Dévoir écrit 3

MAT102, Novembre 2023, groupe CeB-1

Écrire ici vos réponses:

Points	Question	Réponse
2	Q1	(b)
2	Q2	(d)
2	Q3	(d)
4	Q4	(a)
4	Q5	(b)
4	Q6	(c)
2	Q7	(a)

Question 1 (2 pt):

Trouver les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les vecteurs $u = (2, a^2 - a)$ et $v = (-3, 1)$ soient orthogonaux.

a) $a = 3$
b) $a = 3$, $a = -2$
c) $a = \pm\sqrt{2}$
d) $a = \sqrt{5}$, $a = -1$
e) $a = 0$, $a = 1$
f) aucun des précédents

Réponse = (b)

Solution. Deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul. Nous cherchons les valeurs de a tes que $\langle u, v\rangle = 0$. Nous avons

$$\langle u, v\rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ a^2-a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = a^2 - a - 6.$$

Nous cherchons donc les valeurs de a tels que $a^2 - a - 6 = 0$. Il s'agit des zéros d'un polynôme de degré 2, dont les solutions sont

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Question 2 (2 pt):

Soit la droite D définie par l'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 3 \end{cases} .$$

Quelle est une équation cartésienne de D ?

a) $x - 2y = -1$
b) $2x + y = 5$
c) $2x + y = -1$
d) $x + 2y = 7$
e) $2x - y = -1$
f) Aucune des précédentes

Réponse = (d)

Solution. On voit que

$$\begin{aligned} D &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \text{ tel qu'il existe } t \in \mathbb{R} \text{ vérifiant } x = 2t+1 \text{ et } y = -t+3 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ -t+3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Un vecteur directeur pour D est alors $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et D passe par le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Notons $\alpha X + \beta Y = \gamma$ une équation cartésienne pour D.

- On sait que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est n'importe quel vecteur normal à la droite, ou, de manière équivalente, $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nous savons également qu'un vecteur orthogonal à $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est donné par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc on peut prendre $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Reste à trouver γ, mais pour cela on utilise le fit que D passe par le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 3 &= \delta \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 &= \delta \\ 7 &= \delta \end{aligned}$$

L'équation cartésienne de la droite est alors

$$x + 2y = 7.$$

Question 3 (2 pt):

Considérons deux droites dans $\mathbb{R}^2$ avec les équations paramétriques suivantes :

$$D_1 : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t - 1 \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = 4s + 2 \end{cases}$$

Quelle est la **plus petite** distance entre un point de D_1 et un point de D_2 ?

a) $\sqrt{10}$
b) $\sqrt{13}$
c) $\sqrt{11}$
d) 0
e) 1
f) aucune des précédentes

Réponse (d)**.**

Solution. Comme dans la solution de l'exercice 1 nous avons

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix} \right) + t \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R} \right\} \\
D_2 &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) + s \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^2, s \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

Ces deux droites ne sont pas parallèles, car les deux vecteurs directeurs $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix} \right)$ ne sont pas colinéaires. Par conséquence, ces deux droites se rencontrent et la distance minimale entre elles est nulle.

Question 4 (4 pt).

Soit D la droite définie par $D = \{(1-t, 2-3t, 2t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$ et π le plan défini par

$$
\pi = \left\{ \begin{array}{lcl} x &=& 2s - 3u + 2 \\ y &=& s + u \\ z &=& 2 \end{array} \right.
$$

Quelle est l'intersection de D avec π ?

a) $(0, -1, 2)$
b) $(1, 1, 1)$
c) $(-1, 1, 2)$
d) $(2, -1, 2)$
e) l'ensemble vide (pas d'intersection)
f) aucun des précédents

Réponse = (a)

Solution. On a

$$
\begin{aligned}
D &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\ ,\ t \in \mathbb{R} \right\} \\
\pi &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ s, u \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

Un vecteur directeur pour D est $v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et les vecteurs directeurs de π sont $v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 := \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- On remarque que les trois vecteurs v_1, v_2, v_3 sont linéairement indépendants, c'est à dire non-colinéaires. On peut le voir en observant que le déterminant de la matrice $\left|\left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)\right| = -2 \cdot (-1)^{3+3} \left|\left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right| = -2(2+3) = -10$ est non nul; ou bien on peut remarquer que les premiers deux vecteurs $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ne sont pas colinéaires (évident), et le troisième $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ a pour troisième coordonnée -2, qui est non nulle, et ne peut donc pas être combinaison linéaire des premiers deux (car toute combinaison $\alpha \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \beta \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ a 0 pour 3ème coordonnée).

- Cela nous dit, en particulier, que la droite D n'est **pas parallèle** au plan π. On peut en déduire que $\pi \cap D$ est un point.

Notons par

$$M := \pi \cap D$$

le point d'intersection.

Comme $M \in D$, il existe une valeur de t telle que $M = \left(\begin{smallmatrix} 1-t \\ 2-3t \\ 2t \end{smallmatrix}\right)$.

Par ailleurs, comme $M \in \pi$, il existent des valeurs de s, u telles que $M = \left(\begin{smallmatrix} 2+2s-3u \\ s+u \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. On aura alors l'égalité

$$\begin{cases} 1-t &= 2+2s-3u \\ 2-3t &= s+u \\ 2t &= 2 \end{cases}$$

M est alors l'unique solution de ce système linéaire.

- La dernière ligne du système donne $t = 1$. Donc le système dévient $\left\{\begin{smallmatrix} 2s-3u & = & -2 \\ s+u & = & -1 \\ t & = & 1 \end{smallmatrix}\right.$. La deuxième ligne donne $s = -u - 1$, et substitués das na première ligne elle donne $2(-u-1) - 3u = -2$ ce qui donne $u = 0$ et donc $s = -1$ et $t = 1$. Donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nous avons également une autre solution possible: trouver une équation cartésienne $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ pour π d'abord, et ensuite imposer que $M = \left(\begin{smallmatrix} 1-t \\ 2-3t \\ 2t \end{smallmatrix}\right)$ vérifie l'équation de π pour trouver la bonne valeur de t. Voici les calculs suivant cette voie:

- Trouvons $\alpha, \beta\gamma, \delta$. On sait que $n := (\alpha, \beta, \gamma)$ est n'importe quel vecteur normal à π, donc on peut prendre

$$v_2 \wedge v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ou encore $n = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ qui est plus simple. Par conséquence, π admet une équation de la forme $z = \delta$. Comme le point $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ appartient à π, nous avons $2 = \delta$.

- Ensuite, pour que $M = \left(\begin{smallmatrix} 1-t \\ 2-3t \\ 2t \end{smallmatrix}\right)$ appartienne à π il faut qu'elle vérifie l'équation de π, c'est à dire $2t = 2$, ce qui donne $t = 1$ comme souhaité. Cela confirme que $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Question 5 (4 pt).

Soit D la droite définie par $D = \{(3+t, 2t+5, t+3), t \in \mathbb{R}\}$ et notons $Q = (0, 2, 0)$. Trouver le plan π orthogonal à D qui passe par Q et calculer son intersection $H = \pi \cap D$ avec D.

a) $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -2x + 6y + 12z = 2\}$ et $H = (0, 1, 0)$
b) $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 4\}$ et $H = (1, 1, 1)$
c) $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x + 5y + 3z = -1\}$ et $H = (-1, -3, -1)$
d) $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = -1\}$ et $H = (3, 5, 3)$
e) aucune des précédentes

Réponse = (b).

Solution. On a

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Un vecteur directeur pour D est donné par $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On peut prendre ce même vecteur comme vecteur normal à π. Donc, si $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = \delta$ est une équation cartésienne de π, on peut poser $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Il en suit qu'une équation pour π est $X + 2Y + Z = \delta$. Maintenant, pour trouver δ, nous utilisons le fait que $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi$. En d'autre termes, les coordonnées de Q doivent satisfaire l'équation cartésienne de π de sorte qu'on a $0 + 2 \cdot 2 + 0 = \delta$. Cela donne $\delta = 4$. Donc une équation pour π est

$$X + 2Y + Z = 4.$$

Trouvons maintenant l'intersection H de π avec D. Comme $H \in D$, il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que $H = \begin{pmatrix} 3+t \\ 5+2t \\ 3+t \end{pmatrix}$. D'autre part, comme $H \in \pi$, les coordonnées de H doivent satisfaire l'équation de π : $(3 + t) + 2(5 + 2t) + (3 + t) = 4$. Cela donne $t = -2$, donc $H = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 5+2\cdot(-2) \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Question 6 (4 pt):

On considère les deux plans

$$\pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -2x + 6y + 12z = 2\}$$
$$\pi_2 = \{(2s - t, t, 1 + s), s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Donner une forme paramétrique pour la droite $D = \pi_1 \cap \pi_2$.

a) $D = \{(2 - t, 3t, 12t) \ , \ t \in \mathbb{R}\}$
b) $D = \{(2 - t - s, s + 3t, 1 + s) \ , \ t \in \mathbb{R}\}$
c) $D = \{(3s - \frac{7}{4}, -\frac{1}{4} - s, s) \ , \ s \in \mathbb{R}\}$
d) $D = \{(3t - 1, 3t, 0) \ , \ t \in \mathbb{R}\}$
e) $D = \{(-\frac{5}{4} + 3s, -\frac{3}{4} - s, s) \ , \ s \in \mathbb{R}\}$

f) aucune des précédentes

Réponse = (c)

Solution. Trouvons une équation cartésienne du plan π_2. On a

$$\pi_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

Un vecteur normal pour π est $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc une équation cartésienne pour π sera $-X - Y + 2Z = \delta$. Pour trouver la valeur de δ nous utilisons le fait que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \pi$. On trouve $\delta = 2$ et une équation cartésienne pour π est donnée par $-X - Y + 2Z = 2$:

$$\pi_2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ , \ -x - y + 2z = 2\}$$

Une système d'équations cartésiennes de la droite $D := \pi_1 \cap \pi_2$ est alors données par

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ , \ \begin{matrix} -2x+6y+12z & = 2 \\ -x-y+2z & = 2 \end{matrix} \right\}$$

Pour trouver une forme paramétrique nous devons résoudre ce système. On a

$$D = \begin{cases} -2x \ +6y \ +12z \ = 2 \\ -x \ \ -y \ \ +2z \ = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -L_1/2 \\ L_2 - L_1/2 \end{matrix} \begin{cases} x \ -3y \ -6z \ = -1 \\ \quad -4y \ -4z \ = \ 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} L_1 - \frac{3}{4}L_2 \\ -L_2/4 \end{matrix} \begin{cases} x \quad -3z \ = -7/4 \\ \quad y \ +z \ = -1/4 \end{cases} \Rightarrow \quad D = \begin{cases} x \ = \ -\frac{7}{4} + 3z \\ y \ = \ -\frac{1}{4} - z \end{cases}$$

Donc

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} + 3z \\ -\frac{1}{4} - z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -7/4 \\ -1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Question 7 (2pt):

Soit D la droite définie par les équations paramétriques $\begin{cases} x = \ 2+t \\ y = 1-3t \\ z = \ \ 4t \end{cases}$. Trouvez le point d'intersection M de D avec le plan $\pi : 3x - 2y + z = 17$.

a) $M = (3, -2, 4)$
b) $M = (1, 2, 3)$
c) $M = (2, 1, 4)$
d) $M = (-1, 4, -3)$
e) aucun des précédents

Réponse = (a)

Solution. Comme $M \in D$, on a $M = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1-3t \\ 4t \end{pmatrix}$. Comme $M \in \pi$ les coordonnées des M doivent satisfaire l'équation de π: $3(2 + t) - 2(1 - 3t) + 4t = 17$.

$4 + 13t = 17$ Donc $t = 1$. Il en suit que $M = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.