

Fiche d'exercices n°4 : fonctions d'une variable réelle

Prenez l'habitude de vérifier systématiquement vos résultats, par exemple avec www.wolframalpha.com.

Pour réviser...

Exercice 1. En utilisant les identités remarquables, développer A et factoriser B et C :

$$A(x) = (x + \sqrt{2})^2 - (x + 3)(x - 3), \quad B(x) = x^2 - 3, \quad C(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

Exercice 2. Réduire les fractions suivantes :

$$F(x) = \frac{2}{4-x} + \frac{1}{x-1} \quad G(x) = \frac{2}{x(x+1)} - \frac{1}{x} + \frac{4x}{x+1} \quad H(x) = \frac{3x}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x}{x-1}$$

Exercice 3. Calculer les expressions suivantes (on simplifiera les fractions le plus possible) :

$$A = \frac{2(3x-1)}{4x} \times \frac{1}{4} \times \frac{x^2+x}{3} \quad (\text{pour } x \neq 0) \quad B = \frac{2(x+3)^2+1}{x-1} + \frac{3x}{x+4} \quad (\text{pour } x \notin \{-4; 1\})$$

Exercice 4. Etudier le signe des expressions suivantes :

$$a) \quad (x^2 - 1)(x^2 - 3) \quad b) \quad \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad c) \quad \frac{4x^2 - x - 2}{x + 1} + 1 \quad d) \quad x - \frac{1}{x}$$

Exercice 5. Soit P un polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

1. Montrer que 1 est racine de P
2. Montrer que $P(x) = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
3. Factoriser complètement le polynôme P
4. En faisant un tableau de signe, résoudre l'inéquation $P(x) \leq 0$

Exercice 6. Etudier le signe de $E(x) = (x - 3)^2 - (3x + 1)^2$, et en déduire le domaine de définition de la fonction $f(x) = \ln((x - 3)^2 - (3x + 1)^2)$

Exercice 7. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$(a) \quad x^2 - 2x - 3 > 0 \quad (b) \quad 2x^2 - 7x + 3 \leq 0 \quad (c) \quad x^4 + 3x^2 - 4 \leq 0$$

Exercice 8. Interpréter graphiquement les (in)équations suivantes, puis les résoudre dans \mathbb{R} :

$$(a) \quad |x + 3| \geq 1 \quad (b) \quad 1 < |1 - x| \leq 5 \quad (c) \quad |x + 3| = |x - 5| \quad (d) \quad |x + 1| = |x^2 + x - 2|$$

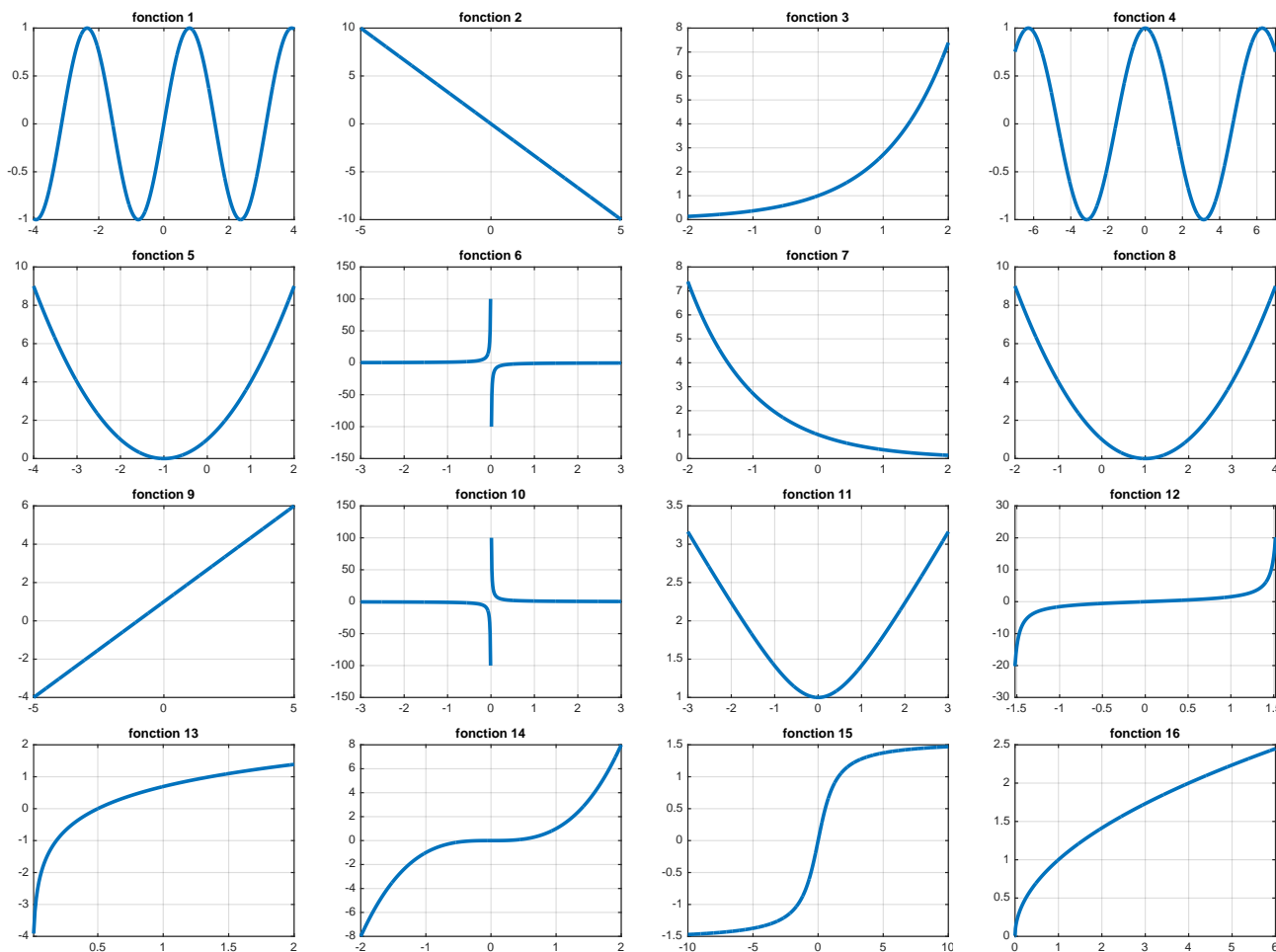
Exercice 9. Soit la fonction $f(x) = |x + 1| - |2x - 1|$

1. Simplifier l'expression de f et tracer sa courbe représentative.
2. En déduire graphiquement (sans calcul ni preuve) les points où f n'est pas dérivable et les solutions de $f(x) \geq \frac{3}{2}$.

Exercice 10. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\sqrt{x + 4} \leq x + 2$

Exercice 11. Associer les dessins des fonctions aux définitions du tableau ci-dessous.

$A(x) = -2x$		$B(x) = \exp(-x)$		$C(x) = 1/x$		$D(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
$E(x) = \ln(2x)$		$F(x) = \sin(2x)$		$G(x) = \tan(x)$		$H(x) = (x - 1)^2$
$I(x) = \exp(x)$		$J(x) = -1/x$		$K(x) = x^3$		$L(x) = (x + 1)^2$
$M(x) = \arctan(x)$		$N(x) = \sqrt{x}$		$O(x) = x + 1$		$P(x) = \cos(x)$



Exercice 12. Vrai ou Faux ?

- a) $\ln(72) = 2 \ln(3) + 3 \ln(2)$ b) $\ln(0.08) = 3 \ln(2) - 2 \ln(5)$ c) $\ln(0.04) = 2 \ln(2) - 2 \ln(5) - \ln(4)$
d) $e^{72} = (e^6)^{12}$ e) $e^{72} = e^6 e^{12}$ f) $e^{72} = (e^{36})^2$ g) $e^{72} = e^{36} e^2$

Exercice 13. Calculer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ les expressions suivantes :

$$\ln(1.5) \quad \ln(16) \quad \ln(\sqrt[3]{9}) \quad \ln(0.25e) \quad \ln(2\sqrt{2})$$

Exercice 14. Résoudre dans \mathbb{R} les (in)équations suivantes :

- a) $\ln(1 - 2x) = \ln(x + 2) + \ln(3)$ b) $2e^{2x} - 5e^x = -2$ c) $\ln(2 - x) \leq \ln(2x + 1) - \ln(3)$
d) $e^{x^2} = 1/2$ e) $e^{x+1} = 2$ f) $(2x - 7) \ln(x + 2) > 0$
g) $e^{2x} > 3e^x$ h) $e^{x-1} \leq 1$ i) $\frac{e^x - 1}{e^{-x/2} - e^{x/2}} = 3$

Exercice 15. Remplir le tableau suivant :

fonction	domaine de définition	dérivée	allure du graphe	remarques diverses (valeurs spéciales, ...)
$f(x) = ax$ (distinguer selon le signe de a)				
$f(x) = x^2$				
$f(x) = x^3$				
$f(x) = \frac{1}{x}$				
$f(x) = \sqrt{x}$				
$f(x) = \sin x$				

fonction	domaine de définition	dérivée	allure du graphe	remarques diverses (valeurs spéciales, ...)
$f(x) = \cos x$				
$f(x) = \tan x$				
$f(x) = \ln x$				
$f(x) = e^x$				

Les différents éléments de l'étude de fonctions... _____

Exercice 16. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 3}$$

$$f_2(x) = \frac{-x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$f_3(x) = \sqrt{\sin x}$$

$$f_4(x) = \ln(x^2 + 2x - 3)$$

$$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5} - 2x}$$

$$f_6(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}}$$

Exercice 17. Déterminer les valeurs du paramètre b pour que la fonction f soit continue sur \mathbb{R} .

$$f_1(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 - bx + 3 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} bx^2 - x + 1 & \text{si } x > 1 \\ -bx^2 + 3x + 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Exercice 18. Soit $f(x) = 3x^2 - 5x$.

Calculer la dérivée f' de f , et étudier son signe. En déduire le tableau de variation de f .

Exercice 19. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 f_1(x) = 3x^2 - 4x + 5 & f_2(x) = x^n - nx & f_3(x) = \frac{1}{3x+2} & f_4(x) = \frac{x-2}{2x+3} \\
 f_5(x) = \frac{4x^2+x+2}{x^2+x} & f_6(x) = \sqrt{x^2-4x} & f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & f_8(x) = (x-1)\sqrt{x} \\
 f_9(x) = (x(x-2))^{1/3} & f_{10}(x) = \frac{1}{\cos x} & f_{11}(x) = x \tan x & f_{12}(x) = \sqrt{1+\cos x} \\
 f_{13}(x) = \sin(3x) & f_{14}(x) = \cos(2x) - \sin(2x) & f_{15}(x) = x \sin x & f_{16}(x) = \cos(x^n) \\
 f_{17}(x) = \sin \sqrt{x} & f_{18}(x) = \frac{1}{e^x+3} & f_{19}(x) = e^{3x} & f_{20}(x) = e^{x^2} \\
 f_{21}(x) = e^{\sin x} & f_{22}(x) = e^x \sin(x) & f_{23}(x) = e^{\sqrt{x}} & f_{24}(x) = \sqrt{e^x+1} \\
 f_{25}(x) = \frac{e^{2x}}{e^{3x}+1} & f_{26}(x) = (x^2+x+1)e^x & f_{27}(x) = x \ln x - 1 & f_{28}(x) = e^{1+\ln x} \\
 f_{29}(x) = \sin(\ln x) & f_{30}(x) = \frac{x}{\ln x} & f_{31}(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1) & f_{32}(x) = \ln(x^2) \\
 f_{33}(x) = \ln(1 + \sin(x^2)) & f_{34}(x) = (1+x)^{2x} & f_{35}(x) = x^{1+x} & f_{36}(x) = (\sin x)^{\cos x}
 \end{array}$$

Exercice 20. Calculer les dérivées suivantes :

$$(\sin(2x))'' \quad (\cos(3x))'' \quad (e^{-2x})'' \quad (e^{x^2})'' \quad (\ln(3x))''$$

Exercice 21. Trouver les valeurs des paramètres réels a et b pour lesquelles la fonction f est solution de l'équation différentielle indiquée :

- (1) $f(x) = \cos(ax)$ pour $f''(x) + 4f(x) = 0$
- (2) $f(x) = 2 \sin(ax) + 3 \cos(ax)$ pour $f''(x) + f(x) = 0$
- (3) $f(x) = e^{ax}$ pour $f''(x) - 4f(x) = 0$
- (4) $f(x) = e^{ax}$ pour $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = 0$
- (5) $f(x) = e^{ax} \cos(bx)$ pour $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

Exercice 22. Pour chacune des limites suivantes, indiquer s'il y a une forme indéterminée (FI) et préciser son type, puis proposer une méthode adaptée pour lever cette FI, et faire le calcul.

$$\begin{array}{lll}
 a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+5) & b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x - 2) & c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3 - x^2 + 1} \\
 d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x+1}) & e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^3+1}) & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x^2+x+6} \\
 g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}} & h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} & i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \\
 j) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|-1}{\sqrt{x}-1} & k) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x-4}}{x+2} & l) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} \\
 m) \lim_{x \rightarrow 1} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) & n) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2x} & o) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{2x^2 - x - 2} \\
 p) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x-1}) & q) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) & r) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \\
 s) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{3x^3 - 2x^2 - x - 2} & t) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4 + 2x - 1}{x^4 - x - 2} & u) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x-3}) \\
 v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x+ax^3} & w) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - xe^x}{x^2} & x) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x+7}
 \end{array}$$

Exercice 23. Idem exercice précédent :

$$\begin{array}{lll}
 a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} & c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x} \\
 d) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} & e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\cos x}}{x^2 + 1} & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x \ln(x+2)) \\
 g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} & h) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} & i) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \\
 j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 + 4x^3 + x^2}{-3x^2 + 50x} & k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^5 + 4x^3 + x^2}{-3x^2 + 50x} & l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + |x|}{x} \\
 m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2} & n) & o) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}
 \end{array}$$

Exercice 24. Soit la fonction $f(x) = 1 - x - \frac{1}{x}$ ayant pour domaine de définition \mathbb{R}^* . Déterminer l'équation d'une asymptote oblique à la courbe représentative C_f de f , ainsi que sa position par rapport à C_f .

Exercice 25. Déduire de chacune des limites suivantes (lorsque c'est possible) l'équation d'une asymptote verticale ou horizontale à la courbe représentative de la fonction f .

$$\begin{array}{lll}
 (a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 & (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty & (c) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty \\
 (d) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 & (e) \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty &
 \end{array}$$

Exercice 26. On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, et calculer les asymptotes à la courbe représentative de f (si elles existent).

Exercice 27. Etude de la fonction $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1. Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est impaire pour réduire son domaine d'étude à \mathbb{R}^+ .
3. Etudier la limite de f en $+\infty$. En déduire celle en $-\infty$.
4. Calculer f' et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative

Exercice 28. Etude de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + 2 + \ln \frac{x-1}{x+1}$.

1. Donner l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
2. Etudier les limites de f aux bornes de \mathcal{D}_f . En déduire que la courbe représentative \mathcal{C}_f de f admet deux asymptotes verticales, D_1 et D_2 .
3. Calculer f' et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variations de f .
5. Montrer que \mathcal{C}_f admet une asymptote oblique Δ . Préciser la position de \mathcal{C}_f par rapport à la droite Δ .
6. Tracer \mathcal{C}_f , Δ , D_1 et D_2 dans le repère cartésien.

Exercice 29. Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1} \quad f_2(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} \quad f_3(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad f_4(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

Exercice 30. Trouver la fonction réciproque de f et calculer sa dérivée :

$$f_1(x) = e^{2x} + 3 \quad \text{de } \mathbb{R} \text{ vers }]3, +\infty[\qquad f_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{de }]0, +\infty[\text{ vers }]1, +\infty[$$

Pour vous entraîner...

Exercice 31. Simplifier le plus possible les expressions suivantes :

$$C = \frac{1}{\frac{1+x}{2x}} \quad (\text{pour } x \notin \{-1; 0\}) \qquad D = \frac{\frac{5}{x} - 3}{\frac{1}{x^2}} \quad (\text{pour } x \neq 0)$$

$$E = \frac{x^3 + 3x^2 - x}{x(2x+1)} \quad (\text{pour } x \notin \{-\frac{1}{2}; 0\}) \qquad F = \frac{2x^2 - 12x + 18}{5(x-3)} \quad (\text{pour } x \neq 3)$$

Exercice 32. Etudier le signe des expressions suivantes :

$$a) \quad -x^2 + 4x - 1 \qquad b) \quad 5x^2 - 3 \qquad c) \quad (x-3)^2 - (3x+1)^2 \qquad d) \quad 5x - 6 + x^2$$

Exercice 33. Etudier le signe de $(-3x^2 + 8x + 3)(x - 5)$ et en déduire le domaine de définition de

$$f(x) = \frac{\sqrt{(-3x^2 + 8x + 3)(x - 5)}}{x - 2}$$

Exercice 34. Etudier le signe de $\frac{2x^2 - x - 4}{x - 1}$ et en déduire le domaine de définition de

$$g(x) = \ln\left(\frac{2x^2 - x - 4}{x - 1}\right)$$

Exercice 35. Déterminer les valeurs du paramètre b pour que la fonction g soit continue sur \mathbb{R} .

$$g_1(x) = \begin{cases} bx + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ bx^3 + 2x - 3 & \text{si } x < 1 \end{cases} \qquad g_2(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + x + b & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{x^2}{2} - x - 2b & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Exercice 36. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = (x^2 + 3x + 1)^3 \qquad f_2(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} \qquad f_3(x) = 1 + \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^3$$

Exercice 37. Etudier le signe de $E(x) = 10x - 6 + x^2$ et utiliser ce résultat pour dresser le tableau de variation de la fonction $g(x) = 5x^2 - 6x + \frac{1}{3}x^3$.

Exercice 38. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{llll} f_1(x) = \frac{1}{x^2 + 1} & f_2(x) = \frac{1-x}{x+3} & f_3(x) = \frac{x}{x^2 + 3x + 1} & f_4(x) = (x^2 - x)^{1/3} \\ f_5(x) = \sqrt{3x+4} & f_6(x) = \frac{\sin x}{\cos x} & f_7(x) = \sin(3x) + 2 \cos(3x) & f_8(x) = \frac{1}{1 + \cos^2 x} \\ f_9(x) = e^{-7x} & f_{10}(x) = e^{\cos x} & f_{11}(x) = \frac{e^{-x}}{e^{2x} + 1} & f_{12}(x) = e^{2x} \cos(3x) \\ f_{13}(x) = \ln(\ln x) & f_{14}(x) = \ln(\cos x) & f_{15}(x) = x^x & f_{16}(x) = x^{\ln x} \end{array}$$

Exercice 39. Trouver les valeurs des paramètres réels a et b pour lesquelles la fonction f est solution de l'équation différentielle indiquée :

- (1) $f(x) = \sin(ax)$ pour $f''(x) + 9f(x) = 0$
- (2) $f(x) = e^{ax}$ pour $f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0$
- (3) $f(x) = xe^{ax}$ pour $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 0$
- (4) $f(x) = e^{ax} \sin(bx)$ pour $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

Exercice 40. Pour chacune des limites suivantes, indiquer s'il y a une forme indéterminée (FI) et préciser son type, puis proposer une méthode adaptée pour lever cette FI, et faire le calcul.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 x }{x}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ | e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x - 3x^2}$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$ | h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + 1)(x - 1)}{x^2 + 2}$ | i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$ |
| j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}}$ | k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin x}$ | l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ |
| m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x + \sin x}$ | n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ | o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\sin x}$ |
| p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}$ | q) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x^2) - \cos x}{x^2}$ | r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3 + 1}$ |
| s) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$ | t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ | u) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$ |

Exercice 41. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, et calculer les asymptotes à la courbe représentative de f (si elles existent).

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1} \quad f_2(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \quad f_3(x) = \frac{2x^3 - x}{x^2 + 1} \quad f_4(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$$

$$f_5(x) = \sqrt{4x^2 + x} \quad f_6(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}}$$

Exercice 42. Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x + 2 + \frac{4}{x - 2} \quad f_2(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \quad f_3(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$$

Exercice 43. Trouver la fonction réciproque de f et calculer sa dérivée :

$$f_1(x) = e^x + 1 \quad \text{de } \mathbb{R} \text{ vers }]1, +\infty[\quad f_2(x) = e^{-7x} + 1 \quad \text{de } \mathbb{R} \text{ vers }]1, +\infty[$$

Pour aller plus loin... _____

Exercice 44. Déterminer les valeurs du paramètre b pour que la fonction f soit continue sur \mathbb{R} .

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} & \text{si } x > 0 \\ x + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x-2} & \text{si } x > 2 \\ x^2 - x + b & \text{si } x \leq 2 \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1} & \text{si } x > 3 \\ b & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} & \text{si } x > 2 \\ bx + \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 2 \end{cases} \quad f_5(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} & \text{si } x > 0 \\ b - \frac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 45. Déterminer, en fonction du paramètre $a > 0$, si f peut être prolongée en une fonction continue sur \mathbb{R} .

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^4 - 1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{\sqrt{ax} - 1}{ax - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\sqrt{ax + 1} - \sqrt{x + 1}}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - 2x} - 1}{\sqrt{1 - x} - 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{(1 + ax)^2 - 1}{(1 + x)^2 - 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 46. Déterminer les valeurs des paramètres a et b pour que f soit dérivable sur \mathbb{R} .

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & \text{si } x < 2 \\ ax + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad f_5(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{5x - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad f_6(x) = \begin{cases} \frac{a}{3 - 2x} + b & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{2x^2 - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 47. Calculer les dérivées n -èmes suivantes :

$$(x^n)^{(n+1)} \quad (x^n)^{(n)} \quad (e^{2x})^{(n)} \quad (\sin x)^{(n)} \quad (\cos x)^{(n)}$$

Exercice 48. Trouver une formule explicite, en fonction de X et n , pour les sommes suivantes :

$$(a) \sum_{k=1}^n kX^{k-1} \quad (b) \sum_{k=1}^n kX^k \quad (c) \sum_{k=1}^n k^2 X^k$$

Exercice 49. Etant donnée une fonction de deux variables $f(x, y)$, on peut calculer ses *dérivées partielles* par rapport à x et y : il s'agit simplement des dérivées usuelles, en dérivant par rapport à l'une des variables et en considérant l'autre constante. Elles sont notées respectivement $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + 3y^2} \quad f_2(x, y) = \frac{1}{5x^2 + y^2} \quad f_3(x, y) = \frac{2x + y}{x^2 + y^2} \quad f_4(x, y) = \frac{x}{x + y} \quad f_5(x, y) = y \cos(xy)$$

Exercice 50. Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\arccos x} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x + 2} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \arctan x}{x}$$

Exercice 51. Trouver la fonction réciproque de f et calculer sa dérivée :

$$f_1(x) = \frac{1}{\sin x} \quad \text{de }]0, \frac{\pi}{2}[\text{ vers }]1, +\infty[\quad f_2(x) = \frac{1}{1 + \cos(2x)} \quad \text{de }]0, \frac{\pi}{2}[\text{ vers }]\frac{1}{2}, +\infty[$$

Exercice 52. Calculer les dérivées suivantes :

$$f_1(x) = \arcsin(x) \quad f_2(x) = \arccos(x) \quad f_3(x) = \arccos(2x) \quad f_4(x) = \arccos(7x)$$

$$f_5(x) = \arcsin(\sqrt{1+x}) \quad f_6(x) = \arcsin(\sqrt{1+2x}) \quad f_7(x) = \arctan x \quad f_8(x) = \arctan(3x)$$

$$f_9(x) = \arctan(2x + 1) \quad f_{10}(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) \quad f_{11}(x) = \arctan(\sqrt{x})$$

Exercice 53. Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\sin x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(3x)}{x^2 + x} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x)}{1 - \sqrt{1-x}} \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(e^x - 1)}{\sqrt{x+1} - 1}$$