Fiche d'exercices n°1 : nombres complexes

Prenez l'habitude de vérifier systématiquement vos résultats, par exemple avec `www.wolframalpha.com`.

Exercice 1. Pour chacun des nombres complexes ci-dessous, indiquer sa partie réelle, sa partie imaginaire, son module, un argument, et le placer dans le plan complexe.

$a)$ $1+i$	$b)$ $2-2i$	$c)$ $\sqrt{3}+i$	$d)$ $-i$
$e)$ $-1+i\sqrt{3}$	$f)$ $\overline{-1+i}$	$g)$ -5	$h)$ $a+ia$

Exercice 2. Mettre sous forme algébrique les expressions suivantes, et placer dans le plan complexe les différents termes mis en jeu.

$a)$ $(1+i)^2$	$b)$ $(2-i)^2$	$c)$ $(a+ib)^2$	$d)$ $\overline{(1+i)}(2+i)$
$e)$ $(1+2i)(3+4i)$	$f)$ $(1-3i)\overline{(5+2i)}$	$g)$ $(2+3i)^2\overline{(2+3i)}$	$h)$ $(3+i)^3$
$i)$ $(2+5i)(2-5i)$	$j)$ $(1-4i)(1+4i)$	$k)$ $(2+3i)^2+(2-3i)^2$	$l)$ $(a+bi)^2+(a-bi)^2$

Exercice 3. Simplifier les expressions suivantes :

$a)$ $\mathcal{R}e(3-7i)$	$b)$ $\mathcal{R}e(-\sqrt{7}+2i)$	$c)$ $\mathcal{I}m(\sqrt{5}+i)$	$d)$ $\mathcal{I}m(\overline{2+i})$
$e)$ $\mathcal{R}e((1-i)(3+4i))$	$f)$ $\mathcal{R}e((1+i)(3+i))$	$g)$ $\mathcal{I}m(i(2-i))$	$h)$ $\mathcal{I}m(\overline{(3-i)}(1+2i))$

Exercice 4. Mettre sous forme algébrique les expressions suivantes :

$$a)\ \frac{5-5i}{4-3i}\qquad b)\ \frac{3+2i}{3-2i}\qquad c)\ \frac{3+i}{2-i}\qquad d)\ \frac{1+i}{3+4i}\qquad e)\ \frac{a+ib}{a-ib}\qquad f)\ \frac{(1-2i)^2}{(1+2i)^2}$$

Exercice 5.

1. Soit A le point du plan de coordonnées $(1,3)$. Quelle est l'équation caractérisant les affixes des points du cercle de centre A et de rayon 2 ?
2. Généraliser le résultat précédent au cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon r.
3. Soient $P(1,3)$ et $Q(-1,2)$ deux points du plan. Quelle est l'équation caractérisant les affixes des points de la médiatrice de $[PQ]$?
4. Généraliser le résultat de la question précédente à la médiatrice des points $P(a,b)$ et $Q(c,d)$.

Exercice 6. Par un raisonnement géométrique, trouver pour chacun des cas suivants l'ensemble des points dont l'affixe z satisfait la condition indiquée.

$$a)\ |z-3|=|z-1+i|\qquad b)\ |z+2-i|=\sqrt{3}\qquad c)\ |z-1+2i|\leq 2\qquad d)\ \left|\frac{z-3}{z-5}\right|=1$$

Exercice 7. Soit $z\in\mathbb{C}$ avec $z\neq 1$, et $Z=\dfrac{z+2i}{z-1}$.

Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que :

a) Z soit un nombre réel b) Z soit un nombre imaginaire pur

Exercice 8. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$e^{2i\pi} \qquad e^{i\pi} \qquad e^{-i\pi} \qquad e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad 4\,e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

Exercice 9. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$a)$ i $\quad b)$ -1 $\quad c)$ $-i$ $\quad d)$ $(-i)^7$ $\quad e)$ $\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$f)$ $\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{-2}$ $\quad g)$ $\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5$ $\quad h)$ $\dfrac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}}}$ $\quad i)$ $-2e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad j)$ $ie^{-i\frac{\pi}{6}}$

$k)$ $-ie^{i\frac{\pi}{4}}$ $\quad l)$ $\left(\overline{2e^{i\frac{\pi}{7}}}\right)^{-3}$ $\quad m)$ $\overline{\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{-2}}$ $\quad n)$ $\left(\frac{4e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^{-2}$ $\quad o)$ $\left(\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{3\,e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^{-1}$

Exercice 10. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$a)$ $1+i$ $\quad b)$ $1-i$ $\quad c)$ $\dfrac{1}{1+i}$ $\quad d)$ $-2+2i$ $\quad e)$ $(1+i)^9$

$f)$ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad g)$ $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ $\quad h)$ $i+\sqrt{3}$ $\quad i)$ $\dfrac{1+i}{i+\sqrt{3}}$ $\quad j)$ $\dfrac{(-1+i)^4}{1+i\sqrt{3}}$

$k)$ $(1-i\sqrt{3})^{10}$ $\quad l)$ $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i\sqrt{3})^5}$ $\quad m)$ $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^8}{(\sqrt{3}-i)^8}$ $\quad n)$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{17}$

Exercice 11. Résoudre les équations suivantes et placer les solutions dans le plan complexe :

$a)$ $X^2+3=0$ $\quad b)$ $X^2-X+6=0$ $\quad c)$ $X^2-4X+5=0$ $\quad d)$ $X^2-2X+4=0$

$e)$ $Z^2=8-6i$ $\quad f)$ $Z^2=-3+4i$ $\quad g)$ $Z^2=7+24i$ $\quad h)$ $Z^2=9+40i$

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes et placer les solutions dans le plan complexe :

$a)$ $z^2+(1-5i)z+2i-6=0$ $\quad b)$ $z^2-(3+4i)z+7i-1=0$ $\quad c)$ $2z^2+(5+i)z+2+2i=0$

Pour vous entrainer...

Exercice 13. Mettre sous forme algébrique les expressions suivantes, et placer dans le plan complexe les différents termes mis en jeu.

$a)$ $(1-i)^2$ $\quad b)$ $(3-i)^2$ $\quad c)$ $(2+3i)^2$ $\quad d)$ $(a-ib)^2$

$e)$ $(2-i)(3-4i)$ $\quad f)$ $(1+2i)\overline{(4-2i)}$ $\quad g)$ $(1-3i)^3$ $\quad h)$ $\overline{(2-i)}^3$

$i)$ $(1+3i)(1-3i)$ $\quad j)$ $(2-i)(2+i)$ $\quad k)$ $(-1+2i)^2+(-1-2i)^2$ $\quad l)$ $\overline{(1+2i)}(3-4i)$

Exercice 14. Simplifier les expressions suivantes :

$a)$ $\mathcal{R}e((2+i)(3-4i))$ $\quad b)$ $\mathcal{R}e((-1+i)(2+3i))$ $\quad c)$ $\mathcal{I}m(-i(2+i))$ $\quad d)$ $\mathcal{I}m(\overline{(2-i)}(1-2i))$

Exercice 15. Mettre sous forme algébrique les expressions suivantes :

$a)$ $\dfrac{1-5i}{1+2i}$ $\quad b)$ $\dfrac{2-3i}{3-2i}$ $\quad c)$ $\dfrac{1+i}{2+i}$ $\quad d)$ $\dfrac{2-2i}{2+4i}$ $\quad e)$ $\dfrac{a-ib}{2a+ib}$ $\quad f)$ $\dfrac{(1+i)^2}{(1-2i)^2}$

Exercice 16. Par un raisonnement géométrique, trouver pour chacun des cas suivants l'ensemble des points dont l'affixe z satisfait la condition indiquée.

a) $|1+i-z| = |z-4+2i|$ *b)* $|z+3-2i| = 5$ *c)* $|z-2+i| > 1$

Exercice 17. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad e^{i\frac{3\pi}{2}} \qquad 2\,e^{-i\frac{2\pi}{3}} \qquad e^{-i\frac{\pi}{3}} \qquad e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad e^{i\frac{5\pi}{6}} \qquad 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Exercice 18. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$(e^{i\frac{3\pi}{4}})^3 \qquad (2e^{-i\frac{\pi}{6}})^{-3} \qquad \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2} \qquad \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^3 \qquad \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^6\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^6 \qquad \left(\overline{3e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^2$$

$$\overline{\left(2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{-2}} \qquad \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\,e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^{-2} \qquad \frac{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5}{\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^7\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^4} \qquad \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{-3}\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4 \qquad \frac{\left(ie^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6}{\left(-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{-2}}$$

Exercice 19. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

a) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)$ *b)* $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}$ *c)* $(1+i)e^{i\frac{\pi}{3}}$ *d)* $\frac{1}{\sqrt{3}-i}$

e) $\frac{1-i}{i-\sqrt{3}}$ *f)* $\frac{(1-i\sqrt{3})^3}{(1+i\sqrt{3})^3}$ *g)* $\frac{(\sqrt{3}+i)^8}{(\sqrt{3}-i)^8}$ *h)* $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{57}$

Exercice 20. Résoudre les équations suivantes et placer les solutions dans le plan complexe :

a) $X^2-X+3=0$ *b)* $2X^2-X+5=0$ *c)* $3X^2-X+1=0$ *d)* $X^2+2X+4=0$

e) $Z^2=1+i$ *f)* $Z^2=7-24i$ *g)* $Z^2=3+4i$ *h)* $Z^2=1-3i$

Exercice 21. Résoudre les équations suivantes et placer les solutions dans le plan complexe :

a) $z^2-(3+2i)z+5+5i=0$ *b)* $z^2+(2-i)z-13+11i=0$ *c)* $z^2+(3-3i)z-5i=0$

Pour aller plus loin...

Exercice 22.

1. Résoudre l'équation $Z^2 = 1+i$ de deux façons différentes (via la forme exponentielle et via la forme algébrique).
2. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.
3. Retrouver ces valeurs en utilisant les formules de trigonométrie $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ et $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

Exercice 23. On considère les nombres complexes $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Déterminer les écritures sous formes algébriques et exponentielles de $z_1 z_2$.

3. En déduire les valeurs exactes de $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice 24. Trouver les valeurs du paramètre réel a pour lesquelles le module du nombre complexe z est égal à 1. Pour les valeurs de a trouvées, mettre z sous forme exponentielle.

$$a)\ z=\frac{(1+i)}{(1-ai)} \qquad b)\ z=\frac{(1+i)^2}{(1+ai)} \qquad c)\ z=\frac{(1+\sqrt{3}i)^2(\sqrt{3}+2i)^2}{7(\sqrt{3}+ai)^2} \qquad d)\ z=\frac{a+2i}{1-ai}$$

Exercice 25. Montrer que : $\forall w,z\in\mathbb{C},\quad |z+w|^2+|z-w|^2=2|z|^2+2|w|^2$.
Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 26. Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$. Montrer que $\frac{z+i}{1+iz}$ est un nombre réel si et seulement si $|z|=1$.

Exercice 27.

1. En raisonnant sur le cercle trigonométrique, exprimer $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{6\pi}{5}$ et $\cos\frac{8\pi}{5}$ en fonction de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$. Rappeler par ailleurs la formule reliant $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$.
2. Soit $z=e^{\frac{2i\pi}{5}}$. En utilisant les connaissances sur les suites géométriques, ou en raisonnant sur le cercle trigonométrique, calculer $1+z+z^2+z^3+z^4$.
3. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{\pi}{5}$.

Exercice 28. On pose $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Trouver les racines troisièmes de l'unité et les exprimer en fonction de j.
2. Les représenter sur le cercle trigonométrique.
3. Montrer que la somme des racines troisièmes de 1 vaut 0.
4. Trouver les racines troisièmes de $-8i$.

Exercice 29. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\quad z^n+1=0$.

Exercice 30. Déterminer les nombres complexes z tels que :

$$a)\quad z^2+|z|-2=0 \qquad b)\quad z|z|-2z=i \qquad c)\quad z^2=\bar{z} \qquad d)\quad z^2-z=|z|^2-|z|$$

Exercice 31. Déterminer les nombres complexes z et w tels que

$$a)\quad \begin{cases} zw^2=1 \\ z^2+w^4=2 \end{cases} \qquad\qquad b)\quad \begin{cases} z\bar{w}=i \\ |z|^2w+z=1 \end{cases}$$

Exercice 32. Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des nombres complexes z tels que :

$$a)\quad |1-z|\leq\frac{1}{2} \qquad b)\quad |(1-i)z-3i|=3 \qquad c)\quad Re(1-z)\leq 2 \qquad d)\quad \mathcal{R}e(iz)\geq 1$$

$$e)\quad \left|1-\frac{1}{z}\right|^2=2 \qquad f)\quad z^7 \text{ et } \frac{1}{z^2} \text{ soient conjugués} \qquad g)\quad \frac{|z-3|}{|z+3|}>2 \qquad h)\quad \frac{|z-3|}{|z-5|}<1$$