Fiche d'exercices n°2 : sommes et produits

Prenez l'habitude de vérifier systématiquement vos résultats, par exemple avec `www.wolframalpha.com`.

Exercice 1. Calculer les sommes et les produits suivants.

$$a)\ \sum_{k=1}^{3} k \qquad b)\ \sum_{k=1}^{3}(2k-1) \qquad c)\ \sum_{k=1}^{3} k^2 \qquad d)\ \sum_{k=0}^{2}(2k+1) \qquad e)\ \sum_{k=0}^{2} 2^k$$

$$f)\ \prod_{k=1}^{4} k \qquad g)\ \sum_{k=-2}^{2} k \qquad h)\ \prod_{k=2}^{4} k \qquad i)\ \sum_{k=1}^{3} 5 \qquad j)\ \prod_{k=3}^{5} 2$$

Exercice 2. Écrire les sommes et les produits suivants en utilisant les symboles $\sum$ et $\prod$.

a) $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

b) $4+5+6+7+8+9$

c) $0+1+2+3+4+5$

d) $3+3+3+3+3+3$

e) $2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7$

f) $1\times \frac{1}{2}\times \frac{1}{3}\times \frac{1}{4}\times \frac{1}{5}$

g) $7\times 7\times 7\times 7\times 7\times 7$

h) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$

i) $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$

j) $3+5+7+9+11+13+15+17+19+21$

k) $1+3+5+7+9+11+13+15$

l) $2+4+6+8+10+\cdots+98+100$

Exercice 3. Simplifier les expressions suivantes, pour les écrire de façon plus concise :

$$a)\ a_1+\sum_{k=2}^{n} a_k \qquad b)\ a_0+\sum_{k=1}^{n+2} a_k \qquad c)\ \sum_{k=0}^{3} a_k+\sum_{k=4}^{n} a_k \qquad d)\ \sum_{k=n+1}^{2n} a_k+\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$e)\ \frac{1}{3}\prod_{k=3}^{7} k \qquad f)\ \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} 3^k}{\prod_{k=1}^{n} 3^k} \qquad g)\ \frac{\prod_{k=1}^{10} 2^k}{\prod_{k=1}^{3} 2^k} \qquad h)\ \frac{\prod_{k=1}^{10} 3^k}{\prod_{k=7}^{10} 3^k}$$

$$i)\ \frac{1}{10}\prod_{k=1}^{10} k \qquad j)\ \sum_{k=1}^{n} 2^k-\sum_{k=1}^{4} 2^k \qquad k)\ \sum_{k=1}^{2n} k-\sum_{k=1}^{n+2} k \qquad l)\ \sum_{k=1}^{n+4} k-\sum_{k=1}^{n-1} k$$

Exercice 4. Calculer les sommes et les produits suivants :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} 5 \qquad b)\ \sum_{k=1}^{n+2} 7 \qquad c)\ \prod_{k=2}^{n} 6 \qquad d)\ \sum_{k=0}^{n} 4 \qquad e)\ \prod_{k=0}^{n+3} 5 \qquad f)\ \sum_{k=n}^{2n+1} 8 \qquad g)\ \prod_{k=1}^{5} i$$

Exercice 5. Simplifier les produits suivants :

$$a)\ \prod_{k=1}^{n+2} k \qquad b)\ \prod_{k=3}^{n} k \qquad c)\ \prod_{k=1}^{n} 3k^2 \qquad d)\ \prod_{k=2}^{n}(k-1) \qquad e)\ \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{3}$$

$$f)\ \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{2} \qquad g)\ \prod_{k=2}^{n}\frac{k}{k-1} \qquad h)\ \prod_{k=2}^{n}\frac{k(k+1)}{k-1} \qquad i)\ \prod_{k=1}^{n}(2k+1) \qquad j)\ \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)$$

Exercice 6. Calculer les sommes suivantes :

$$a)\ \sum_{k=2}^{n} \ln(2k^3) \qquad b)\ \sum_{k=2}^{n} (2\,\ln k + \ln(k+1)) \qquad c)\ \sum_{k=1}^{n} (\ln 3 + 3\ln k)$$

Exercice 7. Calculer les sommes suivantes :

$$a)\ \sum_{k=0}^{n} 3^k \qquad b)\ \sum_{k=0}^{n+2} 7^k \qquad c)\ \sum_{k=1}^{n} 2^k \qquad d)\ \sum_{k=2}^{n} 5^k \qquad e)\ \sum_{k=0}^{n} (-2)^k \qquad f)\ \sum_{k=0}^{n} 2^{3k+2}$$

$$g)\ \sum_{k=1}^{n+1} 7^{2k+1} \qquad h)\ \sum_{k=0}^{n+2} \frac{1}{2^k} \qquad i)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{3^{k+2}} \qquad j)\ \sum_{k=0}^{2n-1} 3^{k/2} \qquad k)\ \sum_{k=1}^{n+1} 3^k 5^{2-k} \qquad l)\ \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi k}{n}}$$

Exercice 8. Calculer les sommes suivantes :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} 4k \qquad b)\ \sum_{k=1}^{n} (2k+5) \qquad c)\ \sum_{k=0}^{n+2} 3k \qquad d)\ \sum_{k=2}^{n} (k+4) \qquad e)\ \sum_{k=0}^{n} (k-2) \qquad f)\ \sum_{k=2}^{2n} \frac{k}{2}$$

Exercice 9. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} (1+2ik) \qquad b)\ \sum_{k=1}^{10} (2+ik) \qquad c)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{5k}{2+i} \qquad d)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{k+i}{1+i}$$

Exercice 10. Calculer les sommes suivantes :

$$a)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} \qquad b)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \qquad c)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k+1} 5^{n-k} \qquad d)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{2n-k}$$

$$e)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \qquad f)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k 3^{-k} \qquad g)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{5^k}{2^{n-k}} \qquad h)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k-n}$$

$$i)\ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^k 3^{n-k} \qquad j)\ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k 4^{n-k}$$

Exercice 11. Simplifier les expressions suivantes :

$$a)\ \prod_{k=1}^{20} e^{ik\pi/3} \qquad b)\ \prod_{k=1}^{7} 2e^{ik\pi/8} \qquad c)\ \prod_{k=1}^{6} (1+i)^k$$

$$d)\ \sum_{k=0}^{7} \left(-2+\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^k \qquad e)\ \sum_{k=0}^{7} \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^k \qquad f)\ \sum_{k=0}^{12} (-1+e^{i\pi/3})^k$$

Exercice 12. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer les coefficients α et β tels que $\dfrac{1}{k(k+a)} = \dfrac{\alpha}{k} + \dfrac{\beta}{k+a}$.
En déduire les valeurs des sommes suivantes :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \qquad b)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} \qquad c)\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$$

Pour vous entrainer...

Exercice 13. Simplifier les expressions suivantes, pour les écrire de façon plus concise :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3n+2} k - \sum_{k=2n}^{3n+2} k$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+4} k - \sum_{k=1}^{n-1} k$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} k - \sum_{k=n-1}^{2n-1} k$ *d)* $\dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{2} 2^k}$

e) $\dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{2n+1} 3^k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k}$ *f)* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k$ *g)* $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)^2$ *h)* $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2}(k-2)$

Exercice 14. Calculer les sommes et les produits suivants :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 3$ *b)* $\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1} 2$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a$ *d)* $\displaystyle\prod_{k=3}^{n+1} 2$ *e)* $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{3n+5} 7$ *f)* $\displaystyle\sum_{k=n-2}^{2n+2} 8$

Exercice 15. Simplifier les produits suivants :

a) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1}(5k)$ *b)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+2}(k+3)$ *c)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1}$ *d)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(k-1)(k+1)$ *e)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}k(k+1)$

f) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k}$ *g)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k}{k^2-1}$ *h)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(3k^2)$ *i)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{1}{k}$ *j)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+3}(k+2)$

Exercice 16. Calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln(5k^2)$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2\ln k - \ln(k+1))$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left(\ln\frac{k+1}{3} + \ln\frac{2}{k}\right)$

Exercice 17. Calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3^{3k-1}$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+2}\frac{1}{3^{k-2}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{1+3k}3^{-2(k+1)}$ *d)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2}(-3)^k$ *e)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{i\pi k}{n}}$ *f)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k3^{k+2}}{7^{k+1}}$

Exercice 18. Calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3n}(2k-1)$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1-k}{3}$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ak+b)$ *d)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}3(k+1)$ *e)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{3n}\frac{2-k}{3}$

Exercice 19. Calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{3^k}$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^{k-n}$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k3^{2n-k}$ *d)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k+1}3^{2-k}$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{5^k}{2^{2k}}$ *f)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(3^k)^2$ *g)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}5^k3^{n+k}$

Exercice 20. Calculer les expressions suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1-2k}{5}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{k-2}2^{3-k}$ c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k+1}$ d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{3^k 2^{n-k}}{5^k}$

e) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} j\right)$ f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k}2^{2n-k}$ g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(k+2)$ h) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} 2^{2-k}$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{2n+k}5^{2n-k}$ j) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$

Pour aller plus loin...

Exercice 21. Simplifier les expressions : $\displaystyle\prod_{k=1}^{393} i$; $\displaystyle\prod_{k=1}^{4n+3} i$; $\displaystyle\prod_{k=1}^{8n+5} (1+i)$; $\displaystyle\prod_{k=3}^{200} e^{i\pi/3}$

Exercice 22. Calculer les produits : $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n}(2k)\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\right)$; $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)$; $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k+1)$

Exercice 23. On démontre par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

A l'aide de ces formules, calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k^2+1)$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+2)(3k-2)$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k+1)$

Exercice 24. Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 2^k 3^{n-k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} 2^k 3^{n-k}$

Exercice 25. Calculer le module du nombre complexe : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{ki}{(\sqrt{k}+i)^2}$

Exercice 26. Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k(k-1)}{(k+1)!}$

Exercice 27. Exprimer en fonction de x et n les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(xk)$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(x(2k+1))$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx)$

Exercice 28. On considére une expérience ayant deux issues possibles, que l'on appelle *issue positive* et *issue négative*. Soit $p \in]0,1[$ la probabilité d'avoir une issue positive. On répète plusieurs fois cette expérience dans les mêmes conditions et de façon indépendante.

1. Calculer la probabilité p_k pour que la première expérience positive soit la k-ième.
2. Soit q_1 la probabilité que au moins une expérience parmi les 100 premières soit positive. Exprimer q_1 en fonction de $p_1, \dots, p_{100}$ et donc en fonction de p.
3. Soit q_0 la probabilité que les 100 premières expériences soient toutes négatives. Exprimer q_0 en fonction de p.
4. Les événements *"Au moins une expérience parmi les* 100 *premières est positive"* et *"Les* 100 *premières expériences sont toutes négatives"* sont complémentaires. On devrait donc avoir $q_0 + q_1 = 1$. Est-ce bien ce que vous avez obtenu ?