3}+2i)^2}{7(\sqrt{3}+ai)^2}$ $\quad d)\ z=\frac{a+2i}{1-ai}$

Exercice 36. Montrer que : $\forall w,z\in\mathbb{C},\quad |z+w|^2+|z-w|^2=2|z|^2+2|w|^2$.
Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 37. Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$. Montrer que $\frac{z+i}{1+iz}$ est un nombre réel si et seulement si $|z|=1$.

Exercice 38.

1. En raisonnant sur le cercle trigonométrique, exprimer $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{6\pi}{5}$ et $\cos\frac{8\pi}{5}$ en fonction de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$. Rappeler par ailleurs la formule reliant $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$.

2. Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. En utilisant les connaissances sur les suites géométriques, ou en raisonnant sur le cercle trigonométrique, calculer $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.
3. En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{\pi}{5}$.

Exercice 39.

1. Trouver les racines troisièmes de l'unité (c'est-à-dire les nombres z tels que $z^3 = 1$). Comment peut-on les exprimer en fonction du nombre $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
2. Les représenter sur le cercle trigonométrique.
3. Montrer que la somme des racines troisièmes de 1 vaut 0.
4. Trouver les racines troisièmes de $-8i$.

Exercice 40. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\quad z^n + 1 = 0.$

Exercice 41. Déterminer les nombres complexes z tels que :

$a)\quad z^2 + |z| - 2 = 0 \qquad b)\quad z|z| - 2z = i \qquad c)\quad z^2 = \bar{z} \qquad d)\quad z^2 - z = |z|^2 - |z|$

Exercice 42. Déterminer les nombres complexes z et w tels que

$$a)\quad \begin{cases} zw^2 = 1 \\ z^2 + w^4 = 2 \end{cases} \qquad\qquad b)\quad \begin{cases} z\bar{w} = i \\ |z|^2 w + z = 1 \end{cases}$$

Exercice 43. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des nombres complexes z tels que :

$a)\quad |1 - z| \leq \dfrac{1}{2} \qquad b)\quad |(1-i)z - 3i| = 3 \qquad c)\quad Re(1 - z) \leq 2 \qquad d)\quad \mathcal{R}e(iz) \geq 1$

$e)\quad \left|1 - \dfrac{1}{z}\right|^2 = 2 \qquad f)\quad z^7$ et $\dfrac{1}{z^2}$ soient conjugués $\qquad g)\quad \dfrac{|z-3|}{|z+3|} > 2 \qquad h)\quad \dfrac{|z-3|}{|z-5|} < 1$