Fiche d'exercices n°3 : géométrie et algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Prenez l'habitude de vérifier systématiquement vos résultats, par exemple avec `www.wolframalpha.com`.

Exercice 1. Calculer la norme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ suivants, ainsi que leur produit scalaire.

a) $\overrightarrow{u} = (1, 5),\ \overrightarrow{v} = (3, 1)$ *b)* $\overrightarrow{u} = (\cos\alpha, -\sin\alpha),\ \overrightarrow{v} = (\sin\alpha, \cos\alpha)$

c) $\overrightarrow{u} = (2, 3),\ \overrightarrow{v} = (-3, 2)$ *d)* $\overrightarrow{u} = (1, 0, 2),\ \overrightarrow{v} = (-4, 7, 2)$

e) $\overrightarrow{u} = (-2, 0, 1),\ \overrightarrow{v} = (0, 3, 8)$ *f)* $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1, 2),\ \overrightarrow{v} = (3, 1, 1, -3)$

Exercice 2. Pour quelles valeurs du paramètre t les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils orthogonaux ?

a) $\overrightarrow{u} = (t-1, 2t-3),\ \overrightarrow{v} = (3, -1)$ *b)* $\overrightarrow{u} = (3t, 2+t, -t),\ \overrightarrow{v} = (1, 1, 2)$

c) $\overrightarrow{u} = (t-1, 2t, 2),\ \overrightarrow{v} = (1, 2, -1)$ *d)* $\overrightarrow{u} = (t^2+1, 2t, t^2-1),\ \overrightarrow{v} = (t^2, -t, 1)$

Exercice 3. Calculer la distance entre les points A et B.

a) $A = (3, 4),\ B = (2, 1)$ *b)* $A = (1, 6),\ B = (4, 2)$ *c)* $A = (3, 1, 2),\ B = (1, -1, 1)$

Exercice 4. Pour quelles valeurs du paramètre t les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils colinéaires ?

a) $\overrightarrow{u} = (1-t, 2+t),\ \overrightarrow{v} = (3, 4)$ *b)* $\overrightarrow{u} = (5t, 6),\ \overrightarrow{v} = (6t, 7)$ *c)* $\overrightarrow{u} = (2, 1),\ \overrightarrow{v} = (3-t, 2-t)$

Exercice 5. Calculer les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$ *d)* $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ *e)* $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ *f)* $\begin{vmatrix} 1+i & 1 \\ 3i & -1-i \end{vmatrix}$

Exercice 6. Les 3 vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont-ils coplanaires ?

a) $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3),\ \overrightarrow{v} = (-1, 3, 4),\ \overrightarrow{w} = (1, 0, 2)$ *b)* $\overrightarrow{u} = (1, -1, 1),\ \overrightarrow{v} = (2, 2, 1),\ \overrightarrow{w} = (0, -4, 1)$

Exercice 7. Calculer les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 6 & b & 0 \\ 7 & 1 & c \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ *d)* $\begin{vmatrix} a & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & b & 7 \\ 11 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix}$ *f)* $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$ *g)* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ *h)* $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ *j)* $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ *k)* $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ *l)* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 8. Calculer l'aire du triangle ABC :

a) $A = (1, 0),\ B = (2, 3),\ C = (4, 4)$ *b)* $A = (0, 1),\ B = (2, 1),\ C = (-1, 2)$

c) $A = (2, 1),\ B = (-2, 1),\ C = (1, 1)$ *d)* $A = (1, 1),\ B = (2, 2),\ C = (0, 3)$

Exercice 9. Calculer le volume du tétraèdre ABCD :

a) $A = (0, -1, 0),\ B = (0, 4, 1),\ C = (1, 4, 2),\ D = (0, 0, 2)$

b) $A = (1, 0, 0),\ B = (0, 2, 3),\ C = (1, 4, 4),\ D = (0, -1, 0)$

Exercice 10. Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et vérifier que le vecteur résultat $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

a) $\overrightarrow{u} = (1,0,0),\ \overrightarrow{v} = (0,0,-1)$ *b)* $\overrightarrow{u} = (1,0,0),\ \overrightarrow{v} = (1,1,1)$

c) $\overrightarrow{u} = (2,3,1),\ \overrightarrow{v} = (1,2,1)$ *d)* $\overrightarrow{u} = (1,1,1),\ \overrightarrow{v} = (-3,2,1)$

e) $\overrightarrow{u} = (1,0,1),\ \overrightarrow{v} = (x,0,-1)$ *f)* $\overrightarrow{u} = (\cos\alpha, -\sin\alpha, 0),\ \overrightarrow{v} = (\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$

g) $\overrightarrow{u} = (3,2,-1),\ \overrightarrow{v} = (2,1,z)$ *h)* $\overrightarrow{u} = (1,2,2),\ \overrightarrow{v} = (3,1,1)$

Exercice 11. Trouver l'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

a) $\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ x+y=0\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ 2x+y=1\}$

b) $\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ 2x+y=1\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ x+2y=5\}$

c) $\mathcal{D}_1 = \{(2s-1, s+2) ,\ s \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(1-2t, 3-t) ,\ t \in \mathbb{R}\}$

d) $\mathcal{D}_1 = \{(1+4t, 2+t) ,\ t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(x,y) ,\ x+2y=11\}$

e) $\mathcal{D}_1 = \{(x,y) ,\ 2x-y=3\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(s-1, 3+2s) ,\ s \in \mathbb{R}\}$

f) $\mathcal{D}_1 = \{(1+\lambda, 2-\lambda) ,\ \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(x,y) ,\ x+4y=3\}$

g) $\mathcal{D}_1 = \{(1+t, 2-t) ,\ t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(1+s, 2+s) ,\ s \in \mathbb{R}\}$

h) $\mathcal{D}_1 = \{(5-t, 2t-1) ,\ t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{(1+s, 2+3s) ,\ s \in \mathbb{R}\}$

Exercice 12. Trouver l'équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points A et B.

a) $A = (1,2)\ ,\ B = (3,1)$ *b)* $A = (3,0)\ ,\ B = (2,-1)$ *c)* $A = (1,0)\ ,\ B = (2,3)$

Exercice 13. Trouver le point d'intersection M de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par les points A et B, avec la droite $\mathcal{D}_2$ passant par les points E et F, où $A = (0,1)\ ,\ B = (4,3),\ E = (1,3)\ ,\ F = (3,1)$.

Exercice 14. Trouver la projection orthogonale du point M sur la droite $\mathcal{D}$.

a) $M = (1,2)\ ,\ \mathcal{D} = \{(2t, 1+t), t \in \mathbb{R}\}$ *b)* $M = (1,3)\ ,\ \mathcal{D} = \{(4-t, 2+2t), t \in \mathbb{R}\}$

c) $M = (1,-3)\ ,\ \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , x+2y+3=0\}$ *d)* $M = (1,5)\ ,\ \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , x-y=2\}$

e) $M = (-1,1)\ ,\ \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , -2x+y=3\}$ *f)* $M = (1,0,1)\ ,\ \mathcal{D} = \{(2t, t-1, -t+4), t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 15. Calculer l'aire du triangle déterminé par les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$:
$\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , x+y=0\}$ $\quad \mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , 2x-y=2\}$
$\mathcal{D}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , 4x+y+2=0\}$

Exercice 16. Trouver l'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point M et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

a) $M = (1,2,4),\ \mathcal{P} = \{(x,y,z), x+y+z=3\}$

b) $M = (-1,0,0),\ \mathcal{P} = \{(x,y,z), x+2y+3z=7\}$

c) $M = (1,2,4),\ \mathcal{P} = \{\alpha(1,0,3) + \beta(0,1,0), \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$

d) $M = (1,-2,1),\ \mathcal{P} = \{\alpha(1,-1,1) + \beta(0,1,1), \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$

Exercice 17. Trouver l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P} = \{M + \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} ,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$.

a) $M = (1,0,1),\ \overrightarrow{u} = (1,1,0),\ \overrightarrow{v} = (1,0,0)$ *b)* $M = (1,0,0),\ \overrightarrow{u} = (1,2,3),\ \overrightarrow{v} = (1,0,1)$

Exercice 18. Trouver l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ déterminé par les points A, B et C.

a) $A = (1,0,1),\ B = (1,1,0),\ C = (1,0,0)$ *b)* $A = (2,0,1),\ B = (1,1,1),\ C = (-1,0,-1)$

Exercice 19. Trouver l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant le point A et la droite $\mathcal{D}$.

a) $A=(1,0,1)$, $\mathcal{D}=\{(1+t,2-t,-1+t)\,,t\in\mathbb{R}\}$ *b)* $A=(-1,1,0)$, $\mathcal{D}=\{(1+2t,t,1-t)\,,t\in\mathbb{R}\}$

Exercice 20. Trouver une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

a) $\mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,x+y+z=3\}$ *b)* $\mathcal{P}=\{(x,y,z)\,,x+2y-2z=1\}$

Exercice 21. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans dans $\mathbb{R}^3$. Trouver la forme paramétrique de la droite $\mathcal{D}=\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2$.

a) $\mathcal{P}_1=\{(x,y,z)\,,x+y+z=3\}$, $\mathcal{P}_2=\{(x,y,z)\,,x-2y+z=0\}$

b) $\mathcal{P}_1=\{(x,y,z)\,,x+y-z=-1\}$, $\mathcal{P}_2=\{(x,y,z)\,,x+2y+3z=0\}$

c) $\mathcal{P}_1=\{(x,y,z)\,,2x-z=1\}$, $\mathcal{P}_2=\{(x,y,z)\,,x+y=2\}$

Exercice 22. Trouver une représentation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$.

a) $\mathcal{D}=\{(1,0,2)+t(1,1,1)\,,t\in\mathbb{R}\}$ *b)* $\mathcal{D}=\{(1+t,2-t,t-3)\,,t\in\mathbb{R}\}$

Pour vous entrainer...

Exercice 23. Trouver les valeurs du paramètre t pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}=(-1-t,5+t)$, $\vec{v}=(1,-1)$ *b)* $\vec{u}=(1-t,1)$, $\vec{v}=(3,1-t)$

Exercice 24. Calculer les déterminants suivants :

$$a)\ \begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\qquad b)\ \begin{vmatrix}1&7\\0&2\end{vmatrix}\qquad c)\ \begin{vmatrix}8&0\\3&0\end{vmatrix}\qquad d)\ \begin{vmatrix}1&-7\\3&21\end{vmatrix}\qquad e)\ \begin{vmatrix}e^{i\frac{\pi}{3}}&1+i\\1-i&e^{i\frac{2\pi}{3}}\end{vmatrix}$$

Exercice 25. Calculer les déterminants suivants :

$$a)\ \begin{vmatrix}2&1&4\\5&2&3\\8&7&3\end{vmatrix}\qquad b)\ \begin{vmatrix}1&3&2\\4&1&3\\2&2&0\end{vmatrix}\qquad c)\ \begin{vmatrix}1&0&2\\1&3&4\\0&6&0\end{vmatrix}\qquad d)\ \begin{vmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha&0\\-\sin\alpha&\cos\alpha&1\\5&7&1\end{vmatrix}$$

$$e)\ \begin{vmatrix}X&1&X\\1&1&2\\X&0&2\end{vmatrix}\qquad f)\ \begin{vmatrix}1&x&x^2\\1&y&y^2\\1&z&z^2\end{vmatrix}\qquad g)\ \begin{vmatrix}1&3&2\\1&3&3\\1&2&1\end{vmatrix}\qquad h)\ \begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&2\\2&3&1\end{vmatrix}$$

Exercice 26. Calculer l'aire du triangle ABC :

a) $A=(0,0)$, $B=(-2,1)$, $C=(3,0)$ *b)* $A=(t,1+t)$, $B=(1,t)$, $C=(2-t,1-t)$

Exercice 27. Calculer le volume du tétraèdre ABCD :

a) $A=(1,1,0)$, $B=(0,1,1)$, $C=(1,0,1)$, $D=(1,1,1)$

b) $A=(1,2,3)$, $B=(0,1,-1)$, $C=(2,1,0)$, $D=(0,1,0)$

Exercice 28. Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et vérifier que le vecteur résultat $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est bien orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a) $\vec{u}=(1,2,1)$, $\vec{v}=(0,1,-1)$ *b)* $\vec{u}=(3,2,0)$, $\vec{v}=(-1,2,-1)$

Exercice 29. Trouver l'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

a) $\mathcal{D}_1=\{(1+2s,3-s)\,,\ s\in\mathbb{R}\}$, $\mathcal{D}_2=\{(x,y)\,,\ x-2y+1=0\}$

b) $\mathcal{D}_1=\{(s-1,s-2)\,,\ s\in\mathbb{R}\}$, $\mathcal{D}_2=\{(3-t,2-t)\,,\ t\in\mathbb{R}\}$

c) $\mathcal{D}_1=\{(x,y)\,,\ 2x+y+1=0\}$, $\mathcal{D}_2=\{(1+t,3-2t)\,,\ t\in\mathbb{R}\}$

d) $\mathcal{D}_1=\{(t-2,t-1)\,,\ t\in\mathbb{R}\}$, $\mathcal{D}_2=\{(-1+2s,3-s)\,,\ s\in\mathbb{R}\}$

Exercice 30. Trouver l'équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points A et B.

a) $A = (2,3)\ ,\ B = (3,2)$ *b)* $A = (4,1)\ ,\ B = (2,2)$ *c)* $A = (-2,1)\ ,\ B = (1,3)$

Exercice 31. Trouver le point d'intersection M de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par les points A et B, avec la droite $\mathcal{D}_2$ passant par les points E et F, où $A = (2,0)\ ,\ B = (4,4),\ E = (1,1)\ ,\ F = (5,3)$.

Exercice 32. Trouver la projection orthogonale du point M sur la droite $\mathcal{D}$.

a) $M = \left(\frac{3}{2}, 2\right)\ ,\ \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,, 2x + y = 3\}$ *b)* $M = (4,0)\ ,\ \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,, 3x - y = 2\}$

c) $M = (1,-2,1)\ ,\ \mathcal{D} = \{(t-2, 1-2t, 2t+1)\,, t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 33. Trouver l'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point M et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

a) $M = (2,1,-3),\ \mathcal{P} = \{(x,y,z)\,, 2x - y + z = 1\}$

b) $M = (-1,2,0),\ \mathcal{P} = \{\alpha(0,1,2) + \beta(-1,1,1)\,, \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$

Exercice 34. Trouver l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P} = \{M + \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}\ ,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}$.

a) $M = (0,-1,1),\ \overrightarrow{u} = (2,1,1),\ \overrightarrow{v} = (0,1,1)$ *b)* $M = (1,2,-1),\ \overrightarrow{u} = (1,0,1),\ \overrightarrow{v} = (-1,0,1)$

Exercice 35. Trouver l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ déterminé par les points A, B et C.

a) $A = (1,2,-1),\ B = (-1,2,1),\ C = (1,0,1)$ *b)* $A = (2,-2,0),\ B = (1,-1,1),\ C = (0,0,1)$

Exercice 36. Trouver l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant le point A et la droite $\mathcal{D}$.

a) $A = (-1,2,1),\ \mathcal{D} = \{(1-t, 1+t, 1+2t)\,, t \in \mathbb{R}\}$ *b)* $A = (1,1,1),\ \mathcal{D} = \{(t, 1-t, 2+t)\,, t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 37. Trouver une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

a) $\mathcal{P} = \{(x,y,z)\,, 2x - y + z = 1\}$ *b)* $\mathcal{P} = \{(x,y,z)\,, x - 2y - z = 2\}$

Exercice 38. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans dans $\mathbb{R}^3$. Trouver la forme paramétrique de la droite $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

a) $\mathcal{P}_1 = \{(x,y,z)\,, 2x + y - z = 3\},\ \mathcal{P}_2 = \{(x,y,z)\,, x + 2y + z = 0\}$

b) $\mathcal{P}_1 = \{(x,y,z)\,, -x + y - z = 1\},\ \mathcal{P}_2 = \{(x,y,z)\,, x - 2y - z = 2\}$

Exercice 39. Trouver une représentation cartésienne de la droite $\mathcal{D} = \{(1,1,-1) + t(0,2,1)\,, t \in \mathbb{R}\}$

Pour aller plus loin...

Exercice 40. On considère dans $\mathbb{R}^2$ le parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u} = (a,b) \neq (0,0)$ et $\overrightarrow{v} = (c,d) \neq (0,0)$, c'est-à-dire le parallélogramme $EFGH$, où $E = (0,0)$, $F = (a,b)$, $G = (a+c, b+d)$ et $H = (c,d)$.

1. Trouver la projection orthogonale P du point H sur la droite passant par les points E et F.
2. Calculer la distance entre P et H.
3. Calculer l'aire du parallélogramme $EFGH$.

Exercice 41. Un rayon de lumière est envoyé depuis le point $A = (1,0,1)$ dans la direction du vecteur $\overrightarrow{v}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $\overrightarrow{v}$ le rayon réfléchi dans le miroir d'équation $x - y + z = 1$ passe-t-il par le point $T = (3,2,3)$?

Exercice 42. Un rayon de lumière est envoyé depuis le point $A = (1,1,2)$ dans la direction du vecteur $\overrightarrow{v} = (-1,-1,-1)$. Trouver l'équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $M = (2,0,0)$ pour lequel le rayon réfléchi dans le miroir $\mathcal{P}$ passe par le point $T = (-2,-2,1)$.