Partiel - 23 octobre 2023 (durée : 1h30)

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto-verso. Aucun appareil électronique.
Apportez le plus grand soin à la rédaction et à la présentation. La notation en tiendra compte.

Exercice 1 On considère le nombre complexe $z = \dfrac{a+ib}{c+id}$ où a, b, c, d sont des réels, avec $(c,d) \neq (0,0)$. A quelle condition sur a, b, c, d a-t-on z réel ? A quelle condition sur a, b, c, d a-t-on z imaginaire pur ?

z est une fraction de deux nombres complexes. Pour l'écrire sous une forme plus simple, on va multiplier les 2 termes de la fraction par le conjugué du dénominateur :

$$z = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac - i^2\,bd + i(bc-ad)}{c^2 - i^2\,d^2} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

On a donc : $\mathcal{R}e(z) = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$ et $\mathcal{I}m(z) = \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$. On en déduit immédiatement que :

- z est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire sous la condition $bc - ad = 0$.
- z est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire sous la condition $ac + bd = 0$.

Exercice 2

On définit 4 ensembles de points M du plan complexe par les conditions ci-dessous sur leurs affixes z :

Zone A $1 \leq |z| \leq 3$ et $\dfrac{2\pi}{3} \leq \arg z \leq \dfrac{3\pi}{4}$

Zone B $|z| \geq 2$ et $-2 \leq \mathcal{R}e(z) \leq 0$ et $-2 \leq \mathcal{I}m(z) \leq 0$

Zone C $|z| \geq 1$ et $1 \leq \mathcal{R}e(z) \leq 2$ et $\arg z \in \left[-\dfrac{\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{6}\right]$

Zone D $\dfrac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \dfrac{\pi}{2}$ et $\mathcal{I}m(z) \leq 2$

En donnant quelques lignes d'explications pour chaque cas, hachurer ces 4 zones dans le dessin ci-dessous en indiquant à chaque fois la lettre correspondante.

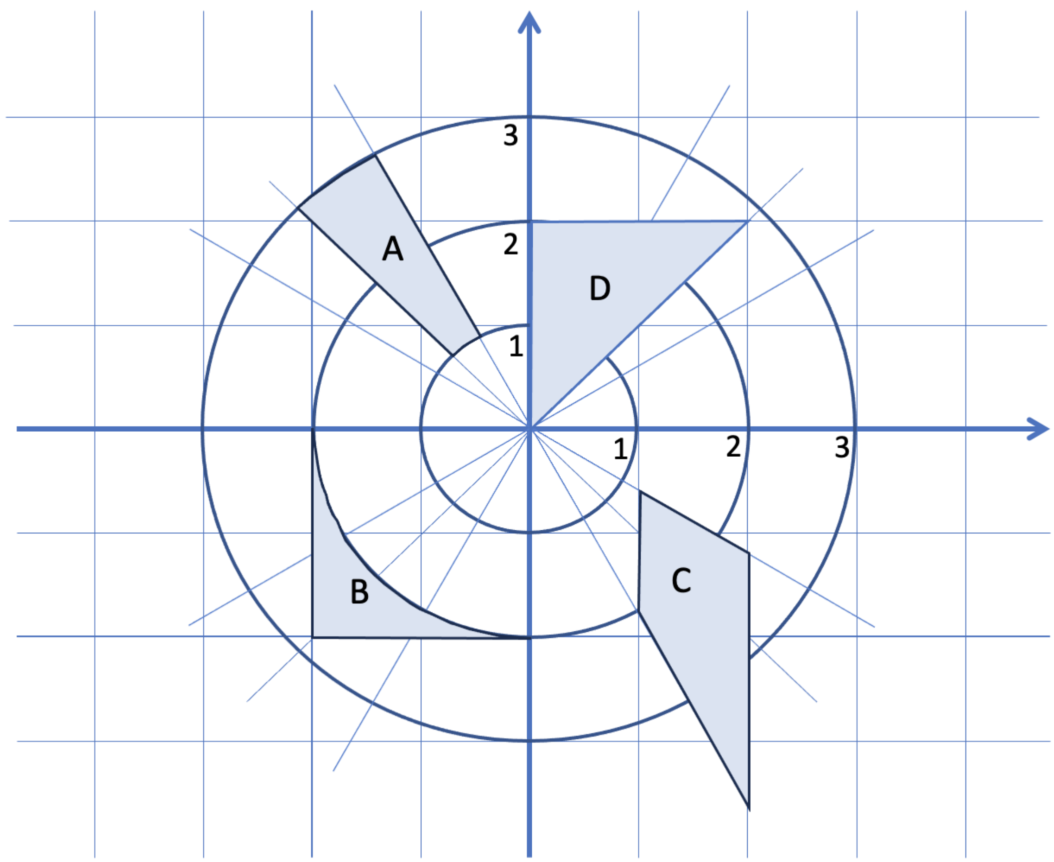
Zone A La zone A correspond à une portion de la couronne dont le rayon intérieur vaut 1 ($1 \leq |z|$) et le rayon extérieur vaut 3 ($|z| \leq 3$). De plus, les points de cette zone sont dans le secteur angulaire issu de O et compris entre les angles $2\pi/3$ et $3\pi/4$ ($\arg z \in [2\pi/3, 3\pi/4]$). D'où la zone hachurée indiquée.

Zone B Les points de cette zone ont des abscisses comprises entre -2 et 0 ($-2 \leq$

$\mathcal{R}e(z) \leq 0$) et des ordonnées comprises entre -2 et 0 ($-2 \leq \mathcal{I}m(z) \leq 0$). La zone B est donc incluse dans le carré $[-2, 0] \times [-2, 0]$. De plus, les points sont à l'extérieur du disque de rayon 2 ($|z| \geq 2$). D'où la zone hachurée indiquée.

Zone C Les points de cette zone sont dans le secteur angulaire issu de O et compris entre les angles $-\pi/3$ et $-\pi/6$ ($\arg z \in [-\pi/3, -\pi/6]$). De plus, les abscisses des points de cette zone sont comprises entre 1 et 2 ($1 \leq \mathcal{R}e(z) \leq 2$). La condition supplémentaire $|z| \geq 1$ (c'est-à-dire les points sont à l'extérieur du disque de rayon 1) n'apporte pas de restriction supplémentaire, car elle est déjà vérifiée par les points qui vérifient les 2 conditions précédentes. D'où la zone hachurée indiquée.

Zone D Les points de cette zone sont dans le secteur angulaire issu de O et compris entre les angles $\pi/4$ et $\pi/2$ ($\arg z \in [\pi/4, \pi/2]$). De plus, les ordonnées des points de cette zone sont inférieures à 2 ($\mathcal{I}m(z) \leq 2$). D'où le triangle hachuré indiqué.



Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 + (i-3)\,z - 1 + 3i = 0$

INDICATION : $\sqrt{16^2 + 30^2} = 34$

Nous avons affaire à une équation polynomiale de degré 2. On va la résoudre en calculant son discriminant Δ, dont on cherchera ensuite une racine δ ($\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$). Les deux solutions de l'équation seront alors finalement $z_1 = \frac{-(i-3)-\delta}{4}$ et $z_2 = \frac{-(i-3)+\delta}{4}$.

On a ici : $\Delta = (i-3)^2 - 4(2)(-1+3i) = -1-6i+9+8-24i = 4(5+12i) = 16-30i$. Notons maintenant $\delta = \alpha + i\beta$. L'égalité $\delta^2 = \Delta$ implique $\alpha^2 - \beta^2 = 16$ (égalité des parties réelles) et $2\alpha\beta = -30 < 0$ (égalité des parties imaginaires). De plus, on a égalité des modules $|\delta|^2 = |\Delta|$, c'est-à-dire $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{16^2 + 30^2} = 34$. On a donc le système :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 16 & (1) \\ \alpha^2 + \beta^2 = 34 & (2) \\ \alpha\beta < 0 & (3) \end{cases}$$

En faisant $(1)+(2)$, puis $(2)-(1)$, on en déduit $\alpha^2 = 25$ et $\beta^2 = 9$, soit $\alpha = \pm 5$ et $\beta = \pm 3$. D'après (3), α et β sont de signes opposés. D'où $\delta = 5 - 3i$ (ou son opposé).
Les 2 racines du polynôme sont donc :

$$z_1 = \frac{3-i+5-3i}{4} = 2-i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{3-i-5+3i}{4} = \frac{-1+i}{2}$$

Exercice 4 Soit $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1. Calculer z^2, et déterminer son écriture sous forme exponentielle.

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2+\sqrt{3} + \underbrace{i^2}_{-1}\left(2-\sqrt{3}\right) + 2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{4-3} = 2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

On en déduit que le module de z^2 vaut $\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$.
D'où $z^2 = 4\,\dfrac{2\sqrt{3}+2i}{4} = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1}{2}\right) = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 4\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

2. En déduire une écriture exponentielle de z, et les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

On sait que $\left(\pm\sqrt{\rho}\,e^{i\theta/2}\right)^2 = \rho\,e^{i\theta}$. Or, on a ici $z^2 = 4\,e^{i\frac{\pi}{6}}$, d'où $z = \pm 2\,e^{i\frac{\pi}{12}}$. De plus, les parties réelles et imaginaires de z sont positives, donc $z = 2\,e^{i\frac{\pi}{12}}$. On peut maintenant identifier les deux écritures de z :

$$z = 2\,e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\cos\frac{\pi}{12} + 2\,i\,\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

On en déduit : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Exercice 5

1. Calculer le produit $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k-1}$ pour $n \geq 2$.

Ecrivons ce produit sous forme développée :

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k-1} = \frac{3}{1}\,\frac{4}{2}\,\frac{5}{3}\,\frac{6}{4}\,\dots\,\frac{n-1}{n-3}\,\frac{n}{n-2}\,\frac{n+1}{n-1}$$

Sous cette forme, on voit que seuls les 2 premiers termes du dénominateur et les 2 derniers termes du numérateur ne se simplifient pas (c'est-à-dire ne sont pas présents à la fois en haut et en bas de la fraction). Donc

$$P_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k-1))$ pour $n \geq 2$.

Méthode 1 : on peut utiliser les propriétés du logarithme $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ et $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$. D'où

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k-1)) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = \ln\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k-1}\right) = \ln P_n$$

Méthode 2 : on peut mettre la somme sous forme développée :

$$\begin{aligned} S_n &= \ln 3 - \ln 1 + \ln 4 - \ln 2 + \ln 5 - \ln 3 + \dots + \ln n - \ln(n-2) + \ln(n+1) - \ln(n-1) \\ &= (\ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln n + \ln(n+1)) - (\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln(n-2) + \ln(n-1)) \end{aligned}$$

Presque tous les termes se simplifient, sauf les 2 derniers de la première somme et les 2 premiers de la deuxième somme. D'où

$$S_n = \ln n + \ln(n+1) - \ln 1 - \ln 2 = \ln \frac{n(n+1)}{2} = \ln P_n$$

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$

Soit $n \geq 2$ un entier naturel fixé, et z un nombre complexe différent de -1 et racine n-ième de -1, c'est-à-dire que z vérifie $z^n = -1$.

Calculer $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2k}$.

On a $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^{2k} = 1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2n-2} = 1 + z^2 + (z^2)^2 + \dots + (z^2)^{n-1}$. Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison z^2, d'où $A_n = \frac{1-(z^2)^n}{1-z^2}$.
On peut noter qu'en effet $1 - z^2 \neq 0$ car $z \neq 1$ (car 1 n'est pas une racine n-ième de -1) et car $z \neq -1$ par hypothèse.
Par ailleurs $(z^2)^n = z^{2n} = (z^n)^2 = (-1)^2 = 1$. D'où $A_n = 0$

<u>attention</u> : $z^2\, z^k = z^{2+k}$ et non pas z^{2k}