MAT102
2023-2024

Contrôle continu n°1

Jeudi 28 Septembre 2023 – 11h30-12h30

Exercice 1 : Mettre sous forme algébrique les nombres suivants

$$\frac{1+i}{2+i} \qquad 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \qquad (2-i)^3$$

Exercice 2 : Mettre sous forme exponentielle les nombres suivants

$$\overline{\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{-2}} \qquad \frac{(\sqrt{3}+i)^8}{(\sqrt{3}-i)^8}$$

Exercice 3 : Desinner l'ensemble

$A \ = \ \{z \in \mathbb{C}$ tel que $\ |z-1| \leq 2 \ , \ \mathrm{Re}(z) \leq 1 \ , \ \mathrm{Im}(z-1) \geq 1 \ \}$

Exercice 4 : Résoudre l'équation $Z^2-(3+4i)Z+7i-1=0$.

Solution

Exercice 1:

- On applique la formule de l'inverse $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

$$\frac{1+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2-i)}{|2+i|^2} = \frac{2-i+2i-i^2}{5} = \frac{3+i}{5}$$

- On sait que $e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et on connait également la forme algébrique de ses puissances. On a

$$2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = -\sqrt{3} + i$$

- On applique la formule du binome $(X+Y)^3 = X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3$

$$\begin{array}{rcl} (2-i)^3 & = & (2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot (-i) + 3 \cdot 2 \cdot (-i)^2 + (-i)^3) \\ & = & 8 - 12i - 6 + (-1)^3 i^3 \\ & = & 8 - 12i - 6 + (-1)(-i) \\ & = & 2 - 11i \end{array}$$

Exercice 2:

- On sait que $\overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}$ et aussi $(\rho e^{i\theta})^n = \rho e^{in\theta}$, donc

$$\overline{\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{-2}} \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot e^{2i\pi/3} \;=\; 4 \cdot e^{2i\pi/3}$$

- On reconnait que le numerateur $\sqrt{3}+i$ est le conjugué du dénominateur $\sqrt{3}-i$. On peut utiliser la formule de l'inverse pour $\overline{z}$ qui donne

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{\overline{\overline{z}}}{|\overline{z}|} = \frac{z}{|z|^2}.$$

Donc on a

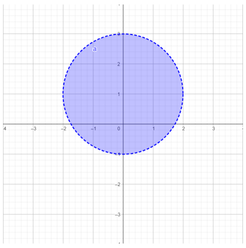
$$\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^8 = \left(\frac{z^2}{|z|^2}\right)^8 = \left(\frac{z}{|z|}\right)^{16}$$

Si $z = \sqrt{3} + i$ on trouve

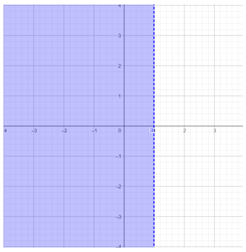
$$\begin{array}{rcl} \dfrac{(\sqrt{3}+i)^8}{(\sqrt{3}-i)^8} & = & \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{|\sqrt{3}+i|}\right)^{16} = \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{16} = (e^{i\pi/6})^{16} \\ & = & e^{i\pi\frac{16}{6}} = e^{i\pi\frac{12}{6}+i\pi\frac{4}{6}} = e^{2i\pi+i\pi\frac{2}{3}} = e^{2i\pi}e^{i\pi\frac{2}{3}} = e^{i\pi\frac{2}{3}} \end{array}$$

Exercice 3:

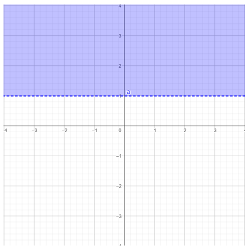
- La première condition $|z - i| \leq 2$ décrit l'intérieur et le bord du disque de centre i et rayon égal à 2.



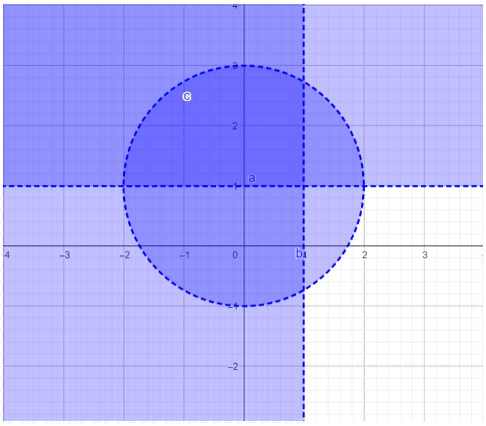
- La deuxième condition $\mathrm{Re}(z) \leq 1$ décrit un demi-plan vertical



- La troisième condition $\mathrm{Im}(z-1) \geq 1$ équivaut à $\mathrm{Im}(z) \geq 1$ car $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z-1)$. Donc elle décrit un demi-plan horizontal



- Les trois conditions ensemble décrivent la région la plus foncé ci de suite



Exercice 4:

L'équation est sous la forme $aZ^2 + bZ + c = 0$ avec

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -(3+4i) \\ c &= 7i - 1 \end{aligned}$$

Calculons

$$\begin{aligned}\Delta \;=\; b^2-4ac \quad &= \quad (3+4i)^2-4(7i-1)\\ &= \quad (9-16+24i)-28i+4\\ &= \quad -7+24i-28i+4\\ &= \quad -3-4i\end{aligned}$$

On cherche maintenant les deux nombres $w=\pm(x+iy)$ tel que $w^2=\Delta=-3-4i$. Nous savons que cette condition produit les conditions

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2-y^2 & = & -3\\ 2xy & = & -4\\ x^2+y^2 & = & \sqrt{9+16} \;=\; 5\end{array}\right.$$

- L'équation 1 plus l'équation 3 fournit

$$2x^2=-3+5=2 \implies x \;=\; \pm 1$$

- L'équation 3 moins l'équation 1 fournit

$$2y^2=5+3=8 \implies y \;=\; \pm 2$$

- L'équation 2 nous dit que le signes de x et de y sont opposés

Donc on trouve

$$w=\pm(1-2i)$$

La formule pour les solutions des équations de degré deux est $Z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$. Dans notre cas cela donne

$$Z_{1,2} \;=\; \frac{3+4i\pm(1-2i)}{2} \;=\; \left\{\begin{array}{l} 2+i\\ \\ 1+3i\end{array}\right.$$